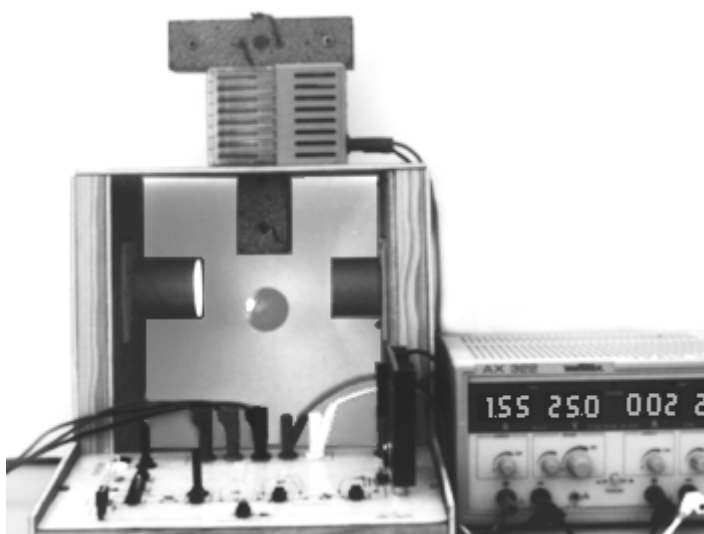


Maquette de sustentation magnétique

Par Vincent Boitier et Stéphane Kessedjian

Résumé :

Le phénomène de lévitation magnétique, au-delà de son aspect spectaculaire, permet d'illustrer un grand nombre de notions de physique étudiées dans les classes de lycée et du supérieur. Cet article propose la réalisation, simple et économique, d'une maquette de sustentation magnétique : une petite boule métallique est asservie en position au-dessous d'un électroaimant. La mesure de position est réalisée par un capteur optique. Après une description détaillée des différents éléments du système, la synthèse d'un correcteur est développée.



I. Introduction

Industriellement, la sustentation magnétique est utilisée notamment pour réaliser des paliers sans frottements sur un arbre en rotation [1] ou pour guider sans contact avec le sol des trains à grande vitesse [2].

Sans aucune prétention industrielle, ce travail souhaite mettre à la portée de tous les enseignants la réalisation d'une maquette de lévitation magnétique, pour un prix sans commune mesure avec les ensembles proposés dans le commerce [3] [4]. Au-delà de l'aspect un peu "magique" de la lévitation, cette maquette permet d'étudier, en fonction du public visé, des notions de magnétisme, d'électronique, d'optoélectronique et d'automatique.

Le système se compose d'une boule métallique située sous une bobine à noyau de fer (voir photo). Parcourue par un courant, la bobine se comporte comme un aimant et attire la boule.

En l'absence d'asservissement, la force magnétique étant inversement proportionnelle à la distance, la boule vient se coller contre le noyau ou chute ; il est donc nécessaire d'effectuer une mesure de la position et de modifier en conséquence l'intensité du courant pour maintenir la boule à une position fixée.

Dans la première partie, les différentes composantes du système sont présentées et modélisées. La deuxième partie traite de la linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement. A partir du modèle obtenu, le problème de la stabilité est abordé dans la

troisième partie en utilisant le critère de Nyquist, la structure du correcteur en découle. Enfin les résultats pratiques sont présentés dans la dernière partie.

II. Analyse du système

Sur le schéma synoptique de la figure 1, on retrouve les différents éléments constitutifs du système : l'ensemble électromagnétique (bobine à noyau de fer et boule métallique), l'amplificateur de puissance piloté par le correcteur et un bloc assurant la mesure de la position.

