

Problème d'affectation

Méthode Hongroise

Il s'agit d'un cas particulier du problème de transport et, par conséquent, du problème de flot à coût minimum.

Le problème consiste à affecter les éléments d'un ensemble à ceux d'un autre ensemble selon une approche biunivoque (un à un) de sorte que la somme des coûts des affectations soit minimale.

Cet algorithme, appelé aussi Méthode Hongroise, sert à résoudre les problèmes d'affectation, problèmes qu'on peut résumer de la manière suivante :

Problème et notations

On suppose que l'on a un ensemble de m tâches, ainsi qu'un ensemble de $n > m$ ressources (ou travailleur, ou processeur). Ni les ressources, ni les tâches ne sont a priori identiques, et on suppose donc qu'on dispose d'une matrice e , de taille $n \times m$, telle que $e_{i,j}$ représente le coût payé si on affecte la tâche j sur le processeur i . Naturellement, on cherche à diminuer le coût à payer pour traiter l'ensemble des tâches. Si au contraire, $e_{i,j}$ représente un profit engendré par le placement de la tâche j sur la ressource i , il faudra modifier un peu la matrice avant l'exécution de l'algorithme pour que la minimisation corresponde à un profit maximal.

Dans la suite, nous supposons que nous avons 4 machines a, b, c et d , ainsi que 4 tâches α, β, γ et δ que la matrice e soit de la forme :

Comme on a une matrice de coûts, à l'évidence la meilleure solution est simplement d'affecter α à a , β à c , γ à d et enfin δ à b , permettant un coût nul (difficile, donc, de faire mieux).

$$\begin{pmatrix} & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a & 0 & 1 & 3 & 5 \\ b & 4 & 8 & 4 & 0 \\ c & 2 & 0 & 2 & 5 \\ d & 7 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considérant une matrice (appelée tableau de coûts), il faut choisir un seul élément par ligne et par colonne de façon à rendre la somme minimale.

	Postes				
Ingénieurs	17	15	9	5	12
	16	16	10	5	10
	12	15	14	11	5
	4	8	14	17	13
	13	9	8	12	17

Nous allons exposer la méthode sous la forme d'une succession d'étapes :

ETAPE 0 : REDUCTION DU TABLEAU INITIAL

- On soustrait à chaque ligne du tableau initial, le plus petit élément de la ligne

17 ₁₂	15 ₁₀	9 ₄	5 ₀	12 ₇	Min de la ligne
16 ₁₁	16 ₁₁	10 ₅	5 ₀	10 ₅	5
12 ₇	15 ₁₀	14 ₉	11 ₆	5 ₀	5
4 ₀	8 ₄	14 ₁₀	17 ₁₃	13 ₉	4
13 ₅	9 ₁	8 ₀	12 ₄	17 ₉	8

12	10	4	0	7
11	11	5	0	5
7	10	9	6	0
0	4	10	13	9
5	1	0	4	9

- On fait de même avec les colonnes.

Rem : ici, on n'a pas besoin de toucher la colonne 1, 3, 4, 5 par contre la colonne 2 n'est pas réduite : son plus petit élément est « 1 », il faut donc retrancher la valeur « 1 » de cette colonne :

12	9	4	0	7
11	10	5	0	5
7	9	9	6	0
0	3	10	13	9
5	0	0	4	9

12	9	4	0	7
11	10	5	0	5
7	9	9	6	0
0	3	10	13	9
5	0	0	4	9

↓
1

Nous avons maintenant un tableau réduit où chaque ligne et colonne a un zéro, nous pourrions commencer l'étape 1 de l'algorithme.

