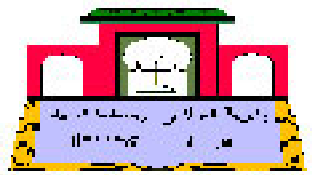
.

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Feuille d'exercices : *Fonctions usuelles*

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat



25 octobre 2008

Les blagues du jour. ***source : site internet***
Blague 1 : **Exponentielle et Logarithme vont ensemble au restaurant. Lequel invite l'autre ? *Réponse* : exponentielle, car logarithme népérien (ne paye rien).**
Blague 2 : **Nous sommes dans le bateau des fonctions. Brusquement, le capitain Factoriel s'exclame : On dérive, on dérive ! ! Les fonctions s'affolent, surtout la constante. Mais l'exponentielle réplique : Bof, pour ce que ça change... on ne me dérive jamais**

Exercice 1 **Soient a, b sont deux nombres réels. Résoudre les systèmes suivants :**

1) $\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = b \end{cases}$.

2) $\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(y) = a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(y) = b \end{cases}$

Exercice 2 **Résoudre les équations suivantes :**

1) $2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

2) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan(x)$.

3) $2\arctan(2) - \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \arctan(x)$.

4) $\arccos(\sin(x)) + \arcsin(\cos(x)) = 1$.

5) $\arcsin(1) = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin(x)$.

6) $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

7) $\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \arccos(x) + \arccos(2x)$

Exercice 3 **Déterminer tous les couples** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ **tel que :**

$$\arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(y)) = x + y$$

On pourra commencer par traiter le cas $x, y \in [0, 2\pi]$**.**

Exercice 4 **Etudier les variations des fonctions definies par :**

1) $f : x \to \arccos\left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$ **.**
2) $f : x \to \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right)$ **.**

Exercice 5 **Montrer que** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ **on a :**

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + p\pi$$

où p **est un entier à déterminer en discutant sur les signes .**

Exercice 6 **On considère la fonction :** $f(x) = \mathrm{ch}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ **.**

1) **Etudier la fonction** f **et tracer sa courbe représentative.**
2) **La courbe coupe l'asymptote parallèle à l'axe des abscisses en un point** A**, calculer l'abscisse de** A**.**

Exercice 7 **Simplifier les expressions suivantes :** $\ln\left(\sqrt{\frac{1+\mathrm{th}(x)}{1-\mathrm{th}(x)}}\right)$, $\frac{1+\mathrm{th}^2(x)}{1-\mathrm{th}^2(x)}$ **.**

Exercice 8 **Soit la fonction** $y = \sin(n \arcsin x)$**.**
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad (1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$

Exercice 9 **Soit** $x \in]0, 1]$. **On pose** $y = \arccos(x)$ **.**

1) **Exprimer en fonction de** $x, \cos(y), \sin(y)$ **et** $\tan(y)$**.**
2) **En déduire que** $\arccos(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$**.**
3) **Si** $x = 0$**, quelle est la valeur de** $\arccos(x)$ **?.**

Exercice 10 **On considère la fonction :**
$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

1) **Quel est l'ensemble de définition de** f**. Calculer** f' **.**
2) **En déduire une expression simple de** f **sur des intervalles à choisir.**
3) **Dessiner la représentation graphique de** f**.**

Exercice 11 .

1) **Soit** $(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \cos(a)\cos(b) \neq 0$**.**

Montrer que : $\tan(a) + \tan(b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$ **.**

2) **Résoudre les équations suivantes :**

- **a)** $\tan(x) = \tan(2x)$**.**
- **b)** $\tan(x) = -\tan(2x)$**.**
- **c)** $\tan(2x) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Exercice 12 **Montrer que :**

1) $\forall\ x \in \mathbb{R}\quad \arctan x + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \dfrac{\pi}{2}$**.**

2) $\forall\ x \in\ ]0,1],\ 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \dfrac{\pi}{2}$**.**

Exercice 13 **Polynômes de Chebychev.**

Pour $n \in \mathbb{N}$**, et** $x \in [-1,1]$**, on pose**

$$f_n(x) = \cos(n\arccos x)$$
$$g_n(x) = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que f_n **et** g_n **sont des fonctions polynomiales.**

Exercice 14 **Olympiades.**

1) **On sait que** $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$**, résoudre l'équation :** $\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1$ **pour** $n \geq 3$**.**

2) **On sait que** $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$**, pour tout réel** x**.**

Pour quelles valeur de x**, a-t-on :**

- **a)** $\cos(3x) = \cos^3(x) - \sin^3(x)$**.**
- **b)** $\cos(4x) = \cos^4(x) - \sin^4(x)$**.**

3) **Trouver les réels** x **tel que** $a = \tan\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right), b = \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ **et** $c = \tan\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right)$ **forment une progression géométrique dans cet ordre.**

Indication : On pourra remarquer que $ac = b^2$**.**

4) **Résoudre le système :**

$$\begin{cases} \tan(x_1) + 3\text{cotan}(x_2) & = & 2\tan(x_2) \\ \tan(x_2) + 3\text{cotan}(x_3) & = & 2\tan(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \tan(x_n) + 3\text{cotan}(x_n) & = & 2\tan(x_1) \end{cases}$$

Fin.