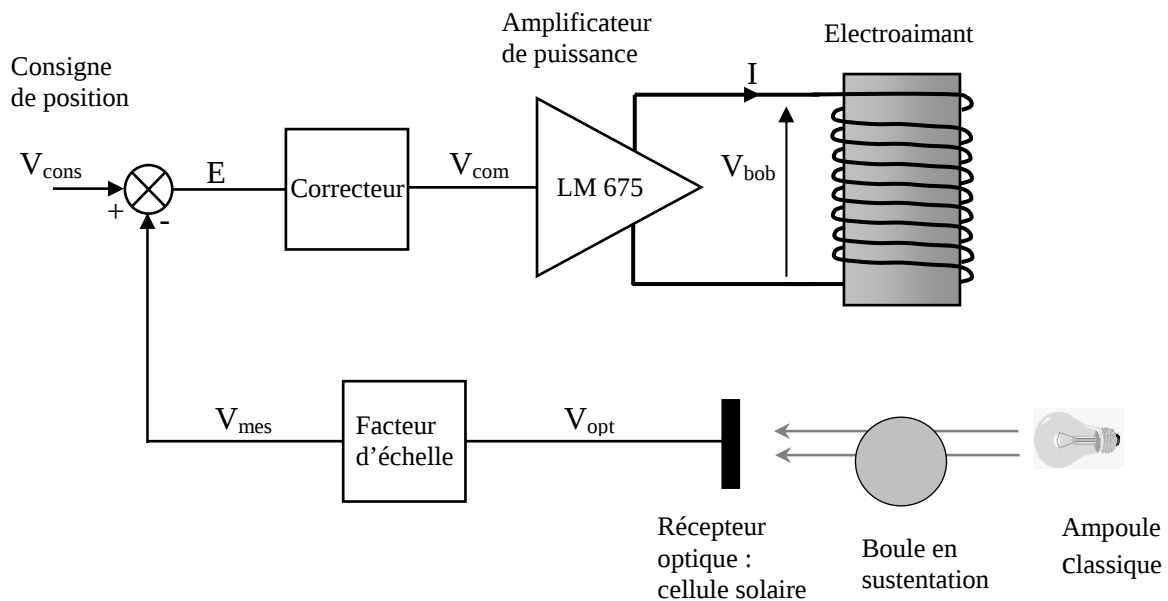


Figure 1 : schéma de principe du dispositif

1/ ensemble électromagnétique.

La boule est une sphère creuse en fer blanc (diamètre = 3,4 cm ; $M = 8,53$ g) qui provient d'une mappemonde de stylo gadget. Il est possible d'en fabriquer facilement d'équivalentes à l'aide, par exemple, d'une boule de polystyrène entourée de lamelles de fer provenant d'une canette de boisson.

L'électroaimant est composé d'une bobine didactique et de deux noyaux de fer (barres de transformateur démontable), éléments disponibles dans la plupart des lycées. La force magnétique étant d'autant plus grande que le flux magnétique est mieux canalisé, un noyau de fer est indispensable. La structure en T a été retenue. A courant donné, plus la bobine comporte de spires, plus la force créée sera grande ; pratiquement on constate qu'une bobine de 1000 spires convient pour attirer la boule avec un courant inférieur à 2 ampères.

La géométrie complexe du système ne permet pas un calcul direct de l'expression de la force magnétique F . Pour obtenir un modèle de cette force, on relève expérimentalement le courant minimal I_m de maintien de la bille à une hauteur donnée. Des cales en carton, placées entre le noyau de fer et la boule, permettent de faire varier la distance e entre le sommet de la boule et le noyau. Pour la valeur I_m , la force magnétique F compense exactement le poids Mg de la boule ; on relève ainsi $I = I(e)$ à M donné et donc à F donnée. En accrochant des masses amagnétiques m sur la bille, la masse totale devient $(M+m)$, ce qui permet de tracer un réseau de courbes $I = I(e)$ pour différentes valeurs de F .

Les courbes tracées figure 2 correspondent à $m = (0 \text{ g} ; 2 \text{ g} ; 3 \text{ g} ; 5 \text{ g})$.

