

CORRIGE EXERCICES AUTOMATIQUE

Table des matières

Exercices simples d'application	2
Exercice 1 – Transformée de Laplace	2
Exercice 2 – Système du premier ordre	3
Exercice 3 – Système du second ordre	4
Exercice 4 – Diagramme de Bode	7
Exercice 5 – Lieu des racines (Evans)	8
Exercice 6 – Modification de la dynamique d'un système	10
Exercice 7 – Stabilisation d'un système	13
Exercice 8 – Diagramme de Bode et Nyquist (bonus)	16
Exercice 9 – Conditions de stabilité (Bode, Evans, Nyquist)	19
Exercice concret	24
Exercice – Système de capture et maintien de la vitesse d'une voiture	24

Exercices simples d'application

Exercice 1 – Transformée de Laplace

Donner l'expression de la transformée de Laplace $F(p)$ (avec la variable complexe $p = j\omega$) des fonctions $f : t \rightarrow \dots$, avec $t \geq 0$ la variable temporelle.

1- Impulsion de Dirac : $f(t) = \delta(t)$

2- Echelon : $f(t) = K$ avec K une constante

3- Rampe : $f(t) = Kt$ avec K une constante

4- Montrer que l'expression de la transformée inverse de Laplace de la fonction :

$$F(p) = \frac{K}{Ap + B}$$

Avec K, A, B des constantes est :

$$f(t) = \frac{K}{A} e^{-\frac{B}{A}t}$$

Exercice 2 – Système du premier ordre

On considère un système défini par un paramètre d'état f , qui est une fonction solution de l'équation différentielle suivante :

$$A \frac{df(t)}{dt} + Bf(t) = g(t)$$

Avec A, B des constantes et g une fonction représentant une commande ou perturbation pouvant influencer sur le fonctionnement de notre système (et donc son paramètre d'état).

Pour simplifier on suppose des conditions initiales nulles pour les fonctions f et g .

- 1- Donner l'expression de la fonction de transfert :

$$\frac{F(p)}{G(p)}$$

- 2- Déterminer les racines du dénominateur de la fonction de transfert (aussi appelé pôles).
- 3- Pour une excitation de type échelon d'amplitude K , donner l'expression temporelle du paramètre d'état de notre système en fonction du temps $f(t)$.
- 4- Quelle est la condition de stabilité du système ?

On suppose que la fonction de transfert est stable.

- 5- En utilisant d'une part le résultat de la question 3, et d'autre part le théorème de la valeur finale, montrer que le paramètre d'état f tend bien vers $\frac{K}{B}$ avec le temps.

Exercice 3 – Système du second ordre

On considère un système défini par un paramètre d'état f , qui est une fonction solution de l'équation différentielle suivante :

$$A \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + B \frac{df(t)}{dt} + Cf(t) = g(t)$$

Avec A, B, C des constantes et g une fonction représentant une commande ou perturbation pouvant influencer sur le fonctionnement de notre système (et donc son paramètre d'état). Pour simplifier on suppose des conditions initiales nulles pour les fonctions f et g .

- 1- Donner l'expression de la fonction de transfert :

$$\frac{F(p)}{G(p)}$$

- 2- Déterminer les pôles de la fonction de transfert (que l'on notera p_+, p_-).

On suppose que les pôles sont réels, non nuls et distincts.

- 3- Pour une excitation de type impulsion, montrer que l'expression temporelle du paramètre d'état de notre système en fonction du temps $f(t)$ est :

$$f(t) = \frac{\tau_+ \tau_-}{A} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_+}} - e^{-\frac{t}{\tau_-}}}{\tau_+ - \tau_-}$$

$$\text{Avec : } \tau_+ = -\frac{1}{p_+} \text{ et } \tau_- = -\frac{1}{p_-}.$$

Aide : Ecrire le numérateur de la fonction de transfert sous forme factorisée, et l'on donne la transformée inverse de Laplace :

$$F(p) = \frac{1}{(1 + ap)(1 + bp)} \rightarrow f(t) = \frac{e^{-\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{b}}}{a - b}$$

On suppose que les pôles sont réels, non nuls et égaux.

- 4- Pour une excitation de type impulsion, montrer que l'expression temporelle du paramètre d'état de notre système en fonction du temps $f(t)$ est :

$$f(t) = \frac{t}{A} e^{-\frac{t}{\tau_{\pm}}}$$

$$\text{Avec : } \tau_{\pm} = -\frac{1}{p_{\pm}} \left(= -\frac{1}{p_+} = -\frac{1}{p_-} \right).$$

Aide : Ecrire le numérateur de la fonction de transfert sous forme factorisée, et l'on donne la transformée inverse de Laplace :

$$F(p) = \frac{1}{(1 + ap)^2} \rightarrow f(t) = \frac{1}{a^2} t e^{-\frac{t}{a}}$$

On suppose que les pôles sont complexes conjuguées.

- 5- Pour une excitation de type impulsion, montrer que l'expression temporelle du paramètre d'état de notre système en fonction du temps $f(t)$ est :

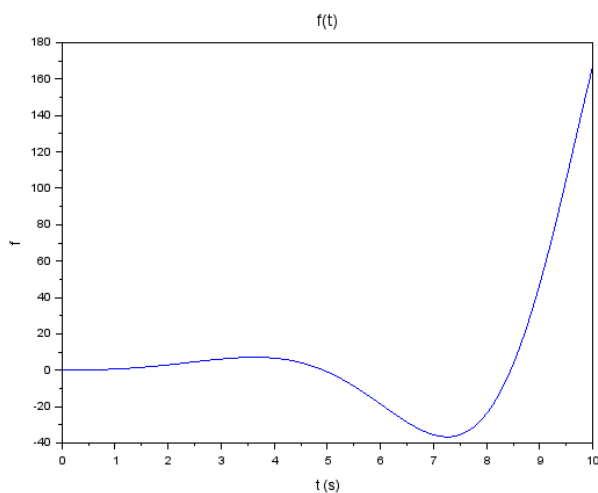
$$f(t) = \frac{1}{A \cdot \text{Im}(p_{\pm})} \sin(\text{Im}(p_{\pm})t) e^{\text{Re}(p_{\pm})t}$$

Avec : $\text{Re}(p_{\pm})$ et $\text{Im}(p_{\pm})$ respectivement les parties réelle et imaginaire des pôles de la fonction $F(p)$.

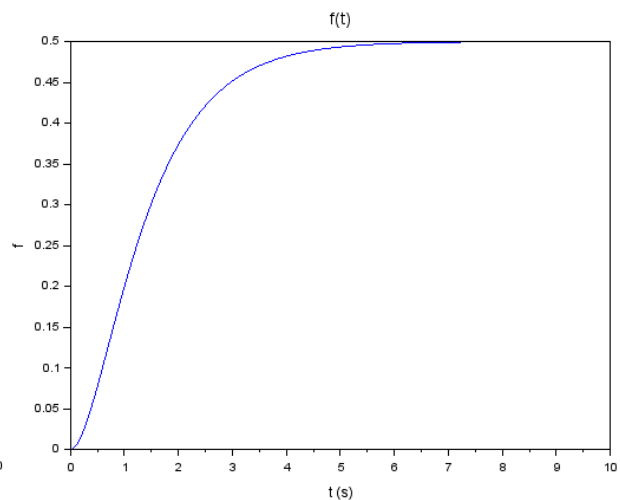
- 6- Quelle est la condition de stabilité du système ?

On suppose que la fonction de transfert est stable.

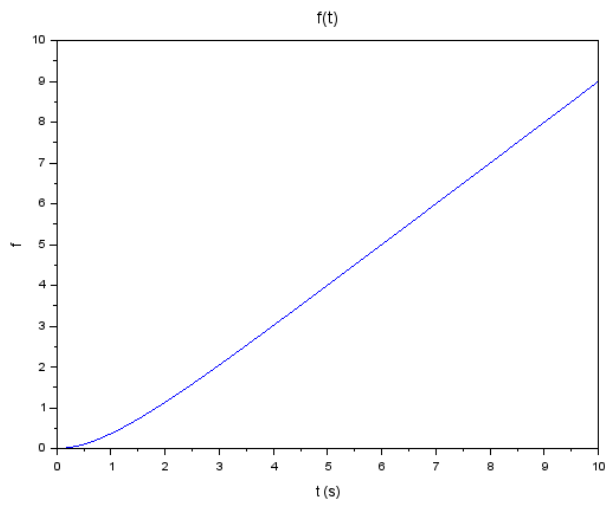
- 7- En utilisant d'une part le résultat des questions 3, 4 et 5, et d'autre part le théorème de la valeur finale, montrer que le paramètre d'état f tend bien vers 0 avec le temps.
- 8- On présente plusieurs évolutions temporelles de notre paramètre d'état pour une entrée en échelon. Dites pour chaque cas si les pôles sont réels ou complexes, et s'ils ont une partie réelle négative.



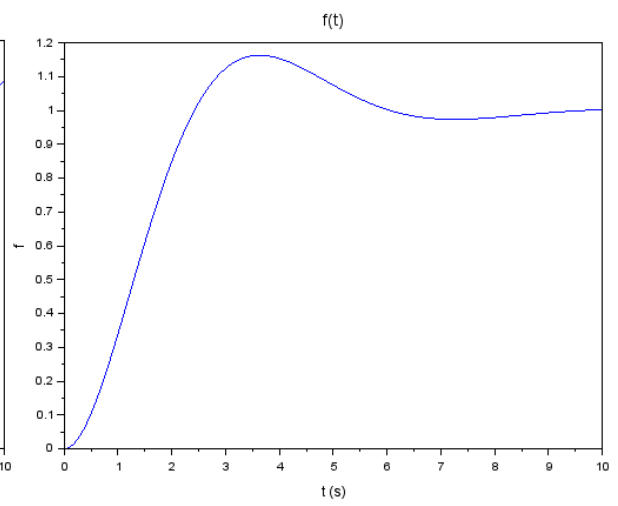
1



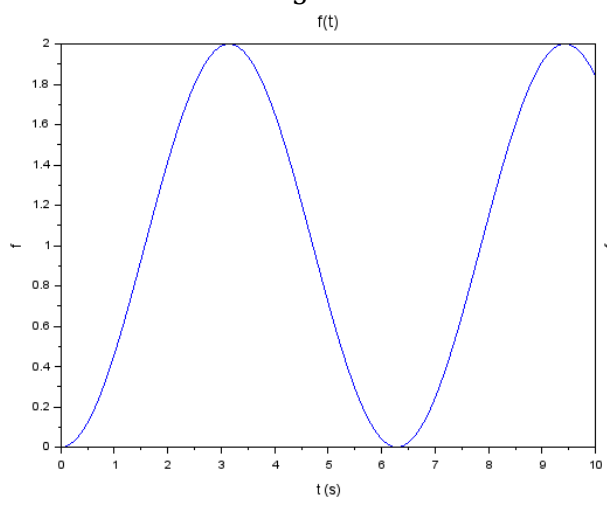
2



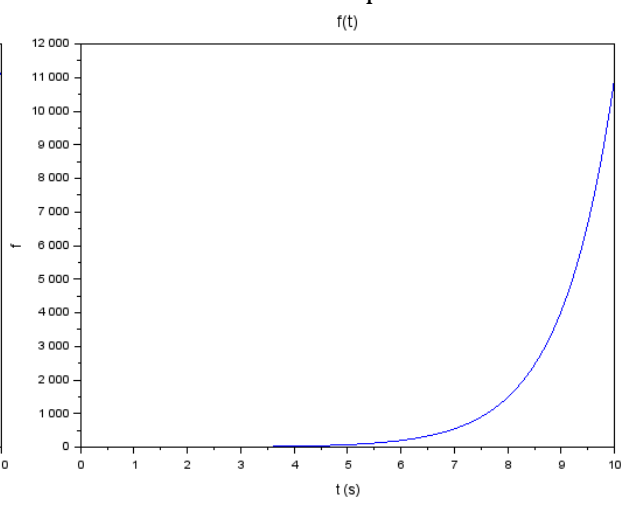
3



4



5



6

Exercice 4 – Diagramme de Bode

Tracer grossièrement le diagramme de Bode des fonctions de transfert suivantes :

1- $F(p) = K$ avec K une constante positive

2- $F(p) = \frac{K}{p}$ avec K une constante positive

3- $F(p) = 1 + \tau p$ avec τ une constante

4- $F(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$ avec τ une constante

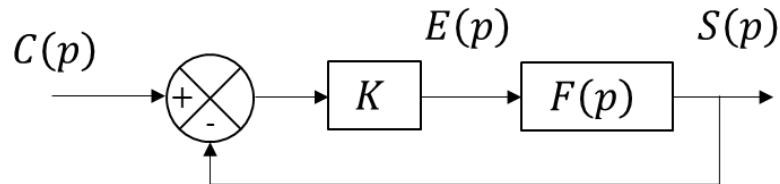
5- $F(p) = \frac{1}{(1 + a\tau p)(1 + b\tau p)}$ avec τ, a, b des constantes telles que $a > b$

6- $F(p) = \frac{1 + b\tau p}{1 + a\tau p}$ avec τ, a, b des constantes telles que $a > b$

Exercice 5 – Lieu des racines (Evans)

On part d'une fonction de transfert $F(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ représentant un système dont l'entrée est $E(p)$ et la sortie $S(p)$.

On souhaite l'asservir en rebouclant grâce à un gain K :



La fonction $C(p)$ représente une consigne que la sortie du système doit suivre.

On a plusieurs fonctions de transfert :

$$F_1(p) = \frac{1}{(1+p)(1+0,1p)}$$

$$F_2(p) = \frac{1}{1+p}$$

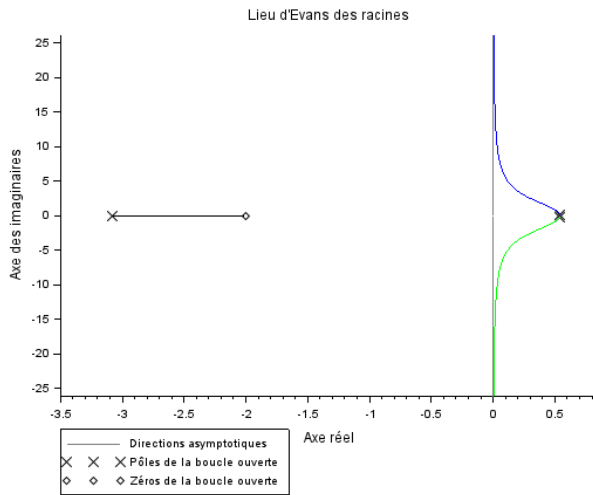
$$F_3(p) = \frac{1+0,1p}{1+p}$$

$$F_4(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

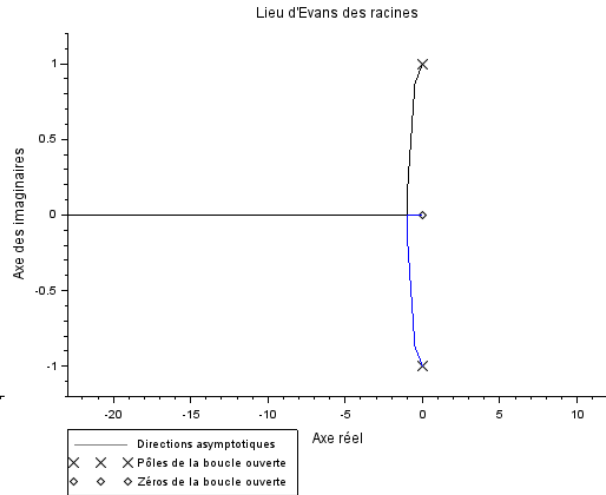
$$F_5(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}$$

$$F_6(p) = \frac{1+0,5p}{p^3+2p^2-3p+1}$$

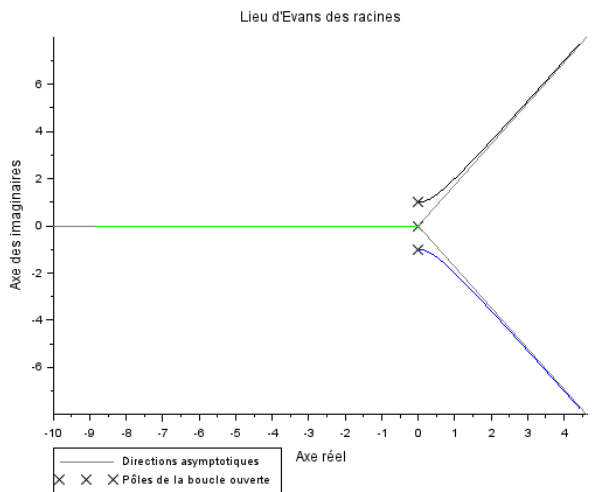
Associer ces fonctions à leur lieu des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée en fonction de la valeur du gain K (de 0 -FTBO- à l'infini) :