ETAPE 1 : ENCADRER ET BARRER DES ZEROS

- On cherche la ligne comportant le moins de zéros non barrés (en cas d'égalité, choisir arbitrairement la plus haute)
- On encadre un des zéros de cette ligne (arbitrairement le plus à gauche)

- c) On **barre** tous les zéros se trouvant sur la même ligne ou sur la même colonne que le zéro encadré
- d) On recommence l'opération jusqu'à ce qu'on ne puisse plus encadrer, ni barrer de zéros

12	9	4	0	7	→ 1
11	10	5	0	5	→ 1
7	9	9	6	0	→ 1
0	3	10	13	9	→ 1
5	0	0	4	9	→ 2

12	9	4	0	7	→ 1
11	10	5	0	5	→ 1
7	9	9	6	0	→ 1
0	3	10	13	9	→ 1
5	0	0	4	9	→ 2

Si l'on a encadré un zéro par ligne et par colonne, c'est terminé, on a la solution optimale. Sinon, on passe à l'étape 2 avec une modification du tableau.

ETAPE 2 : Marquer Et Barrer Des Lignes Et Des Colonnes

- a) On marque d'une croix « x » toutes les lignes ne contenant aucun zéro encadré
- b) On marque toute colonne ayant un zéro barré sur une ligne marquée
- c) On marque toute ligne ayant un zéro encadré dans une colonne marquée

On répète alternativement les opérations b) et c) jusqu'à ne plus pouvoir marquer de rangée.

			X		
12	9	4	0	7	X
11	10	5	0	5	X
7	9	9	6	0	
0	3	10	13	9	
5	0	0	4	9	

On trace alors un trait sur toute ligne non marquée et sur toute colonne marquée.

			X		
12	9	4	0	7	X
11	10	5	0	5	X
7	9	9	6	0	
0	3	10	13	9	
5	0	0	4	9	

Ce faisant, nous faisons apparaître un tableau partiel.

ETAPE 3 : Modification du Tableau

Les cases non traversées par un trait constituent un tableau partiel

- a) On retranche à toutes les cases de ce tableau partiel le plus petit élément de celui-ci
- b) On ajoute ce même élément à toutes les cases du tableau initial barrées deux fois
- c) On obtient alors un nouveau tableau sur lequel on pourra répéter la succession des étapes 1 à 3

			X		
12	9	4	0	7	X
11	10	5	0	5	X
7	9	9	6	0	
0	3	10	13	9	
5	0	0	4	9	

Le plus petit élément du tableau partiel, ici c'est la valeur « 4 ».

On applique a) et b) au tableau, on a un nouveau tableau :

8	5	0	0	3
7	6	1	1	1
7	9	9	10	0
0	3	10	17	9
5	0	0	8	9

Le nouveau tableau ainsi construit, on répète alors les étapes 1, 2, 3.

Voici le tableau tel qu'il a été modifié, nous allons répéter l'étape 1, c'est-à-dire encadrer et barrer les zéro,

- Nous allons encadrer le zéro de la deuxième ligne puisqu'il y a moins de zéro que celle de la première,
- Barrer le zéro qui est au dessus, etc.
- Ensuite la ligne au-dessus, encadrer le zéro, et barrer le zéro en bas

8	5	0	0	3
7	6	1	0	1
7	9	9	10	0
0	3	10	17	9
5	0	0	8	9

8	5	0	0	3
7	6	1	0	1
7	9	9	10	0
0	3	10	17	9
5	0	0	8	9

Nous avons encadrés 5 zéro, alors nous donc la solution optimale, le choix des cases est indiqué par les zéro encadrés, il faut se reporter au tableau de départ, pour pouvoir calculer l'affectation correspondante.

8	5	0	0	3
7	6	1	0	1
7	9	9	10	0
0	3	10	17	9
5	0	0	8	9

17	15	9	5	12
16	16	10	5	10
12	15	14	11	5
4	8	14	17	13
13	9	8	12	17

Affectation minimal :
 $9 + 5 + 5 + 4 + 9 = 32$

Remarque :

La méthode hongroise, telle qu'elle est décrite, permet de résoudre les problèmes d'affectation minimale (on considère le tableau initial comme un tableau de coûts).

Si l'on veut résoudre un problème d'affectation maximale (c'est à dire en considérant les éléments du tableau comme des indices de satisfaction), il faudra transformer le tableau initial en retranchant tous les éléments du tableau au plus élevé d'entre eux.