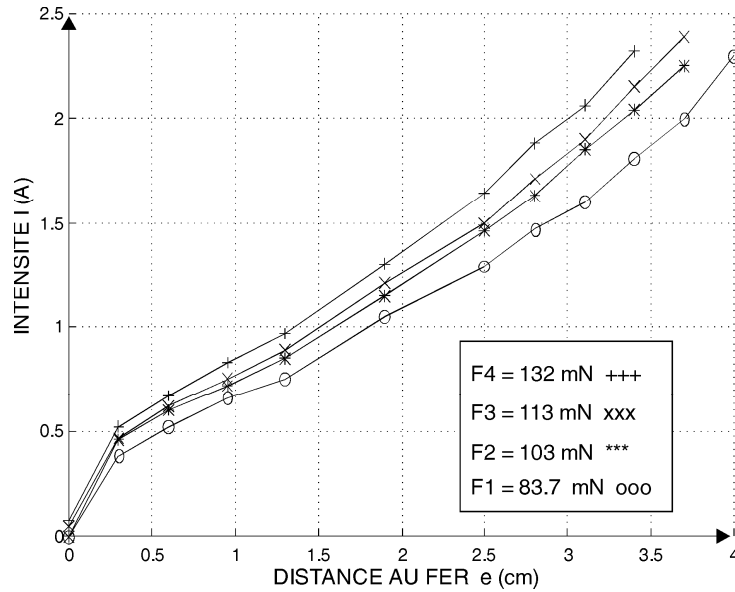


Figure 2 : relevé expérimental du courant de maintien

Analysons ces relevés pour obtenir une expression analytique de F en fonction de e et de I. Dans le cas d'un système physique où l'entrefer e est réduit [5] [6], les lignes de champ restant bien canalisées, la force s'exprime alors par la formule :

$$F = k \frac{I^2}{e^2} \quad [Eq1]$$

où k s'exprime en fonction de la géométrie et des matériaux. Si ce modèle convient à notre application, il devrait exister une relation linéaire entre $I/\sqrt{F}$ et e, en effet [Eq1] donne :

$$\frac{I}{\sqrt{F}} = \frac{1}{\sqrt{k}} e \quad [Eq2]$$

Le tracé de $I/\sqrt{F} = f(e)$ à partir des valeurs expérimentales (figure 3), montre bien la dépendance en I^2 de F. En prenant $(1/\sqrt{k}) = 185$ SI (voir courbe en pointillée), la relation linéaire est vérifiée avec une erreur relative de $\pm 4 \%$ lorsque $e \in [1,9 ; 3,7]$ cm. Le modèle de force proposé convient bien dans le domaine défini. L'établissement de la force magnétique étant instantané, ce modèle est utilisable en régime dynamique. Le coefficient directeur de la droite permet de déterminer k : $k = 2,92 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^2\text{A}^{-2}$.

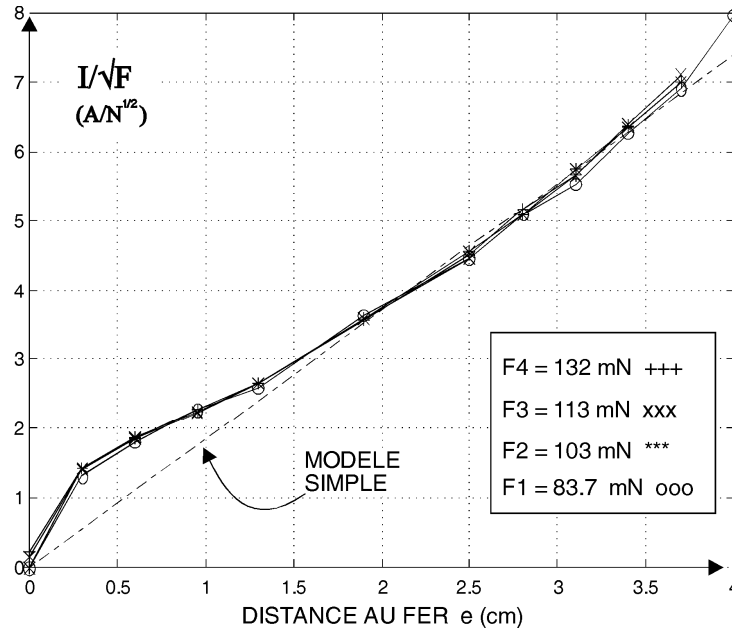


Figure 3 : courbes $I/\sqrt{F}$ en fonction de e

Le point de fonctionnement choisi est caractérisé par les grandeurs e_0 et I_0 . Avec les conventions de la figure 4, on écrit :

$$\begin{aligned} e(t) &= e_0 - x(t) \\ I(t) &= I_0 + i(t) \end{aligned}$$

où $x(t)$ et $i(t)$ sont les variations autour du point de fonctionnement.