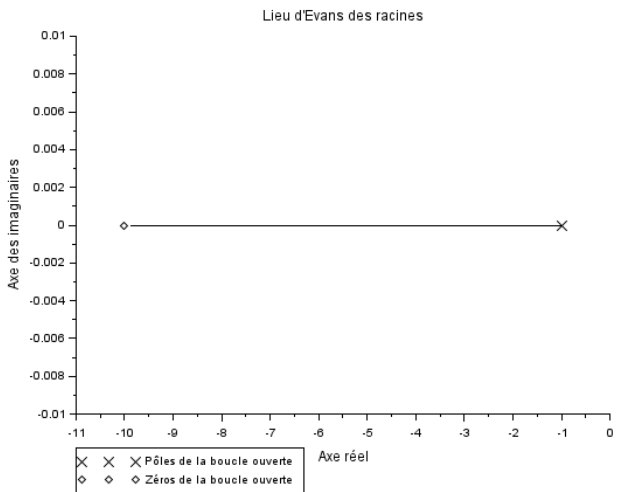
1



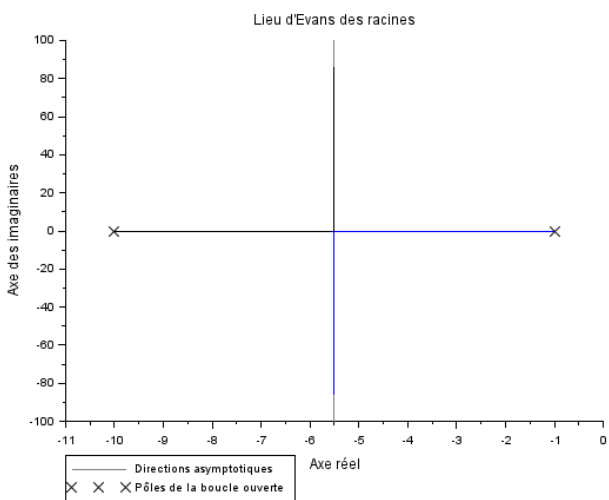
2



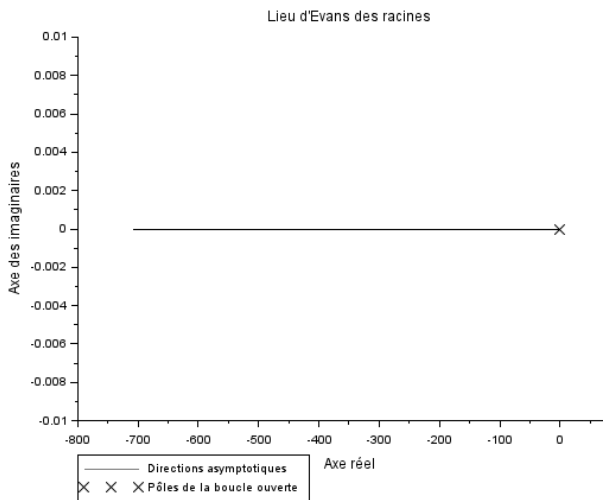
3



4



5



6

Exercice 6 – Modification de la dynamique d'un système

On considère un système représenté par un paramètre d'état x , qui répond à une équation différentielle :

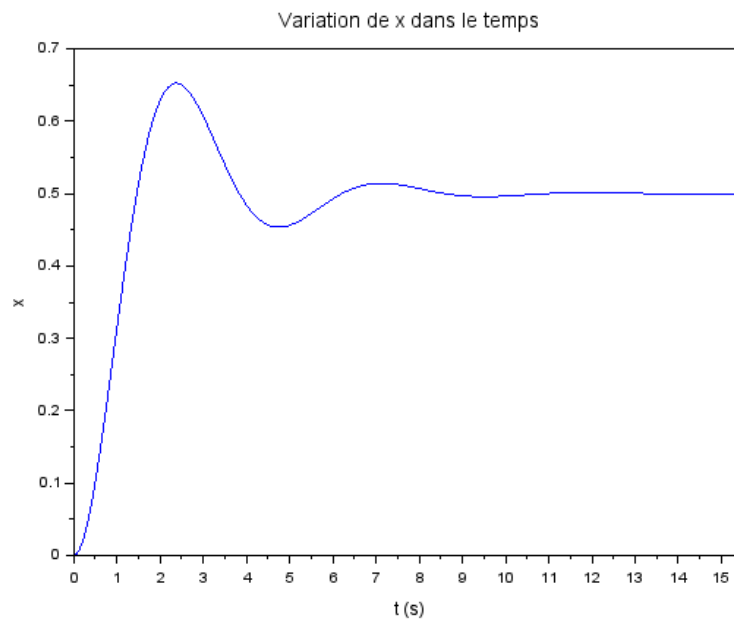
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = f(t)$$

Avec f une fonction représentant l'excitation du système.

On considère les conditions initiales de toutes les fonctions nulles.

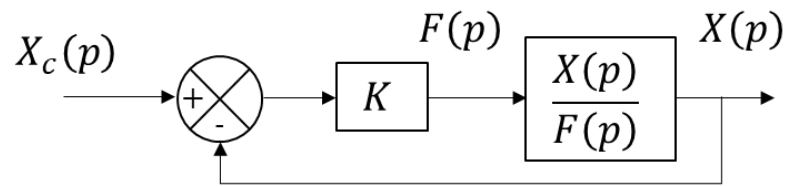
- 1- Montrer que les racines de l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle sont : $r_{\pm} = -0,5 \pm 1,32i$. Le système est-il stable ?
- 2- Déterminer la fonction de transfert $\frac{X(p)}{F(p)}$ sous forme factorisée en fonction de r_+, r_- .

On applique un échelon $f(t) = 1$ en entrée de notre système, et l'on obtient la réponse $x(t)$:



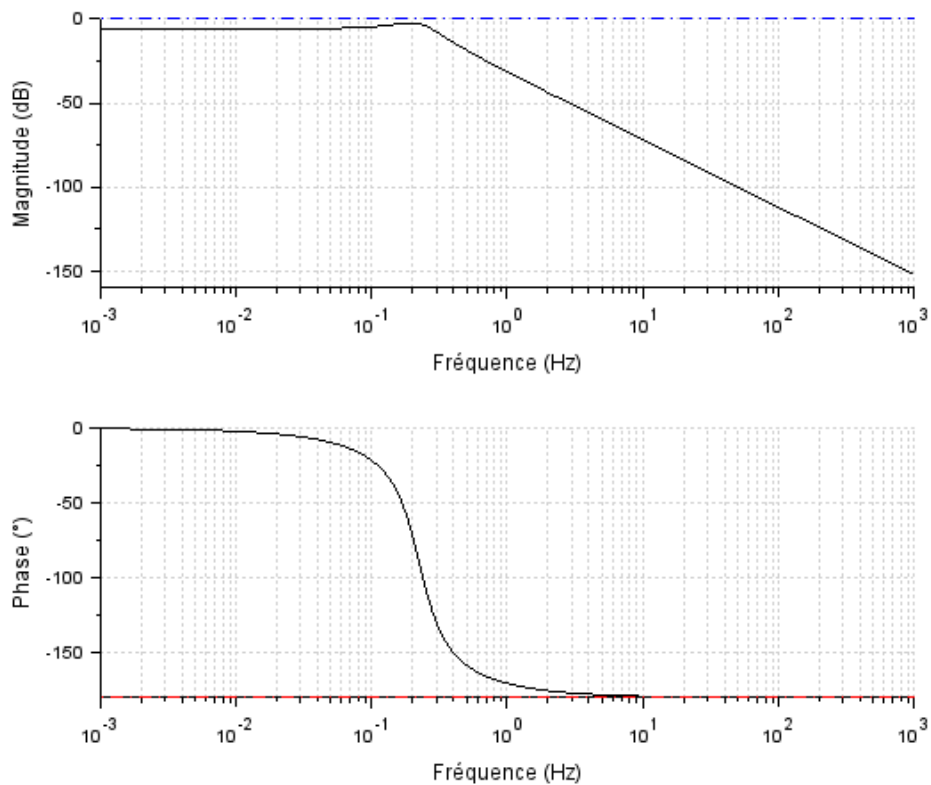
- 3- Déterminer graphiquement la pulsation des oscillations. Remarque ? Déterminer leur amortissement (sans faire de calcul, ni utiliser le graphe ci-dessus).

On décide d'asservir le système sous la forme :



Avec un gain K .

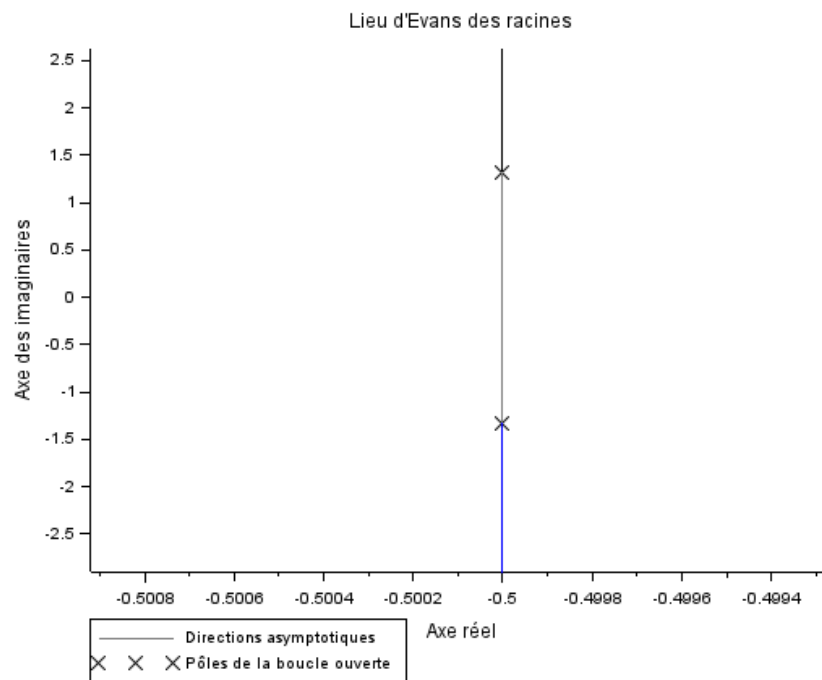
On donne le diagramme de Bode de la fonction de transfert $\frac{X(p)}{F(p)}$:



- 4- Le système sera-t-il stable en boucle fermée ? Pour n'importe quelle valeur de gain K ?
- 5- Décrire brièvement le principe de fonctionnement de ce schéma bloc.
- 6- Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).
- 7- Montrer que l'on a l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) :

$$\frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{K}{(p - r_+)(p - r_-) + K}$$

On trace le lieu des pôles de la FTBF en fonction de la valeur du gain K (de 0 -sans retour et sans le bloc K - à l'infini) :



- 8- Que se passe-t-il si l'on augmente le gain fortement ?
- 9- Quel est l'avantage de ce gain, et par extension, des correcteurs ?

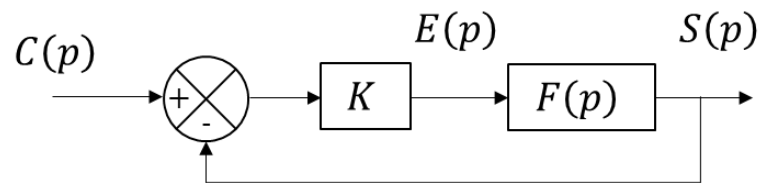
Exercice 7 – Stabilisation d'un système

On considère un système représenté par la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^2 - p + 1}$$

- 1- Déterminer les pôles de la fonction. Le système est-il stable ?

On souhaite asservir le système afin de le stabiliser :

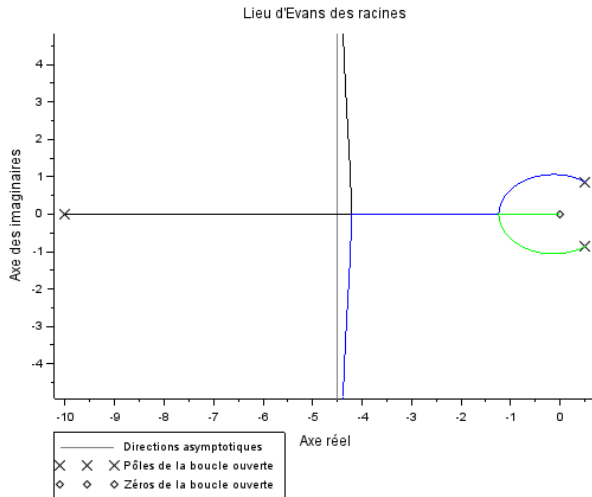


- 2- Est-ce qu'à priori cela peut stabiliser le système ?
- 3- Que faut-il faire pour stabiliser le système ?

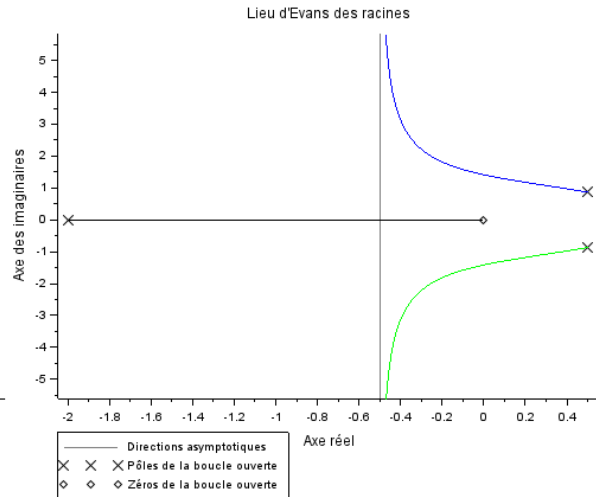
On modifie le correcteur en mettant :

$$K \rightarrow \frac{Kp}{1 + \tau p}$$

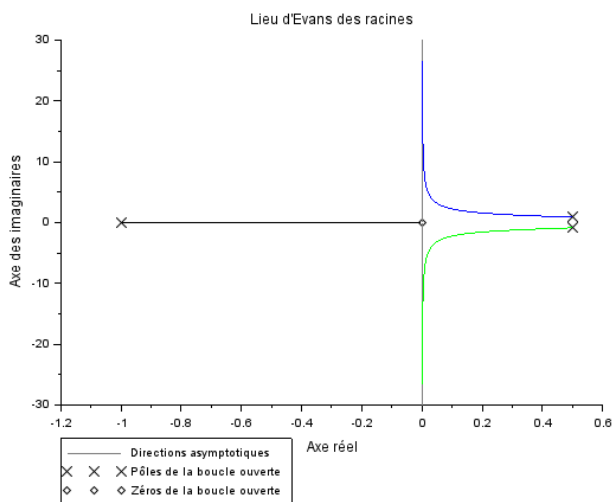
On trace le lieu des racines pour différentes valeurs de τ (0,1 ; 0,5 ; 1 ; 5) :



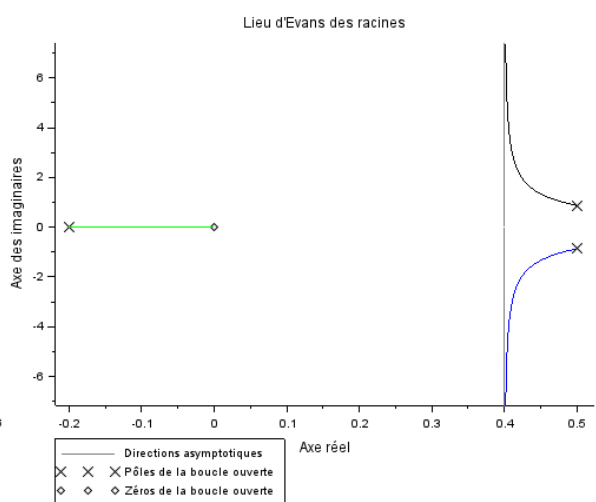
1



2



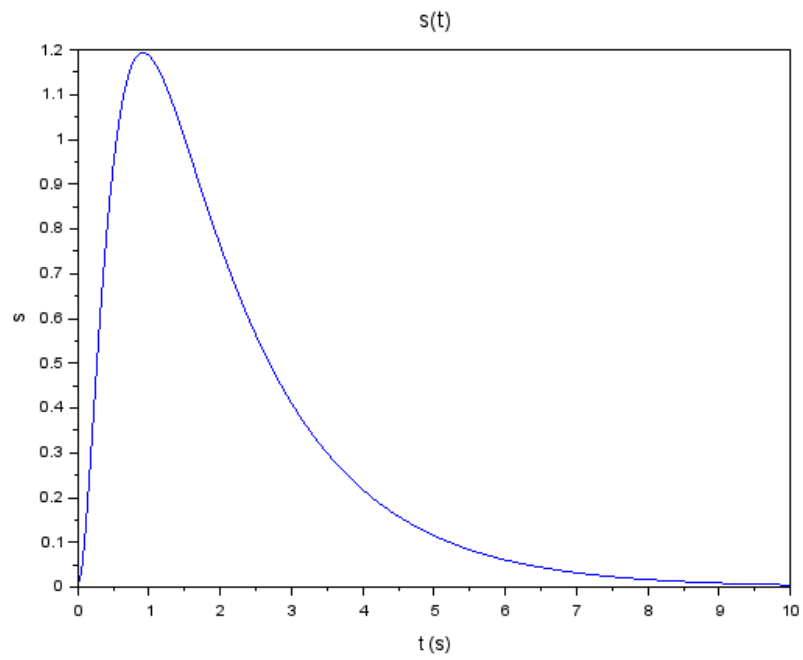
3



4

4- Commentaires ?