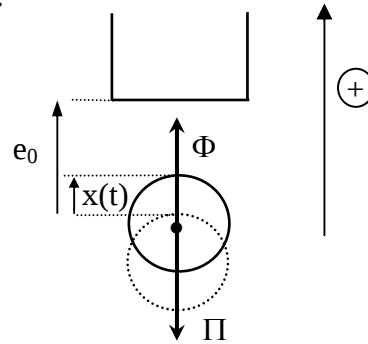


Figure 4

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la boule donne :

$$M \ddot{x} = F - Mg \quad [Eq3]$$

L'inductance étant indépendante de la position de la bille, la relation entre le courant circulant dans la bobine et la tension à ses bornes est :

$$V_{\text{bob}}(t) = R I(t) + L \frac{dI(t)}{dt} \quad [Eq4]$$

où R est la résistance de la bobine ($R = 12 \, \Omega$) et L l'inductance du circuit magnétique.

La mesure de $\tau_{\text{elec}} = \frac{L}{R}$ effectuée par une excitation indicielle de V_{bob} donne $\tau_{\text{elec}} = 36 \, \text{ms}$.

2/ Amplificateur de puissance

Un amplificateur opérationnel de puissance linéaire monté en amplificateur de tension (gain $A = 5$) a été préféré à une structure de type hacheur [7] en raison de la faible puissance consommée par la bobine ($\approx 25 \, \text{Watts}$) et de la simplicité de mise en œuvre de ce type d'amplificateur.

La relation entre la tension de commande de l'amplificateur (V_{com}) et la tension appliquée aux bornes de la bobine est donnée par :

$$V_{bob} = A V_{com} \quad [Eq5]$$

Le composant choisi, le LM 675 [8], offre un bon rapport performance/coût. Il est alimenté en $\pm 25V / 2A$. L'adjonction d'un dissipateur thermique est nécessaire pour assurer un refroidissement correct du composant.

3/ Correcteur.

Réalisé à l'aide d'amplificateurs opérationnels classiques, le correcteur reçoit la différence E entre la tension V_{cons} image de la consigne de position et la tension V_{mes} image de la position. Il délivre une tension V_{com} . La nature du correcteur est présentée et justifiée au § III.2.

4/ Mesure de la position

a) Capteur de position

Le capteur est composé d'une cellule solaire ($4,5 \text{ cm} \times 2,5 \text{ cm}$; 100 mA) et d'une source de lumière (ampoule 12 V , $2W$). Intercalée entre ces deux éléments, la boule modifie la surface éclairée de la cellule et donc la tension V_{opt} à ses bornes. Le temps de réponse du capteur est négligeable devant la dynamique du système. La caractéristique statique $V_{opt} = f(e)$ relevée sur la figure 5 montre une zone de fonctionnement linéaire pour $e \in [2,0 ; 3,5]$ cm :

$$V_{opt}(t) = K_{opt} e(t) - V_{opto} \quad [Eq6]$$

avec $V_{opto} = 10,8 \text{ mV}$ et $K_{opt} = 1,22 \text{ Vm}^{-1}$. Le positionnement du capteur par rapport au noyau de fer a été déterminé pour rester dans la zone de linéarité du capteur.

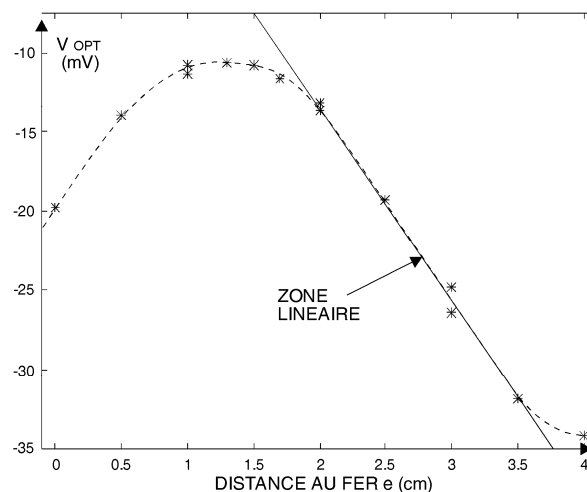


Figure 5 : caractéristique du capteur optique

b) Facteur d'échelle

Le facteur d'échelle permet de fixer le rapport entre les variations de tension de consigne et de position de la boule ; c'est un simple gain inséré entre V_{opt} et V_{mes} .

$$V_{\text{mes}} = K_{\text{fe}} V_{\text{opt}}$$

Supposons que le système soit asservi au point de fonctionnement $x = 0$, $I = I_0$. Nous souhaitons qu'une variation de 1 volt de la tension de consigne ($V_{\text{cons}} = V_{\text{conso}} + v_{\text{cons}}$ avec $v_{\text{cons}} = 1$ volt) entraîne une variation de 1 cm sur la position ($x = 1$ cm).

Si le système est correctement asservi, la variation d'erreur ε ($E = E_0 + \varepsilon$ avec $\varepsilon = v_{\text{cons}} - v_{\text{mes}}$) reste petite, on peut alors écrire $v_{\text{cons}} \approx v_{\text{mes}}$.

Or $v_{\text{mes}} = K_{\text{fe}} K_{\text{opt}} x$, ce qui permet de calculer K_{fe} :

$$K_{\text{fe}} = \frac{v_{\text{cons}}}{K_{\text{opt}} x} \quad [Eq7]$$

On obtient $K_{\text{fe}} = 83$.

III. Etude de la stabilité

1/ Linéarisation du modèle

Pour utiliser les méthodes de l'automatique classique, un modèle linéaire du procédé autour du point de fonctionnement est nécessaire. Il faut donc linéariser l'expression de la

force donnée par [Eq1] : $F = k \frac{I^2}{(e_0 - x)^2}$

Autour du point de fonctionnement (I_0, e_0), on peut écrire $F = F(I_0, e_0) + dF$ avec

$F(I_0, e_0) = P = Mg$ à l'équilibre, et

$$dF = \left. \frac{\partial F}{\partial I} \right|_{I=I_0}^{x=0} i + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0}^{I=I_0} x = \frac{2kI_0}{e_0^2} i(t) + \frac{2kI_0^2}{e_0^3} x(t)$$

En posant $k_i = \frac{2kI_0}{e_0^2}$ et $k_x = \frac{2kI_0^2}{e_0^3}$, [Eq3] s'écrit :

$$M \ddot{x} = F - Mg = k_i i(t) + k_x x(t) \quad [Eq8]$$

Avec, pour le point de fonctionnement choisi [$e_0 = 2,5$ cm ; $I_0 = 1,29$ A]

$$k_i = 0,12 \text{ N.A}^{-1} ; k_x = 6,18 \text{ N.m}^{-1}$$

En utilisant la transformation de Laplace, [Eq8] se réécrit : $Mp^2 X(p) = k_i I(p) + k_x X(p)$

La relation entre $I(p)$ et $V_{\text{bob}}(p)$ est déterminée à partir de [Eq4] : $V_{\text{bob}}(p) = (R + Lp) I(p)$

On obtient finalement les fonctions de transfert :

$$\frac{X(p)}{I(p)} = \frac{k_i}{mp^2 - k_x} = \frac{-k_i / k_x}{1 - (\tau p)^2} \quad \text{avec} \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{k_x}} = 37 \text{ ms}$$

$$\frac{I(p)}{V_{\text{bob}}(p)} = \frac{1}{R + Lp} = \frac{1/R}{1 + \tau_{\text{elec}} p} \quad \text{avec} \quad \tau_{\text{elec}} = \frac{L}{R} = 36 \text{ ms}$$

Pour de petites variations autour du point de repos, le système est représenté par le schéma bloc de la figure 6.