- 5- Retrouver le τ choisi en observant la réponse temporelle de notre système soumis à un échelon :

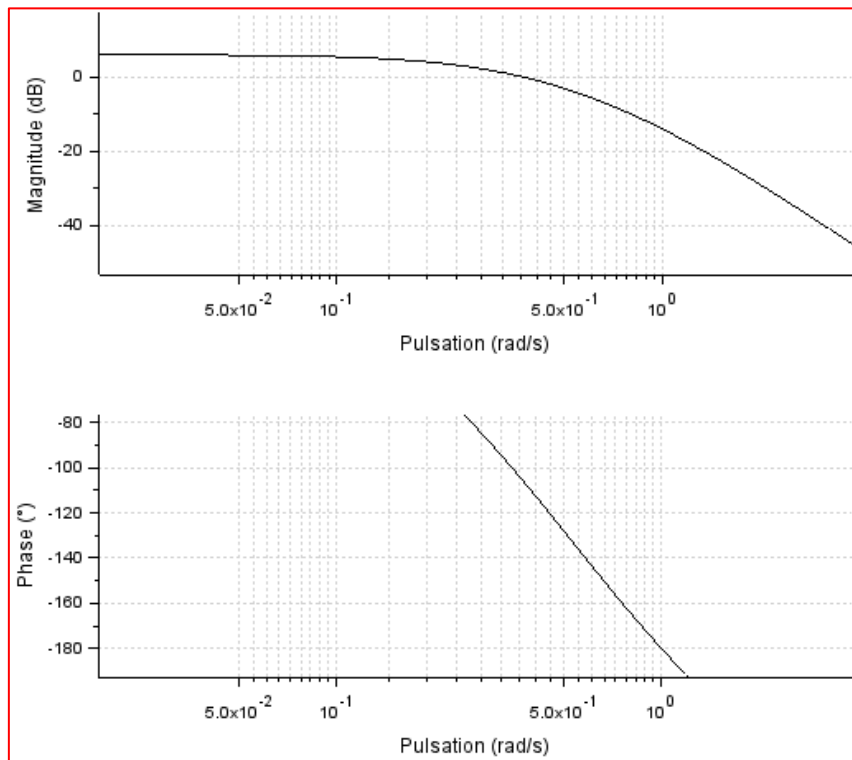
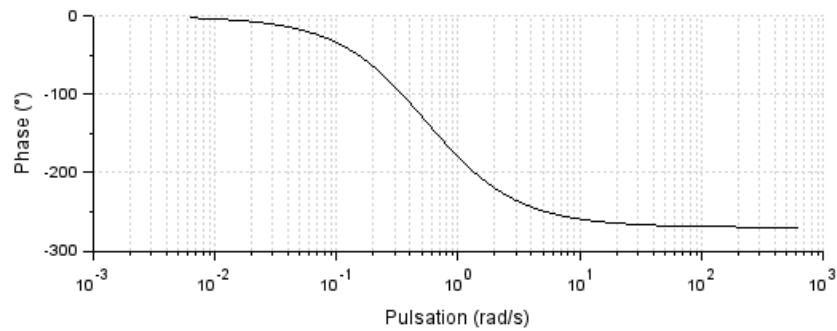
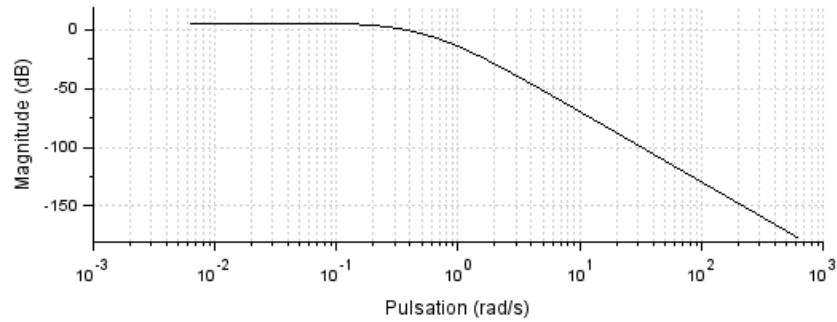


Exercice 8 – Diagramme de Bode et Nyquist (bonus)

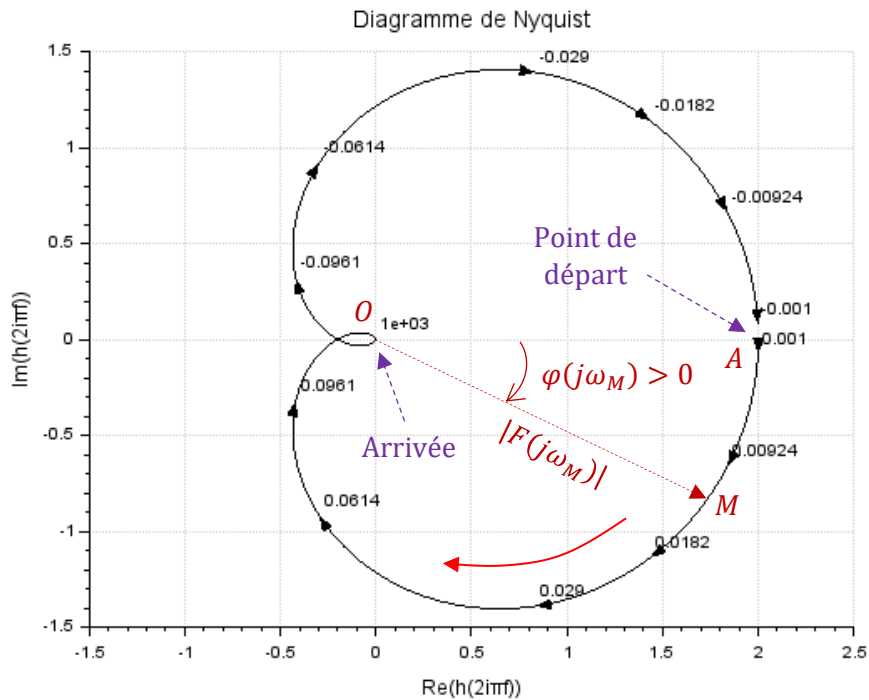
On considère une fonction de transfert de la forme :

$$F(p) = \frac{2}{(1+p)(1+2p)(1+3p)}$$

Dont on trace les diagrammes de Bode et de Nyquist :



Zoom du diagramme.



Pour information :

Le diagramme de Nyquist est équivalent au diagramme de Bode. Lorsque l'on part de la pulsation 0 rad.s^{-1} (les pulsations sont les nombres notés tout le long du contour), on se situe au point A de coordonnées (2 ; 0) qui correspond bien à la limite de gain donnée par le diagramme de Bode $G_{dB} = 20\log(|F(p)|) = 6 \rightarrow |F(p)| = 10^{\frac{6}{20}} = 2$ et $\varphi_0 = 0^\circ$.

Ensuite plus la pulsation augmente, plus la phase diminue (on note bien sur le diagramme de Nyquist le départ du contour vers le bas) et le gain (fonction de la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$) reste à peu près constant au départ.

Aux hautes pulsations (sur le graphe il est marqué $1e + 03$), le gain diminue donc le point M se rapproche de l'origine et la phase atteint 270° (la tangente du contour lorsqu'il atteint l'origine O vient bien de la partie supérieure de l'axe des imaginaires purs).

En plus du contour pour les pulsations positives, on a également le symétrique par rapport à l'axe des abscisses, pour les pulsations négatives.

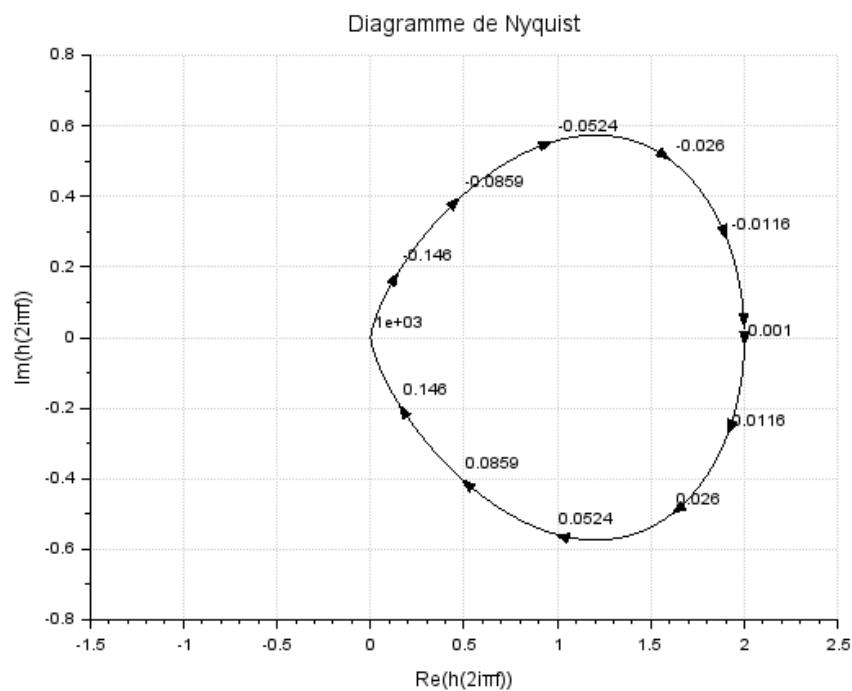
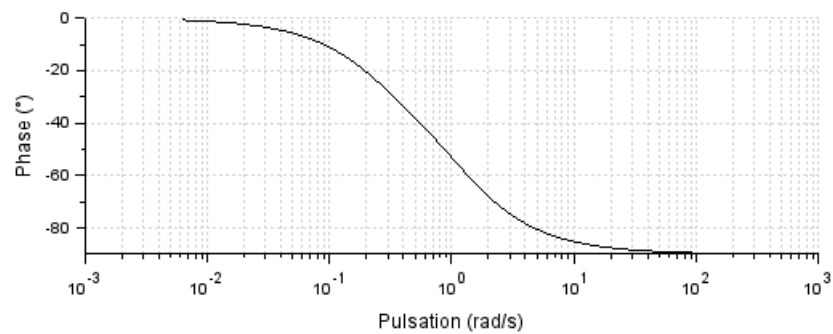
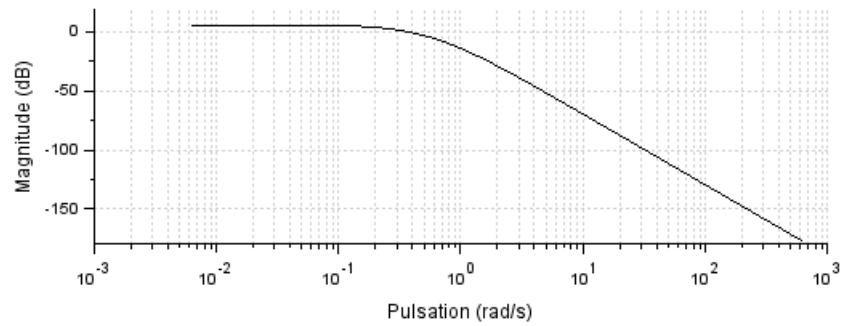
- 1- La fonction a-t-elle des pôles à partie réelle positive ?
- 2- Retrouver les marges de gain et de phase sur les deux graphes.

On trace désormais le diagramme de la fonction :

$$F(p) = \frac{2}{(1+p)(1-2p)(1+3p)}$$

3- La fonction a-t-elle des pôles à partie réelle positive ?

On a les diagrammes de Bode et de Nyquist :



4- Que se passe-t-il par rapport au cas précédent ?

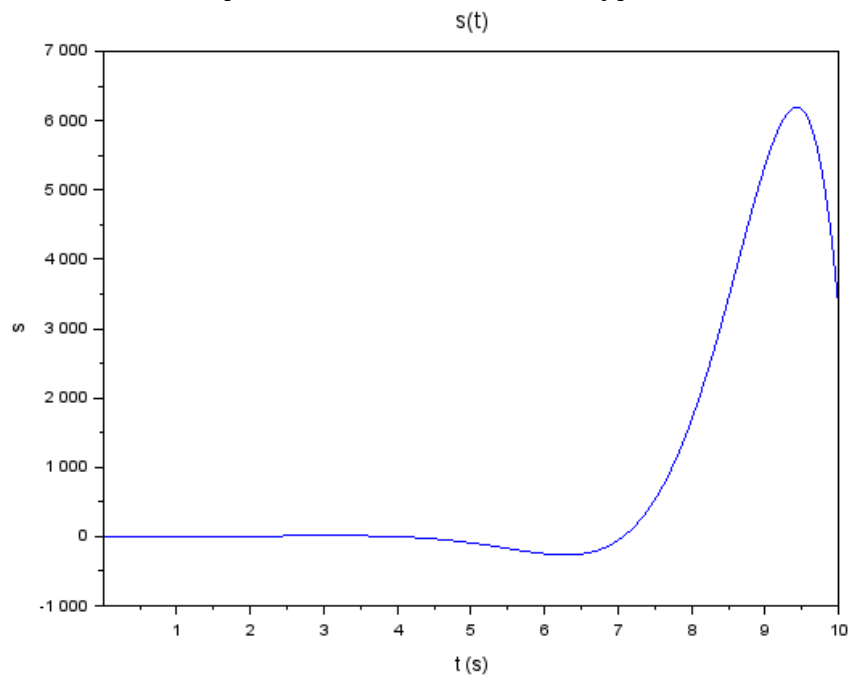
Exercice 9 – Conditions de stabilité (Bode, Evans, Nyquist)

On part de la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^2 - 2p + 2}$$

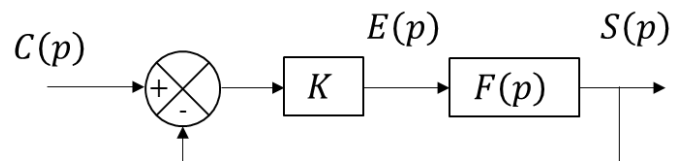
1- Déterminer les pôles de la fonction.