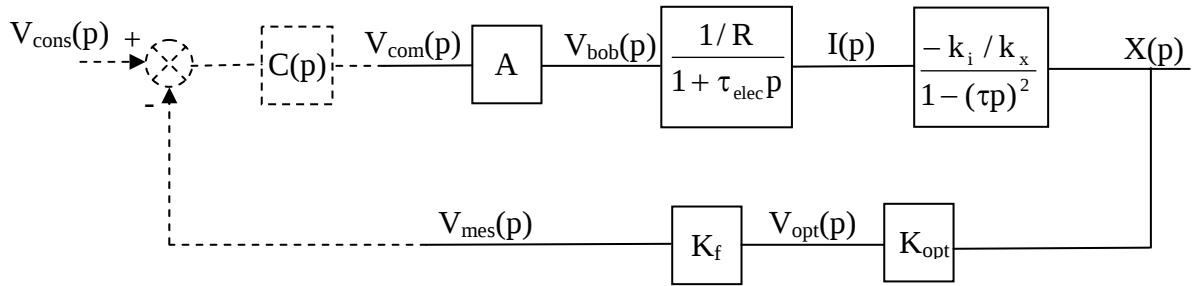


Figure 6 : modèle linéarisé du procédé autour du point de fonctionnement

2/ Stabilité

La fonction de transfert en boucle ouverte, $H_{BO}(p) = \frac{V_{mes}(p)}{V_{com}(p)}$, possède un pôle à partie réelle positive, on retrouve bien l'instabilité intrinsèque du procédé, et donc la nécessité d'un asservissement. Le critère de Nyquist permet de déterminer la stabilité du système en boucle fermée [9]. Le procédé est stable s'il n'existe pas de pôle de $H_{BF}(p)$ à partie réelle positive. Ceci entraîne que le lieu de Nyquist de $H_{BO}(p)$ doit faire un tour dans le sens trigonométrique autour du point critique $(-1 ; 0)$.

Le lieu de Nyquist de $H_{BO}(p)$ a été tracé figure 7. On constate aisément que la condition de stabilité n'est pas respectée, il est donc nécessaire de modifier ce lieu en ajoutant un correcteur dans la chaîne directe.

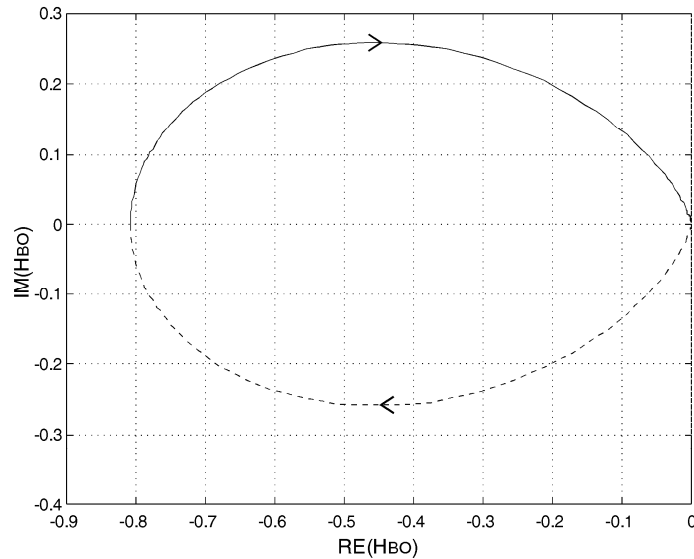


Figure 7 : lieu de Nyquist de H_{BO}

A l'aide d'un correcteur proportionnel judicieusement choisi, on contraint le lieu de la fonction de transfert $K_p \times H_{BO}(p)$ à entourer le point critique. Comme on le constate sur la figure 8, $K_p = (0,5)^{-1}$ convient.

Ce nouveau lieu entoure bien le point $(-1 ; 0)$, mais dans le sens horaire. Il s'agit maintenant de le déformer pour qu'il passe sous le point critique. Un apport de phase au

voisinage de ce point est nécessaire pour que le lieu de Nyquist de $H_{BOC}(p) = C(p) \times H_{BO}(p)$ ait l'allure représentée figure 8.

Un correcteur à avance de phase doit donc permettre de stabiliser le procédé, il reste à choisir ses paramètres.