On trace l'évolution dans le temps suite à une sollicitation de type échelon en entrée :



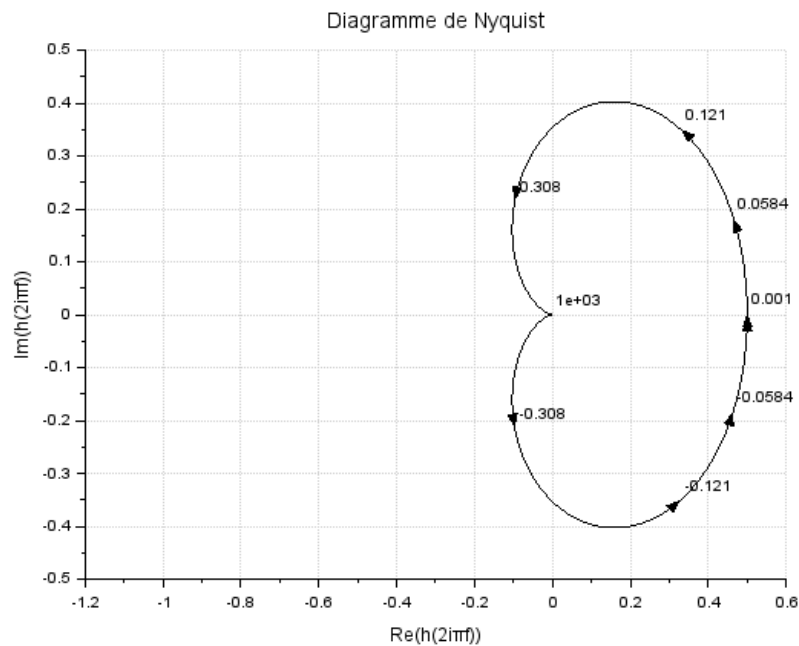
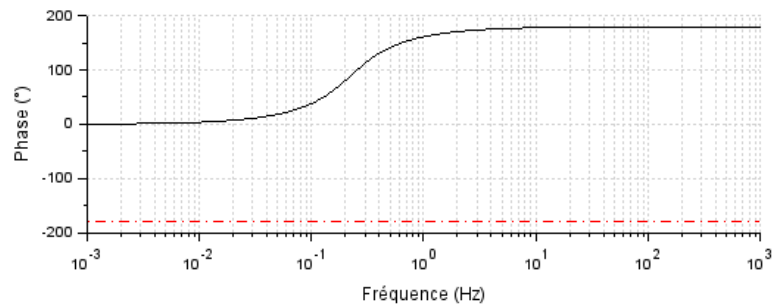
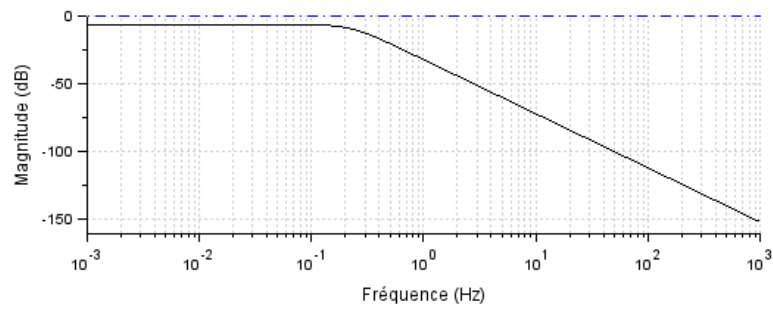
2- Retrouver grossièrement la valeur des pôles graphiquement.

Nous allons chercher à savoir si la fonction de transfert en boucle fermée est stable :



Où la fonction $C(p)$ représente une consigne que la sortie doit suivre.

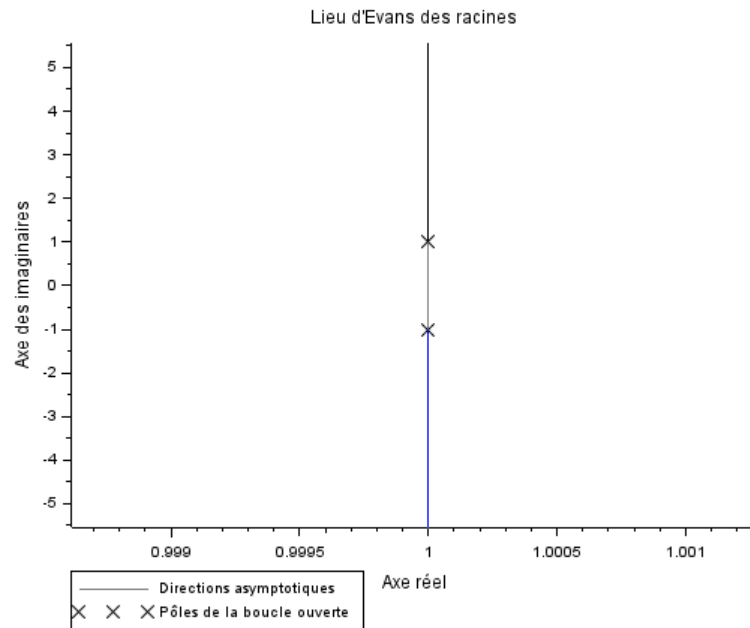
On trace les diagrammes de la FTBO (on prend $K = 1$) :



Lorsque l'on parcourt le contour de Nyquist en partant de $\omega = 0 \text{ rad. s}^{-1}$ (c'est-à-dire le point de coordonnées (0,5 ; 0)) on note que cela correspond bien au diagramme de Bode :

- Aux pulsations faibles $G_{dB} = 20\log(|F(p)|) = -6\text{dB}$ et $\varphi_0 = 0^\circ \rightarrow \text{Re} = 10^{-\frac{6}{20}} = 0,5$ et $\text{Im} = 0$.
- Aux pulsations fortes $G_{dB} \rightarrow -\infty$ donc $\text{Re} \rightarrow 0$ et $\varphi_0 \rightarrow 180^\circ$ donc tangente horizontale.

En parcourant le sens des pulsations négatives on a le symétrique de ce contour par rapport à l'axe des abscisses.



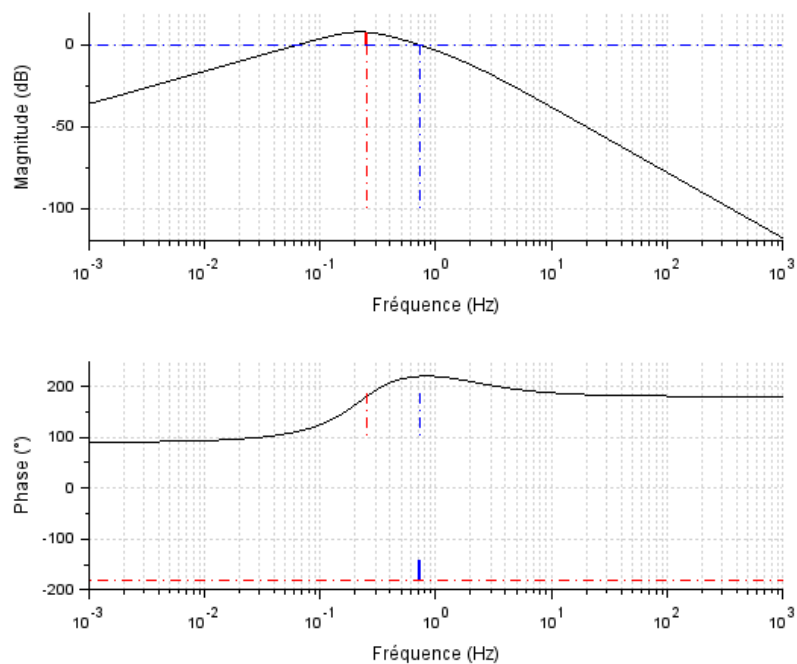
3- Quelles informations peut-on tirer de ces graphes ?

On corrige le système en remplaçant notre gain par :

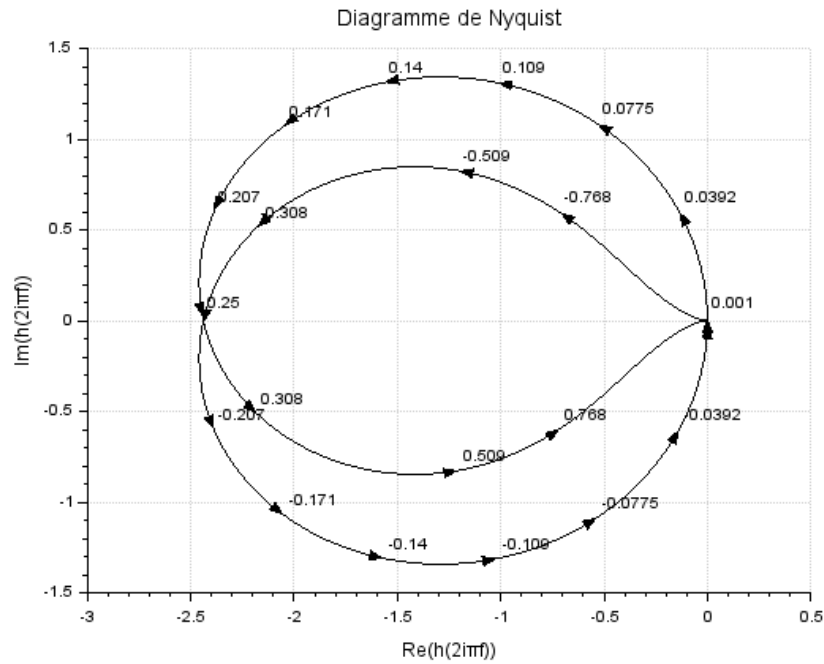
$$K \rightarrow \frac{Kp}{1 + 0,1p}$$

4- Donner les pôles de la FTBO.

On trace les diagrammes de la FTBO (on prend $K = 5$ pour Bode et Nyquist) :

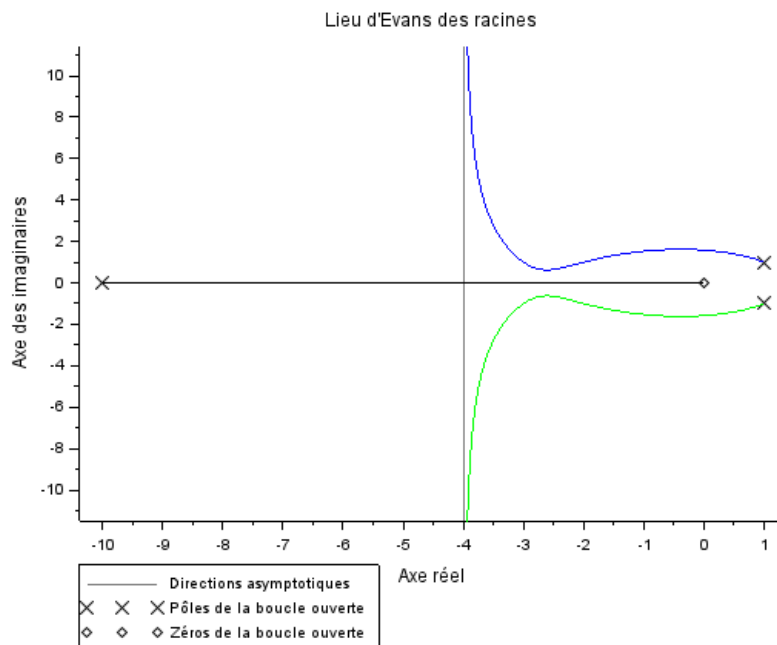


La marge de gain a été calculée à $-7,74$ dB et la marge de phase 40° .



En parcourant le contour en partant de $\omega = 0 \text{ rad.s}^{-1}$ (c'est-à-dire le point de coordonnées $(0 ; 0)$) on retrouve le diagramme de Bode :

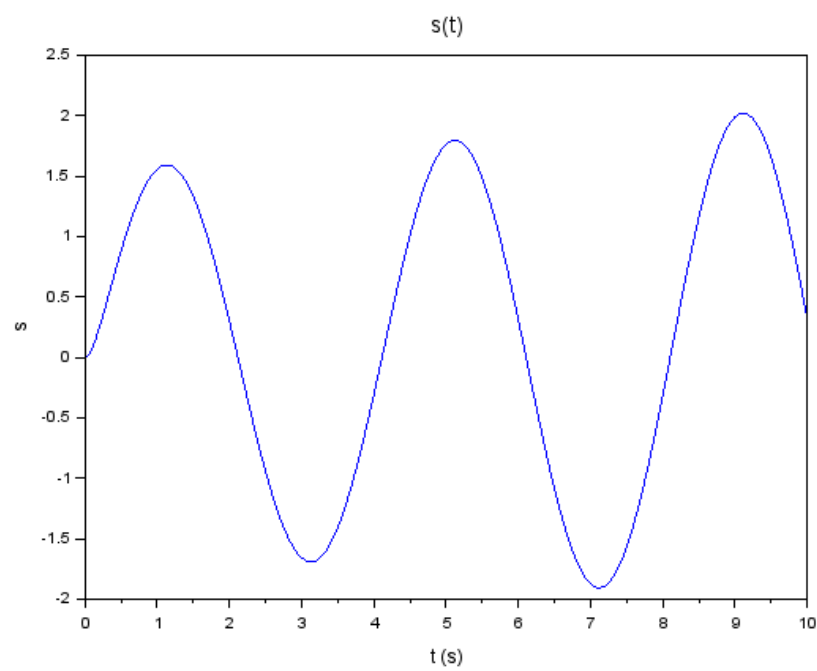
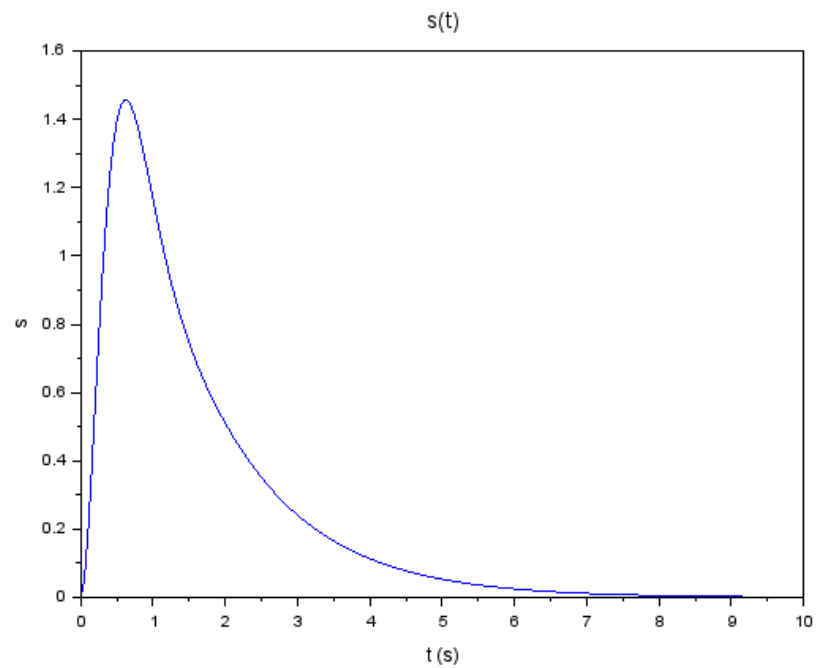
- Aux pulsations faibles $G_{dB} \rightarrow 0$ et $\varphi_0 = 90^\circ$ donc $Re \rightarrow 0$ et tangente verticale.
- Aux pulsations fortes $G_{dB} \rightarrow 0$ et $\varphi_0 = 180^\circ$ donc $Re \rightarrow 0$ et tangente horizontale.



K varie ici de 0 à l'infini.

5- Quelles informations peut-on tirer de ces graphes ?

On donne la réponse à un échelon de notre système dans un cas où le gain K vaut 2 et l'autre 5 :

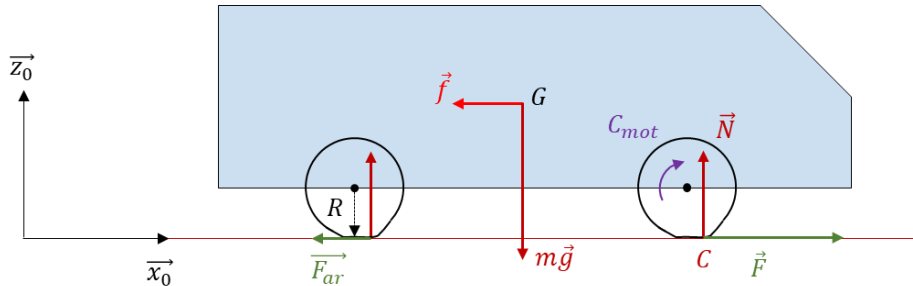


6- Quel graphe correspond au gain 2 ?

Exercice concret

Exercice – Système de capture et maintien de la vitesse d'une voiture

On s'intéresse à une voiture de masse m , de type traction, et roulant en ligne droite sur une route :

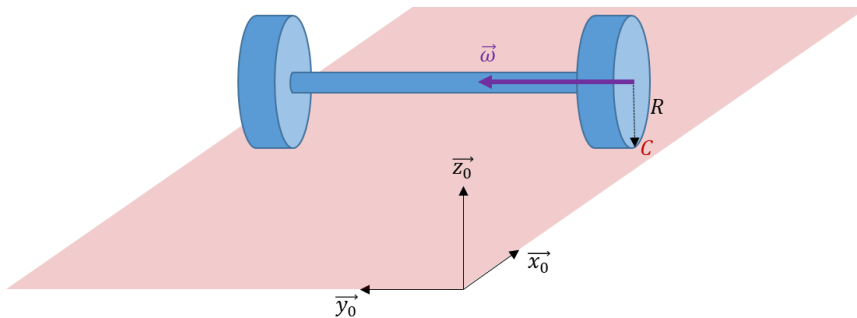


Le couple moteur C_{mot} (donc la force de traction $\vec{F} = F\vec{x}_0$) ne s'applique que sur les roues avant. Les pneus se déformant sur la route, la réaction du sol n'est pas appliquée en un point (C) situé sous le centre des roues mais légèrement en avant, laissant apparaître un moment dû à $\vec{N} = N\vec{y}_0$ par rapport au centre des roues qui tend à ralentir leur rotation (= frottement de roulement).

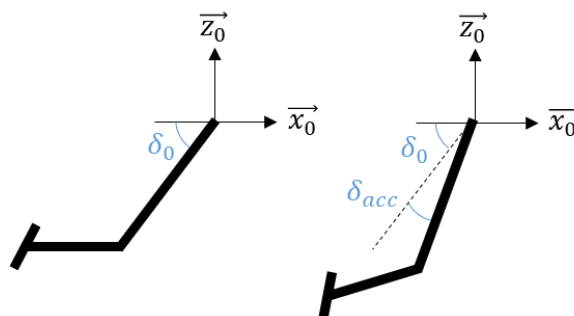
Pour des raisons de simplifications on omettra ce qu'il se passe sur l'essieu arrière.

On considère l'essieu avant comme un arbre tournant autour d'un axe fixe $\vec{y}_0$, d'inertie I_{essieu} selon ce même axe, soumis à un couple moteur $C_{mot} > 0$ et de frottement (pris constant) $C_{frott} > 0$.

La vitesse de rotation de l'arbre est notée ω , le rayon d'une roue est noté R et la vitesse de la voiture V . On considérera toujours que $V = R\omega$.



Le couple moteur C_{mot} dépend de la position de l'accélérateur que l'on prend ici sous la forme d'un angle δ_{acc} par rapport à l'angle de référence δ_0 (pédale relâchée) :



Le couple transmis à l'arbre permet de mettre en rotation les roues avant de la voiture, qui vont exercer une force $\vec{F}_{R/S}$ sur le sol. Par principe d'action-réaction, le sol exerce la force opposée sur les roues, ce qui fait avancer l'arbre et donc la voiture, c'est la force de traction $\vec{F}$:

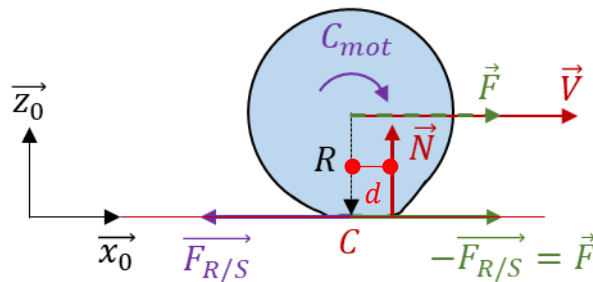


Schéma simplifié des phénomènes entre le pneu et la route.

Pendant les phases d'accélération/décélération, et avec la vitesse, le pneu se déforme. Donc le frottement de roulement (moment par rapport au centre de la roue généré par N) varie. On simplifiera notre étude en considérant que ce moment est constant.

- 1- Appliquer le Théorème du Moment Cinétique à l'essieu, et donner l'expression du couple moteur pour stabiliser la rotation de l'arbre :

Si maintenant on ajoute l'effet de la voiture, il faut considérer sa trainée :

$$\vec{f} = f\vec{x}_0 = -\frac{1}{2}\rho SV^2 C_x \vec{x}_0$$

Avec :

- ρ la masse volumique de l'air
- S la surface frontale à l'écoulement de la voiture
- C_x le coefficient de trainée de la voiture, qui dépend principalement de sa forme

- 2- Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la voiture par rapport au référentiel Galiléen lié à la route, et donner l'expression de la traction pour stabiliser la vitesse de la voiture.
- 3- Montrer que l'expression du couple moteur $C_{mot}(V)$ nécessaire pour stabiliser une vitesse d'avancement V est alors :

$$C_{mot}(V) = \frac{1}{2}\rho SV^2 C_x R + Nd - C_{frott}$$

On va supposer que la vitesse est contenue dans une plage de valeurs centrée sur V_0 , telle que l'on peut linéariser la trainée de la voiture comme suit :

$$f = f_0 + \Delta f = -\frac{1}{2}\rho SV_0^2 C_x - K_V \Delta V$$

Où l'on a écrit : $\Delta V = V - V_0$.

On va s'intéresser à un système de capture et maintien de vitesse de la voiture.

Pour cela on considère un état initial pour lequel :

- la voiture avance à la vitesse V_0 (les roues tournent à ω_0 telle que $V_0 = R\omega_0$)
- la position de la pédale de l'accélérateur est $\delta_{acc\ 0}$ (rad)
- la traction est F_0
- la trainée de la voiture est f_0

Puis le conducteur choisit un écart de vitesse ΔV . Le système doit donc modifier la position de l'accélérateur (donc de la force de traction ΔF) pour capturer et maintenir la nouvelle vitesse $V_0 + \Delta V$.

On propose la fonction de transfert :

$$\frac{\Delta C_{mot}(p)}{\Delta \delta_{acc}(p)} = \frac{K_C}{1 + \tau_C p}$$

4- Qu'est-ce que cela représente physiquement ? Donner l'unité du gain K_C .

5- Montrer que la relation du PFD linéarisée est :

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = \Delta F - K_V \Delta V$$

6- Montrer que la relation du TMC linéarisée est :

$$I_{essieu} \frac{d\Delta \omega}{dt} = \Delta C_{mot} - \Delta F R$$

7- En utilisant les deux relations du PFD et TMC linéarisées, montrer que l'on a la fonction de transfert :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta C_{mot}(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Avec :

$$K = \frac{1}{K_V R}$$

$$\tau = \frac{1}{K_V} \left(\frac{I_{essieu}}{R^2} + m \right)$$

8- Vérifier l'unité du gain K et de la constante de temps τ de cette fonction de transfert.

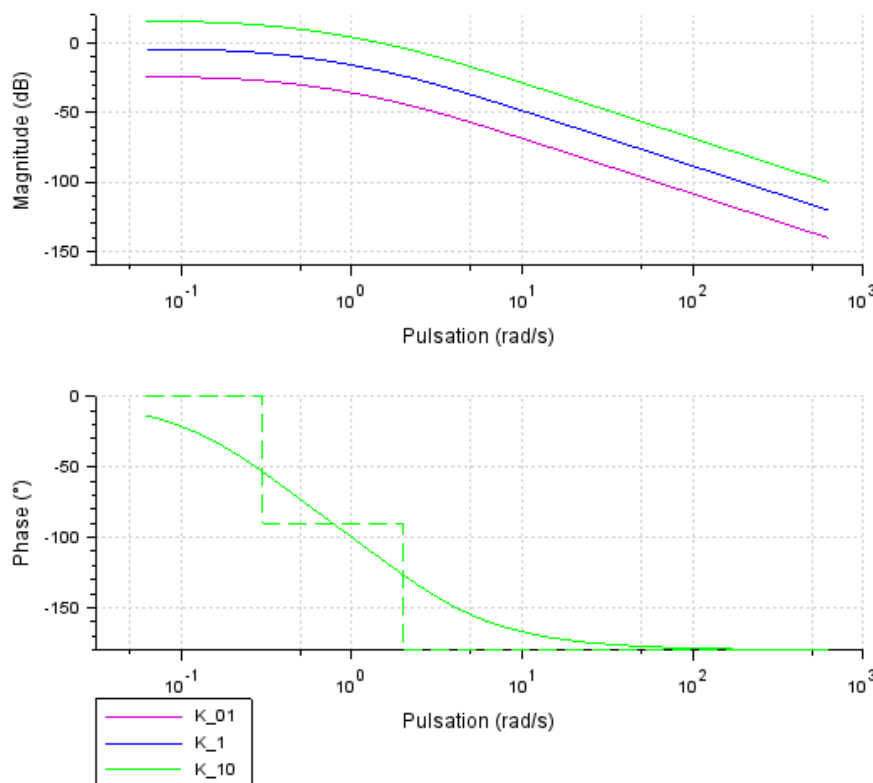
9- Etudier les cas limites sur l'inertie de l'essieu I_{essieu} et la trainée de la voiture.

10- Dessiner le schéma bloc à retour unitaire représentant notre système de capture de la vitesse, avec pour entrée $\Delta V_c(p)$ la variation de vitesse commandée par rapport à la vitesse initiale V_0 , et sortie la variation de vitesse réelle de la voiture : $\Delta V(p)$.

Note : on introduira un gain K_δ ($rad.ms^{-1}$) qui fait le lien entre écart de vitesse $\Delta V_c - \Delta V$ et position de pédale δ_{acc} .

Pour notre exemple, on a calculé $K = 0,042$ et $\tau = 3,306$, et pris $K_C = 15$ et $\tau_C = 0,5$.

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) donne :



Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de K_δ (0,1 ; 1 ; 10).

11- Comment va réagir la voiture à des ordres basses fréquences/hautes fréquences ?

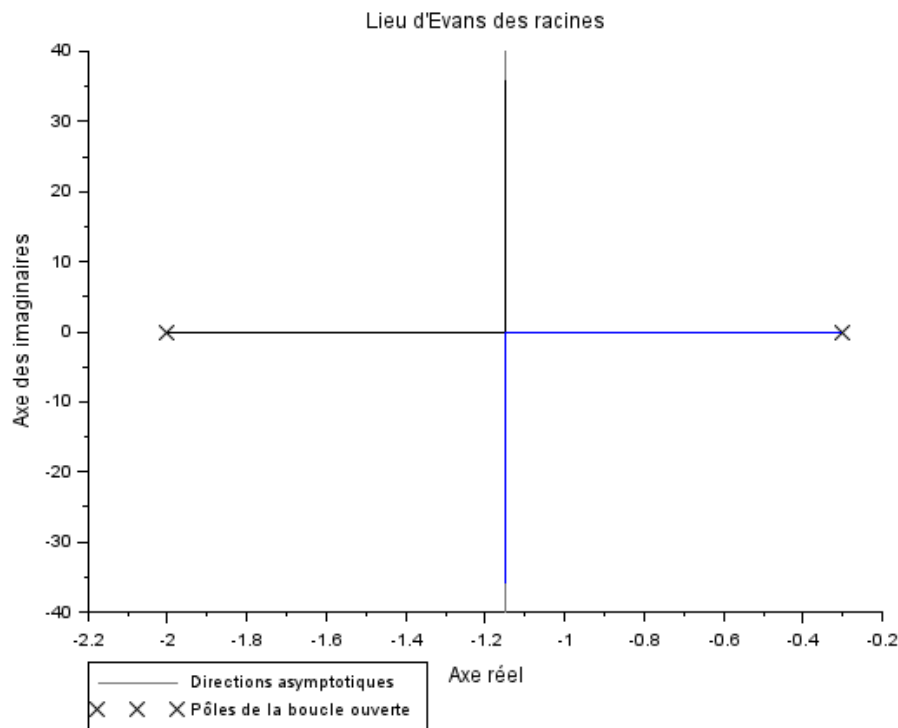
12- Déterminer les pôles de la FTBO.

13- Est-ce que la voiture sera stable en boucle fermée ?

14- Montrer que l'on a l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{K_\delta K_C K}{(1 + \tau_C p)(1 + \tau p) + K_\delta K_C K}$$

On trace le lieu des racines du dénominateur (pôles) de la FTBF, pour un gain K_δ partant de 0 (FTBO) à l'infini :



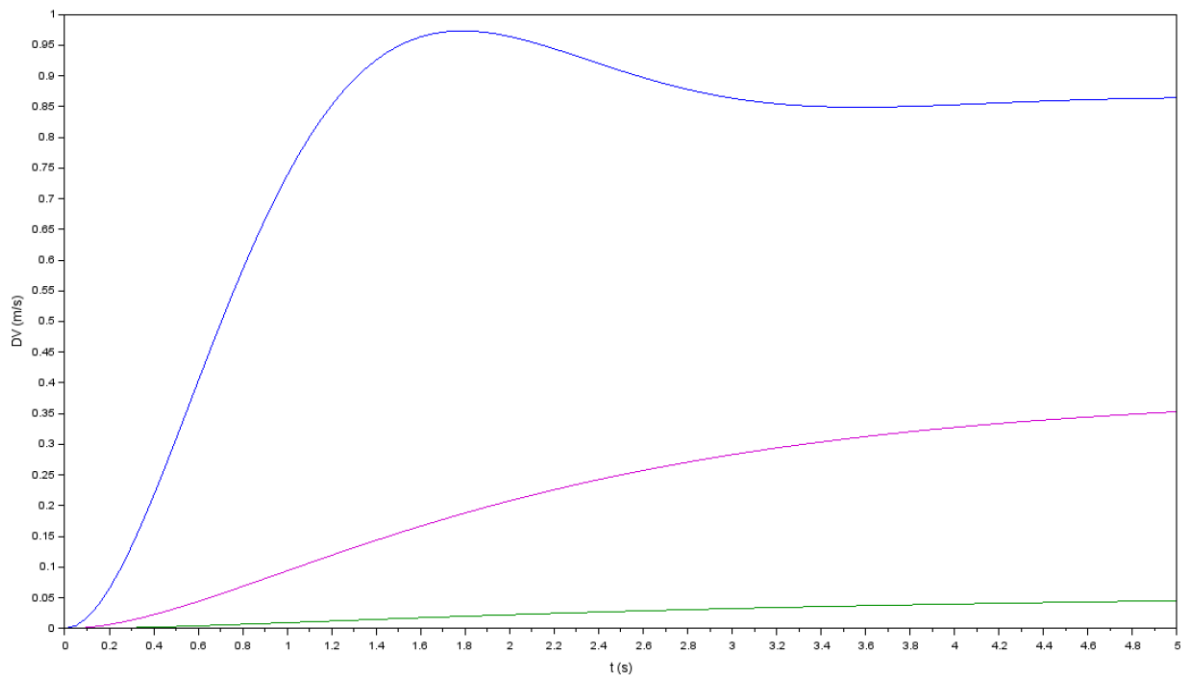
15- Est-ce que cela confirme la réponse donnée précédemment ? Que se passe-t-il lorsque le gain K_δ augmente ?

16- Montrer que l'expression de la valeur finale d'écart de vitesse ΔV_f suite à un échelon de vitesse commandé d'amplitude ΔV_{c0} est :

$$\Delta V_f = \Delta V_{c0} \frac{K_\delta K_C K}{1 + K_\delta K_C K}$$

17- Vérifier la cohérence de cette expression en étudiant les cas limites sur le gain K_δ .

On a les différentes courbes présentant l'évolution de l'écart de vitesse ΔV pour différentes valeurs de K_δ (0,1 ; 1 et 10) suite à un échelon en entrée d'amplitude $\Delta V_{c0} = 1 \text{ m.s}^{-1}$:



Données :

Les racines du dénominateur/pôles de la FTBF (directement tirées du lieu d'Evans tracé précédemment) sont :

- Pour $K_\delta = 0,1$: $-1,98$; $-0,33$
- Pour $K_\delta = 1$: $-1,73$; $-0,57$
- Pour $K_\delta = 10$: $-1,15 \pm 1,76i$

18- Quelle(s) information(s) peut-on tirer de ces courbes ?

On suppose que la voiture et le moteur sont faits de telle manière que K_c et K ne peuvent être modifiés.

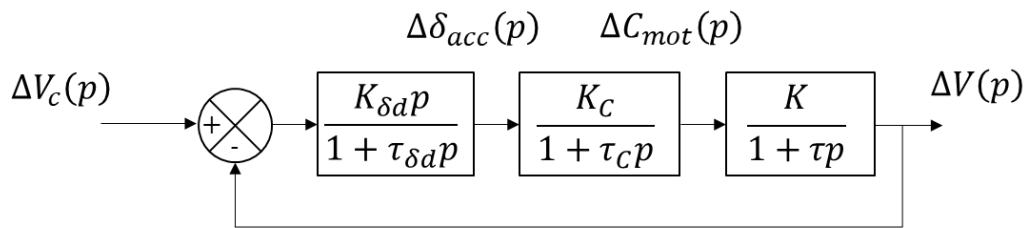
On souhaite que, pour une entrée en échelon d'amplitude 1 m/s , le système stabilise la vitesse de la voiture :

- A $\pm 2 \%$ de la valeur consigne en moins de 3 s ,
- Sans dépassement de plus de 10% de la valeur consigne

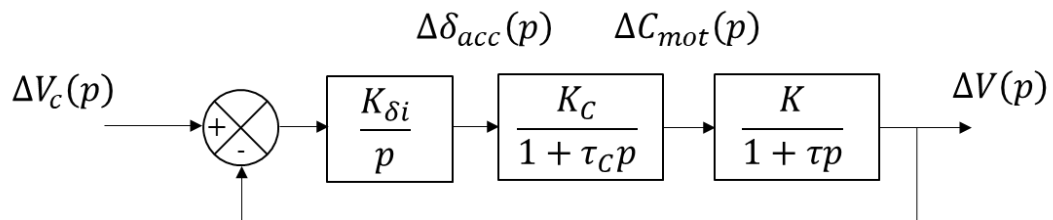
19- Est-ce qu'une valeur de gain seul permet d'obtenir un résultat satisfaisant par rapport aux critères imposés ?

On propose plusieurs types de correcteur :

Correcteur 1 (dérivé)



Correcteur 2 (intégral)



La FTBO est donc, pour le premier cas :

$$K_{\delta d} \frac{K_C K p}{(1 + \tau_{\delta d} p)(1 + \tau_C p)(1 + \tau p)}$$

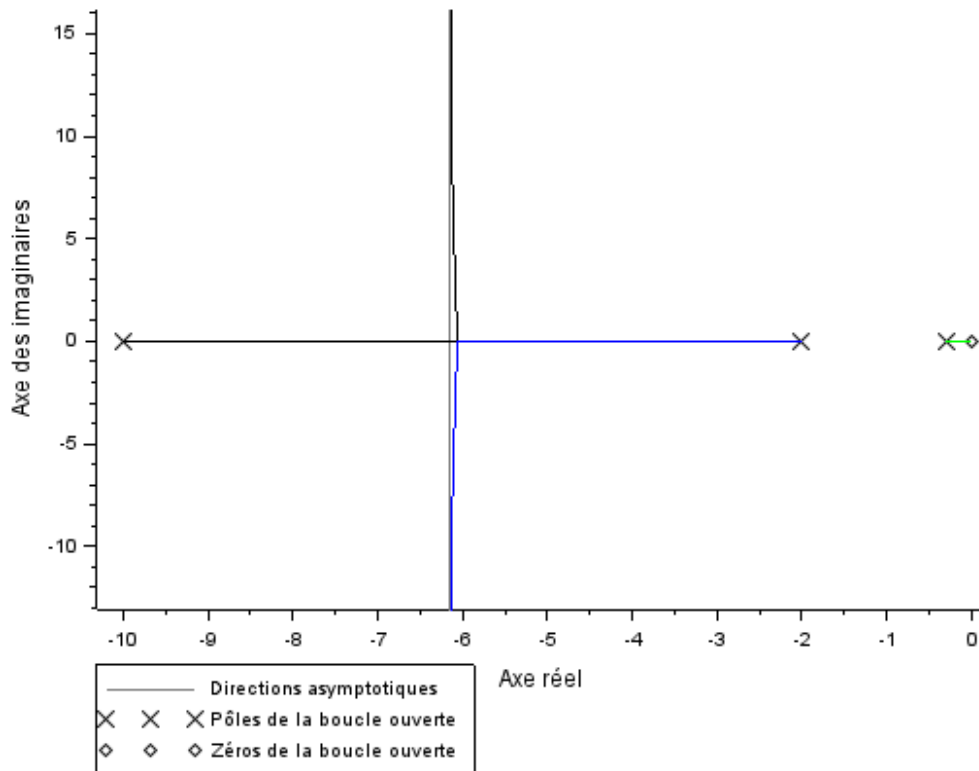
Et pour le second cas :

$$K_{\delta i} \frac{K_C K}{p(1 + \tau_C p)(1 + \tau p)}$$

On trace le lieu des racines pour des gains $K_{\delta d}, K_{\delta i}$ allant de 0 (FTBO) à l'infini :

Correcteur 1 ($\tau_{\delta d} = 0,1 \text{ s}$) :

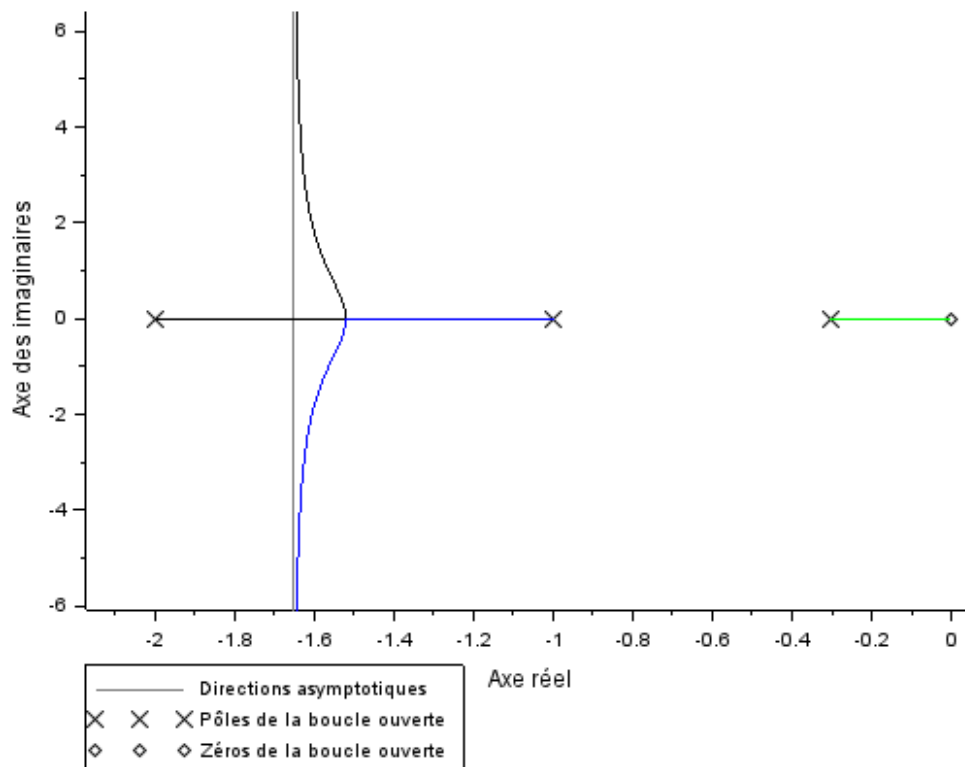
Lieu d'Evans des racines



Les pôles tendent vers les zéros (racines du numérateur) de la FTBO. Ici on a juste 0.

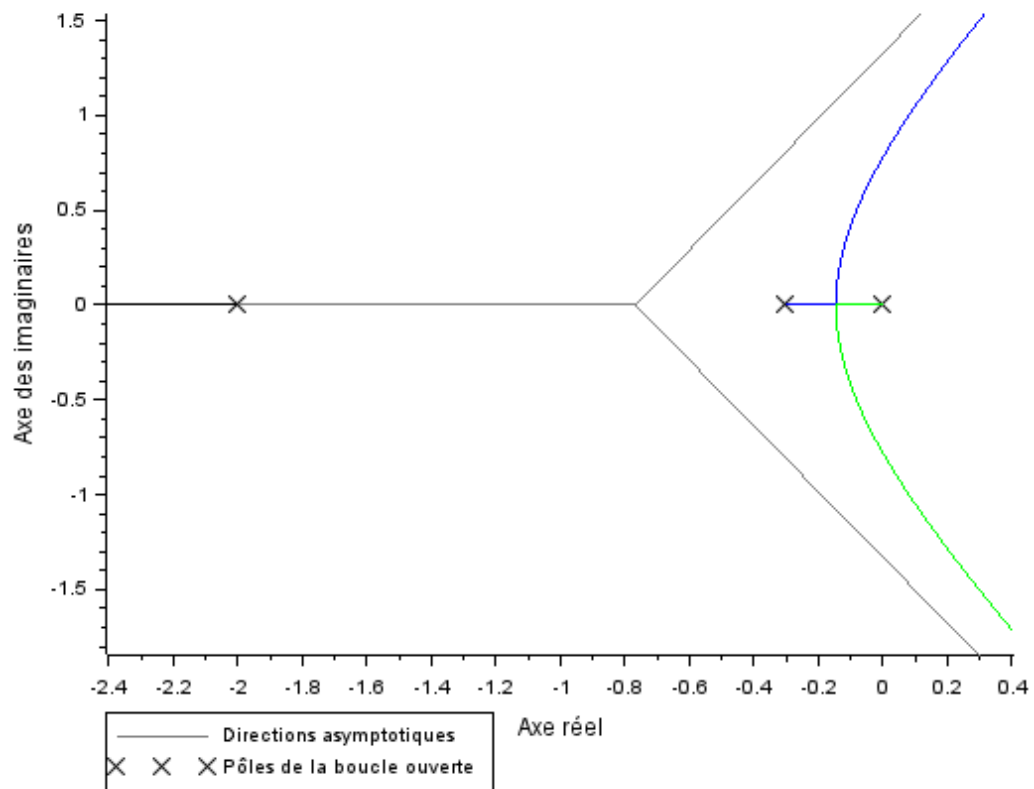
Correcteur 1 ($\tau_{\delta d} = 1 \text{ s}$) :

Lieu d'Evans des racines



Correcteur 2 :

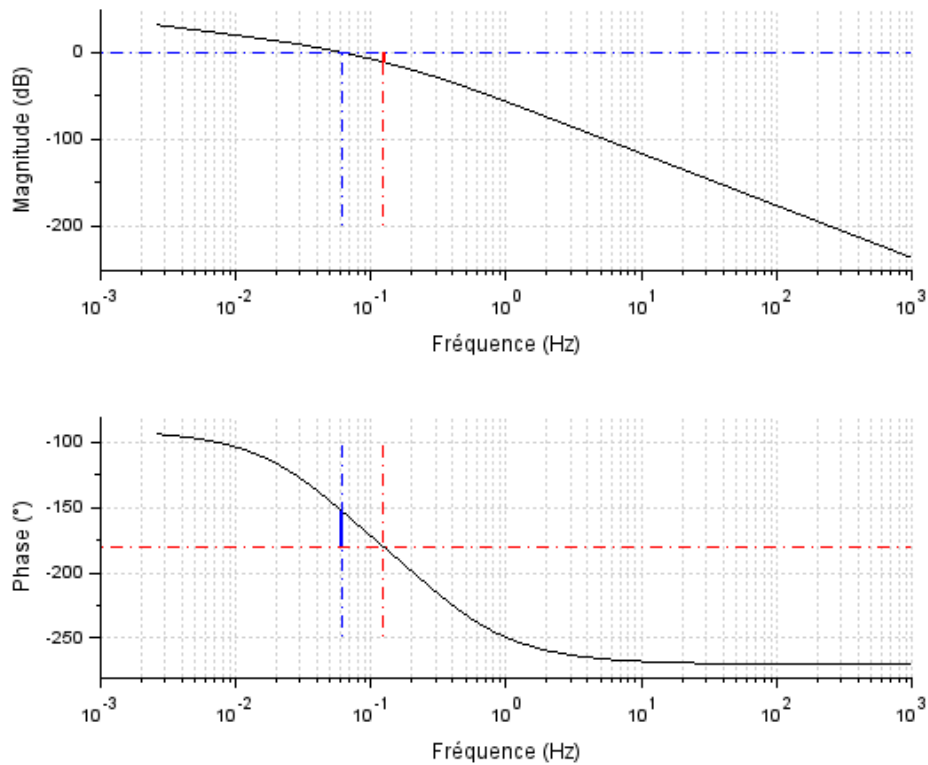
Lieu d'Evans des racines



Dans ce second cas il n'y a pas de zéro, donc les pôles n'atteignent jamais de valeurs finies.

20- Quelle(s) information(s) peut-on déjà tirer de ces graphes ?

On trace le diagramme de Bode de la FTBO avec correcteur intégral $K_{\delta i} = 1$:



On donne la marge de gain : 11,26 dB.

21- Donner la valeur de $K_{\delta i}$ à partir de laquelle le système devient instable en boucle fermée.

22- Montrer que les fonctions de transfert en boucle fermée sont :

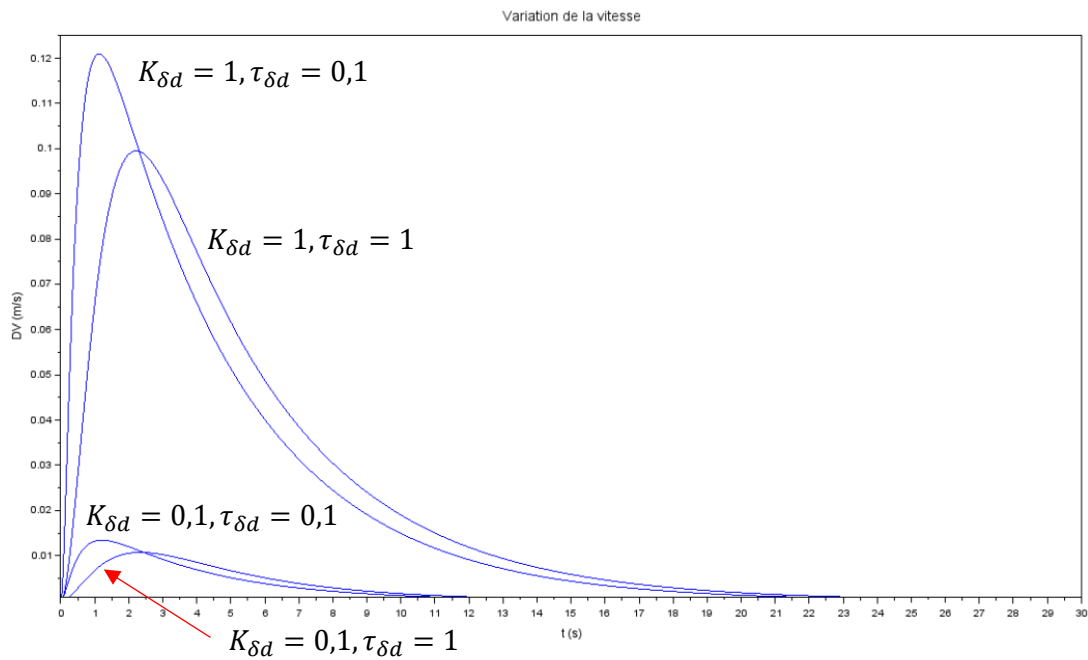
$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{K_{\delta d} K_c K p}{(1 + \tau_{\delta d} p)(1 + \tau_c p)(1 + \tau p) + K_{\delta d} K_c K p}$$

Et :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{K_{\delta i} K_c K}{p(1 + \tau_c p)(1 + \tau p) + K_{\delta i} K_c K}$$

23- Donner l'expression de la valeur finale pour un échelon d'amplitude ΔV_{c0} dans les deux cas.

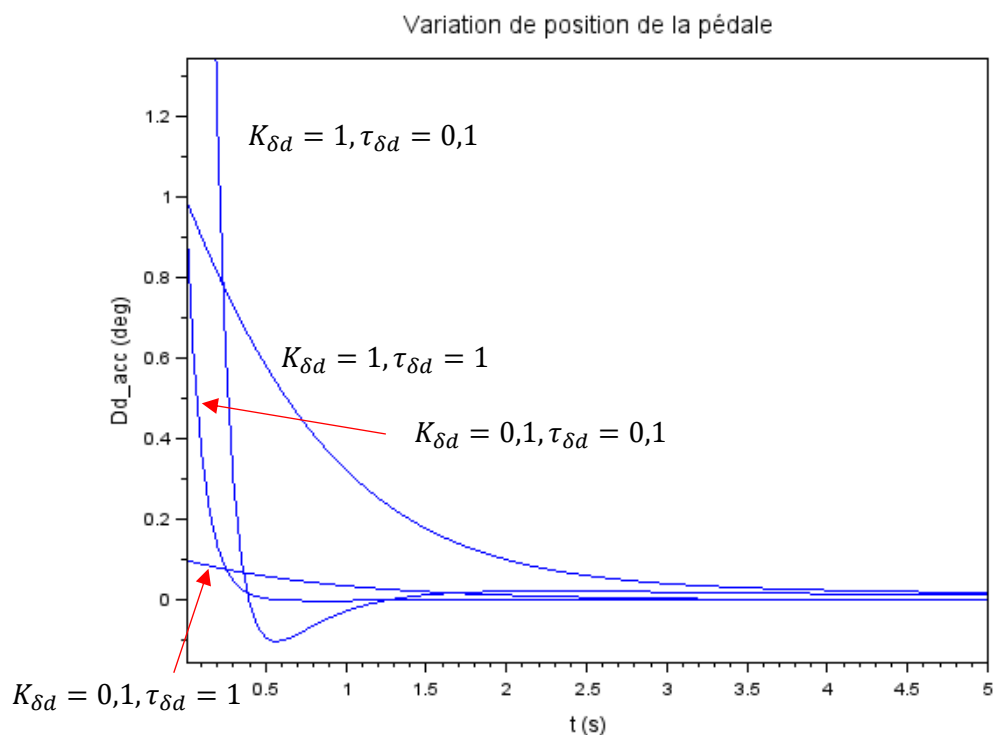
On a les réponses suivantes avec différentes valeurs de $K_{\delta d}$, $\tau_{\delta d}$ et $K_{\delta i}$ (on a calculé $K = 0,042$ et $\tau = 3,306$ et pris $K_C = 15$ et $\tau_C = 0,5$) suite à un échelon en entrée d'amplitude $\Delta V_{c0} = 1 \text{ m. s}^{-1}$:

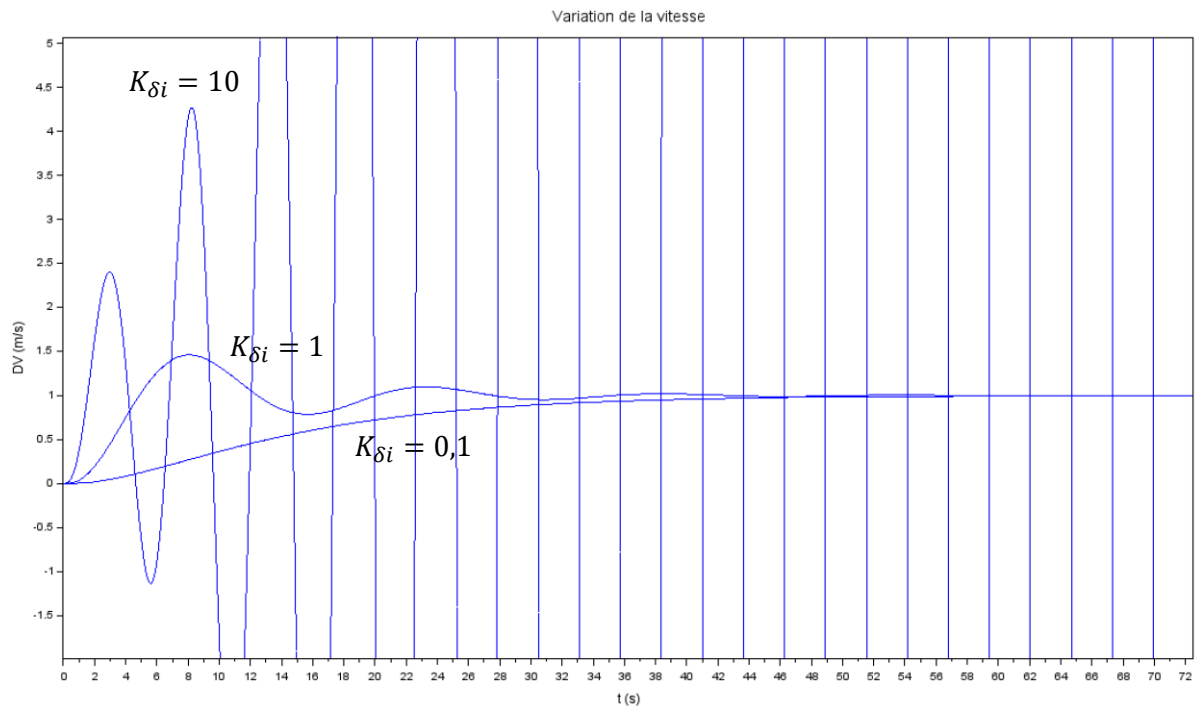


Données :

Les racines du dénominateur/pôles de la FTBF sont :

- Pour $K_{\delta d} = 0,1, \tau_{\delta d} = 0,1$: $-0,3$; $-2,1$; -10
- Pour $K_{\delta d} = 0,1, \tau_{\delta d} = 1$: $-0,3$; $-1,1$; -2
- Pour $K_{\delta d} = 1, \tau_{\delta d} = 0,1$: $-0,2$; $-2,6$; $-9,5$
- Pour $K_{\delta d} = 1, \tau_{\delta d} = 1$: $-0,2$; $-1,5 \pm 0,5i$





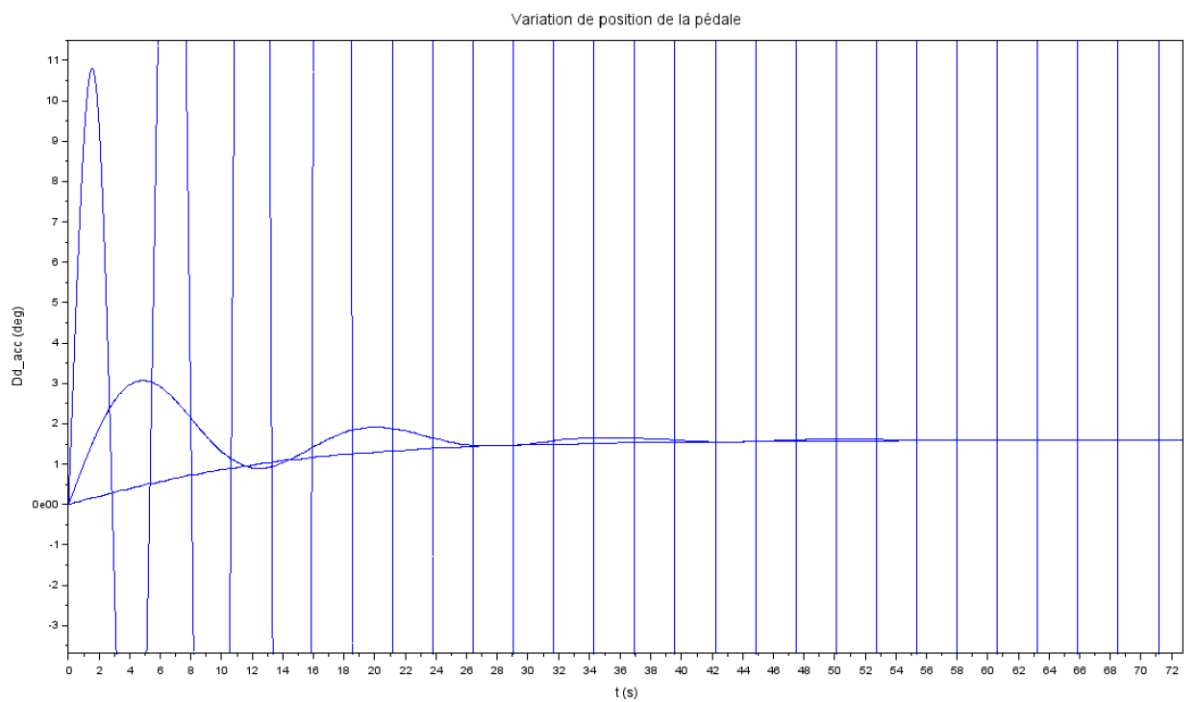
Données :

Les racines du dénominateur/pôles de la FTBF sont :

-Pour $K_{\delta i} = 0,1$: -2 ; $-0,19$; $-0,1$

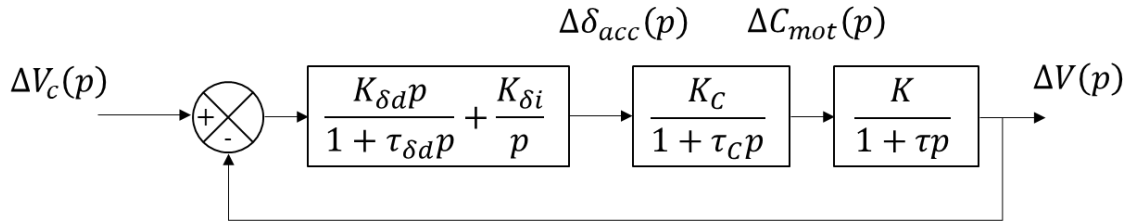
-Pour $K_{\delta i} = 1$: $-2,1$; $-0,1 \pm 0,4i$

-Pour $K_{\delta i} = 10$: $-2,6$; $0,16 \pm 1,2i$



24- Expliquer l'effet de chacun des correcteurs.

Suite à ces conclusions, on souhaite pouvoir bénéficier des avantages des deux types de correction en réalisant le schéma suivant :



On a la FTBO qui s'écrit :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \left(\frac{K_{\delta d} p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{K_{\delta i}}{p} \right) \frac{K_C}{1 + \tau_C p} \frac{K}{1 + \tau p}$$

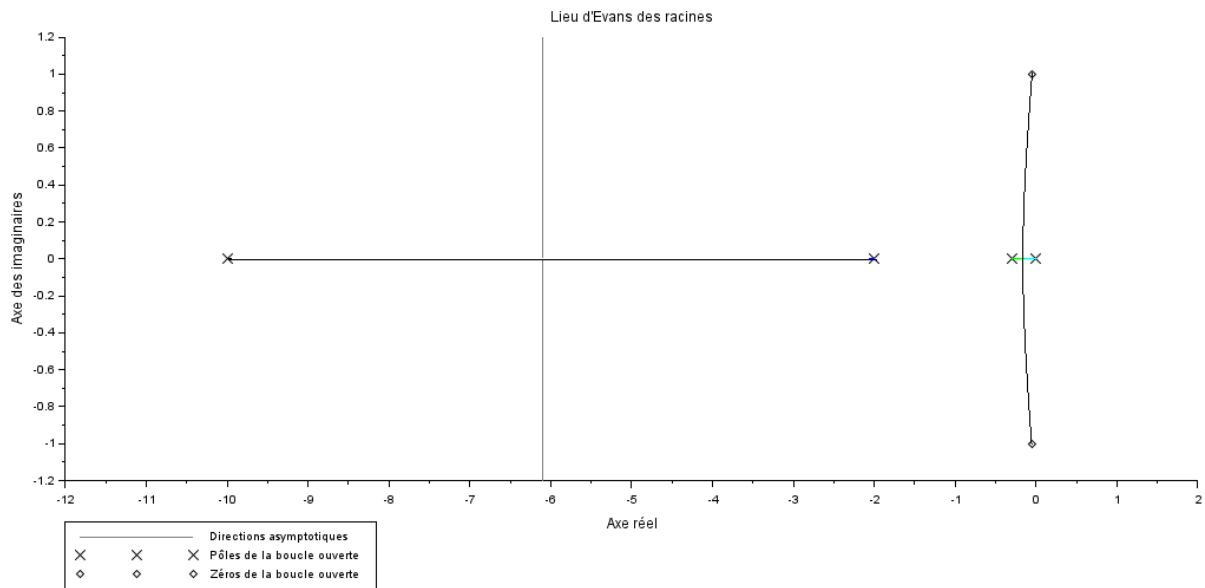
Avec dans un premier temps $K_{\delta d} = K_{\delta i} = K_{\delta di}$.

Donc on a :

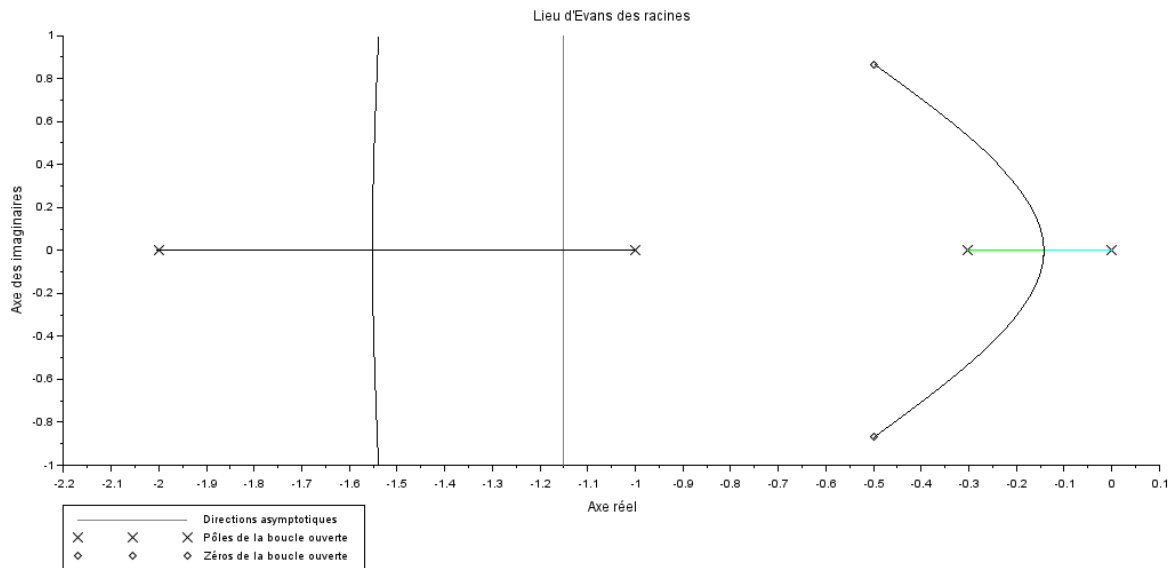
$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} &= K_{\delta di} \left(\frac{p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{1}{p} \right) \frac{K_C}{1 + \tau_C p} \frac{K}{1 + \tau p} \\ &= K_{\delta di} \left(\frac{p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{1}{p} \right) \frac{K_C}{1 + \tau_C p} \frac{K}{1 + \tau p} \\ &= K_{\delta di} \frac{p^2 + \tau_{\delta d} p + 1}{p(1 + \tau_{\delta d} p)} \frac{K_C}{1 + \tau_C p} \frac{K}{1 + \tau p} \end{aligned}$$

De manière schématique, les lieux des pôles de la FTBF en fonction du gain $K_{\delta di}$ sont :

$$\tau_{\delta d} = 0,1 \text{ s} :$$



$$\tau_{\delta d} = 1 \text{ s} :$$



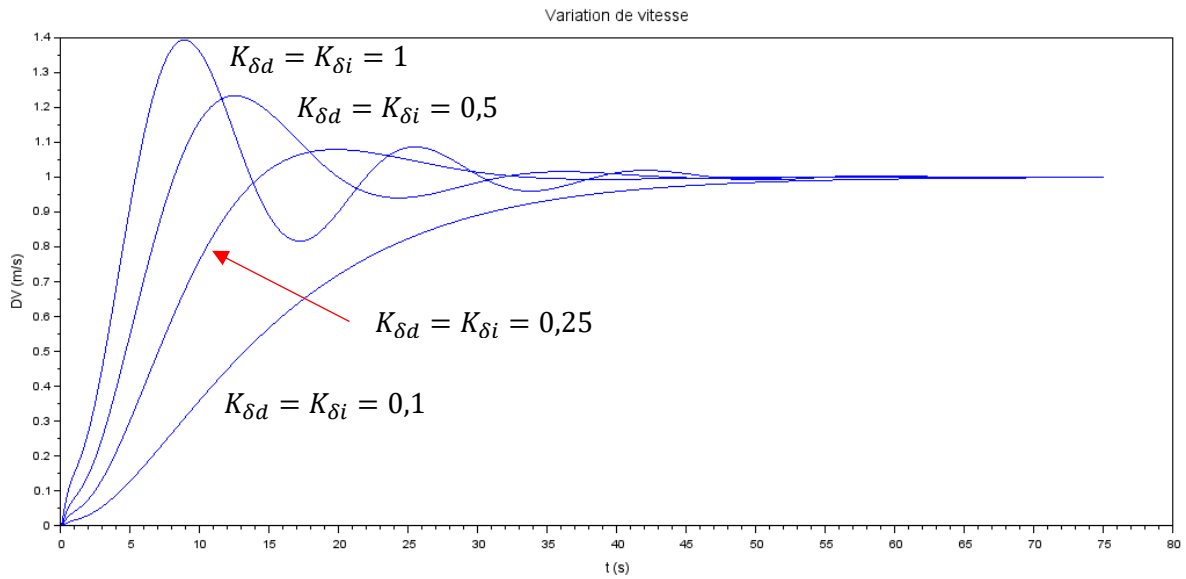
25- A priori, quels sont les avantages/inconvénients de chacune des valeurs de $\tau_{\delta d}$?

26- Montrer que la FTBF s'écrit :

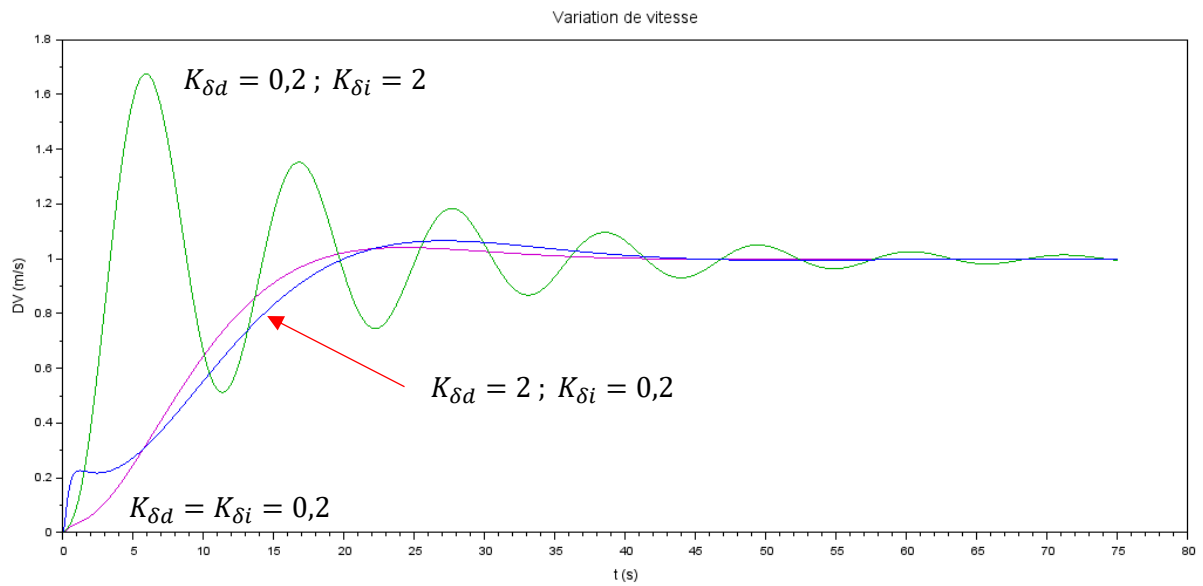
$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \frac{(K_{\delta d} p^2 + K_{\delta i} (1 + \tau_{\delta d} p)) K_C K}{p(1 + \tau_{\delta d} p)(1 + \tau_c p)(1 + \tau p) + (K_{\delta d} p^2 + K_{\delta i} (1 + \tau_{\delta d} p)) K_C K}$$

On prend $\tau_{\delta d} = 0,1 \text{ s}$.

On obtient les courbes suivantes :



Et en modifiant les gains séparément on a :



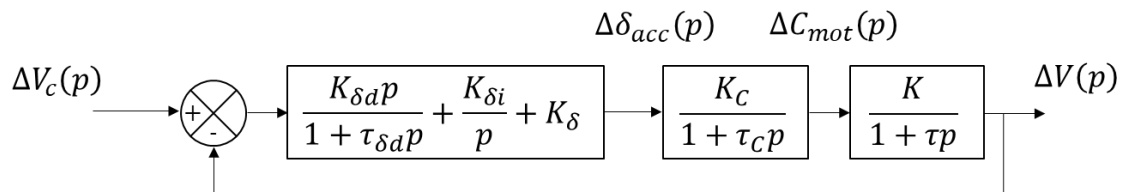
27- Que faut-il faire pour répondre aux critères ?

Rappel :

« On souhaite que, pour une entrée en échelon d'amplitude 1 m/s , le système stabilise la vitesse de la voiture :

- A $\pm 2 \%$ de la valeur consigne en moins de 3 s ,
- Sans dépassement de plus de 10% de la valeur consigne »

On propose le schéma suivant :



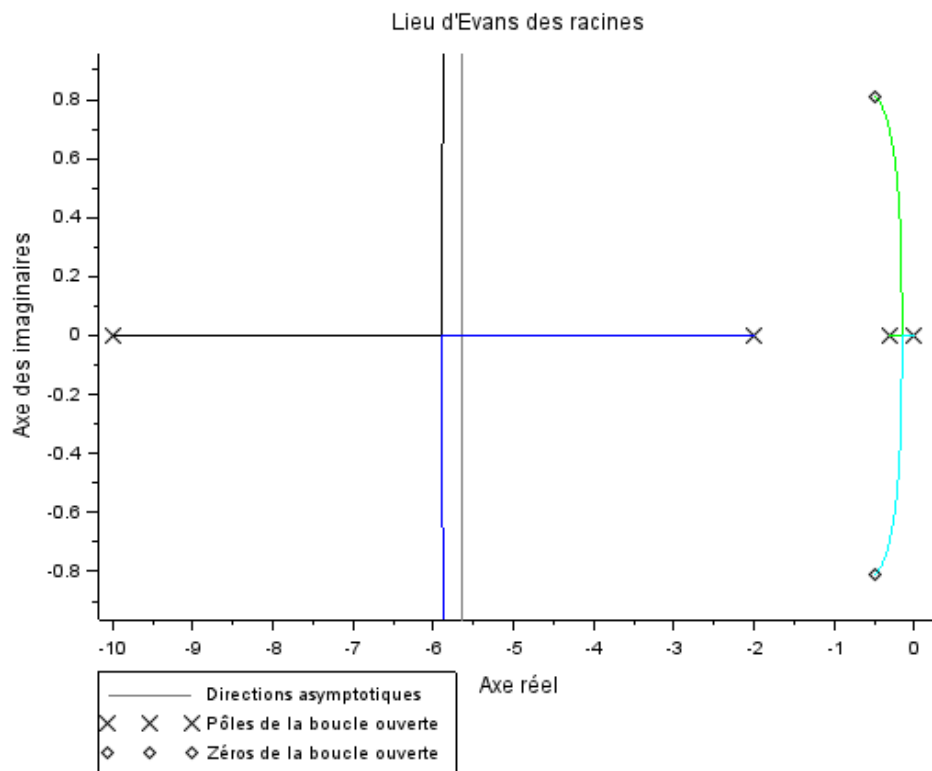
On a la FTBO qui s'écrit :

$$\frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} = \left(\frac{K_{\delta d} p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{K_{\delta i}}{p} + K_{\delta} \right) \frac{K_c}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p}$$

Avec dans un premier temps $K_{\delta d} = K_{\delta i} = K_{\delta} = K_{\delta dip}$.

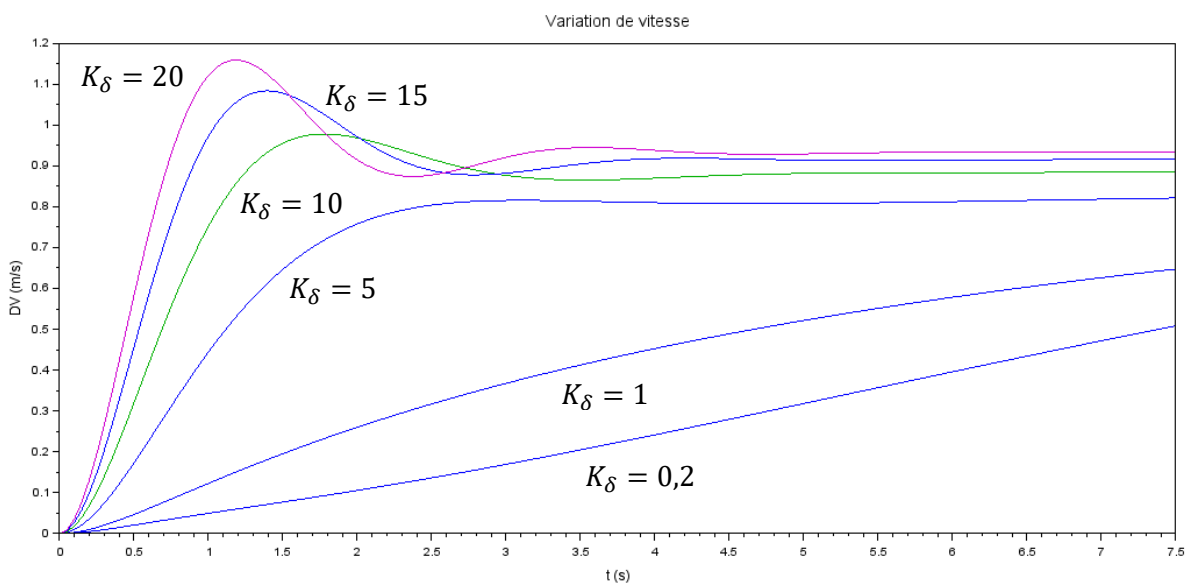
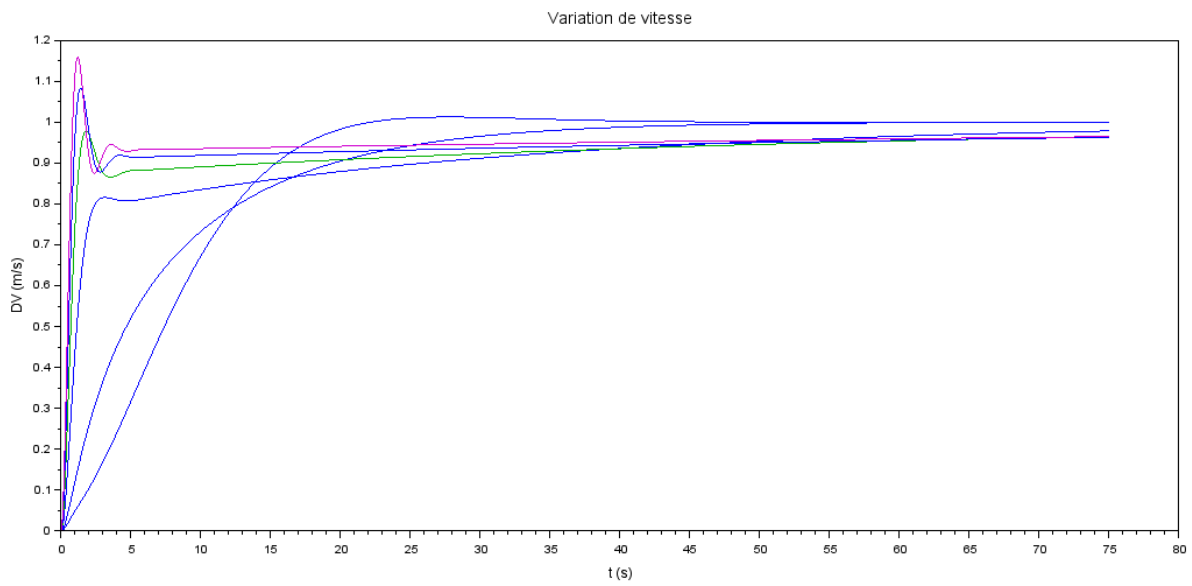
Donc on a :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(p)}{\Delta V_c(p)} &= K_{\delta dip} \left(\frac{p}{1 + \tau_{\delta d} p} + \frac{1}{p} + 1 \right) \frac{K_c}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p} \\ &= K_{\delta dip} \frac{p^2 + 1 + \tau_{\delta d} p + p(1 + \tau_{\delta d} p)}{p(1 + \tau_{\delta d} p)} \frac{K_c}{1 + \tau_c p} \frac{K}{1 + \tau p} \end{aligned}$$



28- Quel avantage a-t-on par rapport à au cas précédent ?

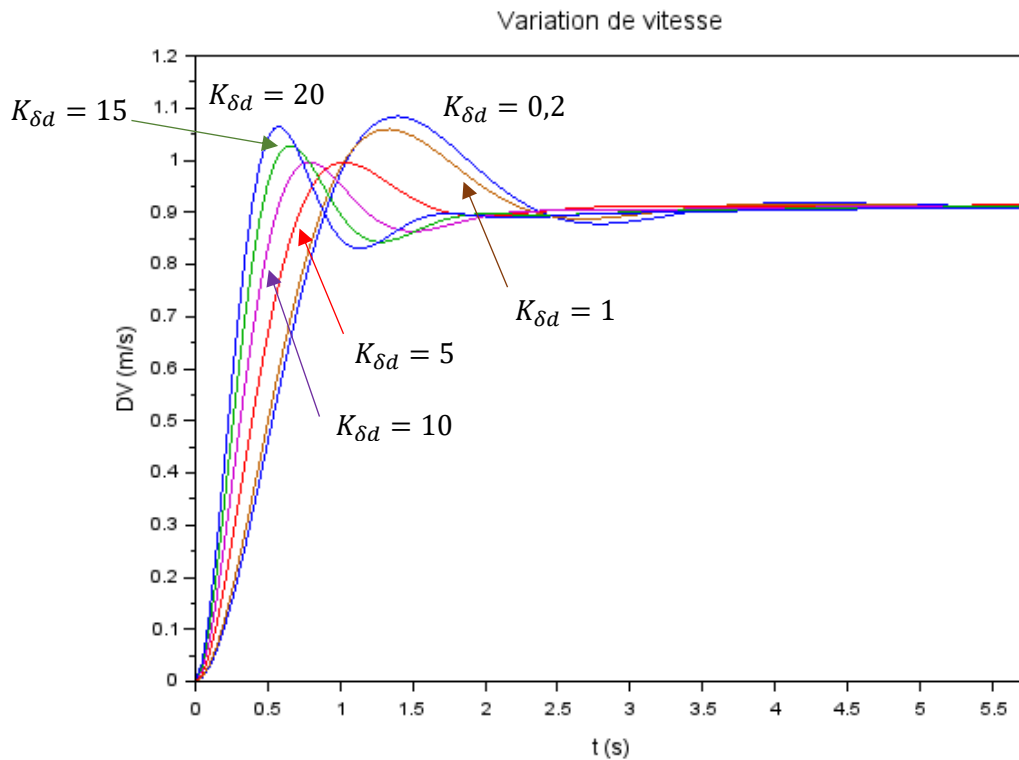
Partant des valeurs $K_{\delta d} = K_{\delta i} = 0,2$, on règle le gain K_{δ} :



Zoom du graphe précédent.

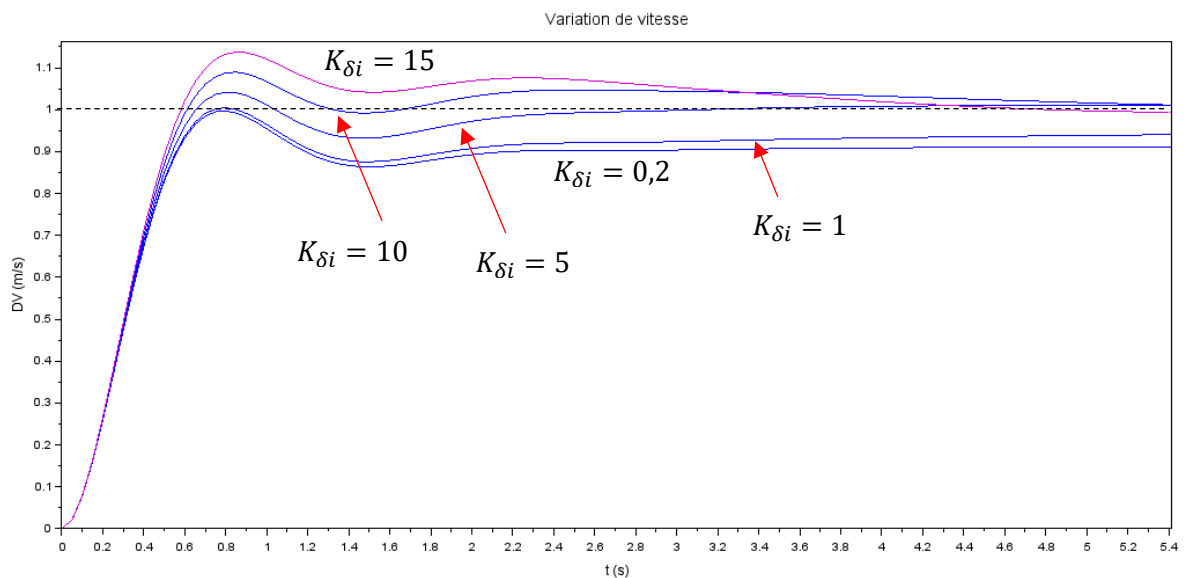
29- Quelle valeur de gain parait être la plus adaptée ?

Partant de cette valeur, on règle la valeur du gain $K_{\delta d}$:



30- Quelle valeur de gain parait être la plus adaptée ?

En partant de cette valeur de gain, on règle la valeur du gain $K_{\delta i}$:



31- Quelle valeur de gain parait être la plus adaptée ?

32- A quoi faut-il prêter tout de même attention en pratique avec les valeurs de gain ?

33- Quelle hypothèse a-t-on fait sur la boucle retour (retour unitaire) ?