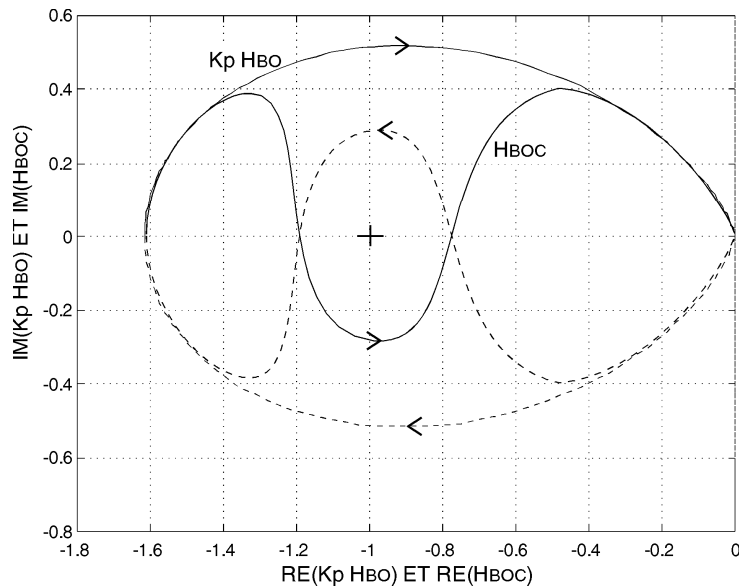


Figure 8 : lieu de Nyquist de $K_p H_{BO}$ et H_{BOC}

3/ Synthèse du correcteur

La fonction de transfert du correcteur à avance de phase est $C(p) = K_p \frac{1+aTp}{1+Tp}$ où $a > 1$.

L'avance de phase maximum $\varphi_{\max}$ est apportée par le correcteur pour la pulsation $\omega_{\max}$.

$$\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{a}} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi_{\max}) = \frac{1-a}{1+a} \quad [Eq9]$$

En se fixant $a = 10$, on obtient $\varphi_{\max} = 55^\circ$. Pour déformer le diagramme de Nyquist comme souhaité, le correcteur doit apporter de la phase en respectant, en première approche, les deux considérations suivantes :

- en $\omega_{\max}$, $\text{Arg}(H_{BOC})$ doit être supérieur à -180° , soit :

$$\omega_{\max} \leq \frac{1}{\tau_{\text{elec}}} \quad [Eq10]$$

- la phase doit être apportée lorsque le gain de H_{BOC} diminue. Le gain de $C(p)$ étant croissant autour de $\omega_{\max}$ avec une pente de $+20 \text{ dB/décade}$, H_{BO} doit présenter une pente inférieure à -20 dB/décade ; cette condition est réalisée lorsque :

$$\frac{1}{\tau} \leq \omega_{\max} \quad [Eq11]$$

Dans le cas présent, les deux constantes de temps τ et τ_{elec} sont quasiment confondues. On choisit alors une valeur de $\omega_{\max}$ du même ordre de grandeur, c'est à dire une valeur de T de l'ordre de $T = \sqrt{a} \omega_{\max} \approx \sqrt{a} \tau$. On détermine précisément les valeurs de T et K_p à partir de la forme des diagrammes de Nyquist de $H_{BOC}(p)$. En effet la stabilité est d'autant mieux assurée que la distance entre le lieu corrigé et le point critique est la plus grande possible.

La figure 10 représente ces diagrammes pour $K_p = 1,4$ et trois valeurs différentes de T . La courbe retenue correspond à $T = 7$ ms. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert corrigée est donné figure 9.

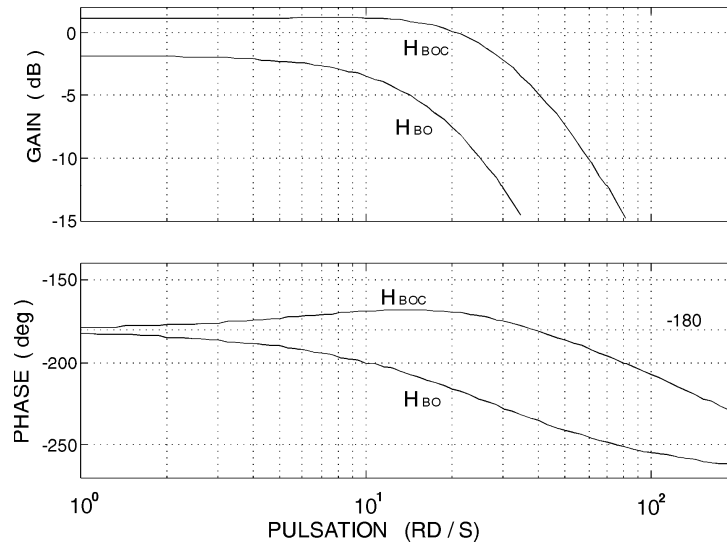


Figure 9 : diagrammes de Bode de H_{BO} et H_{BOC} ($a=10$, $T=7$ ms, $K_p=1,4$)

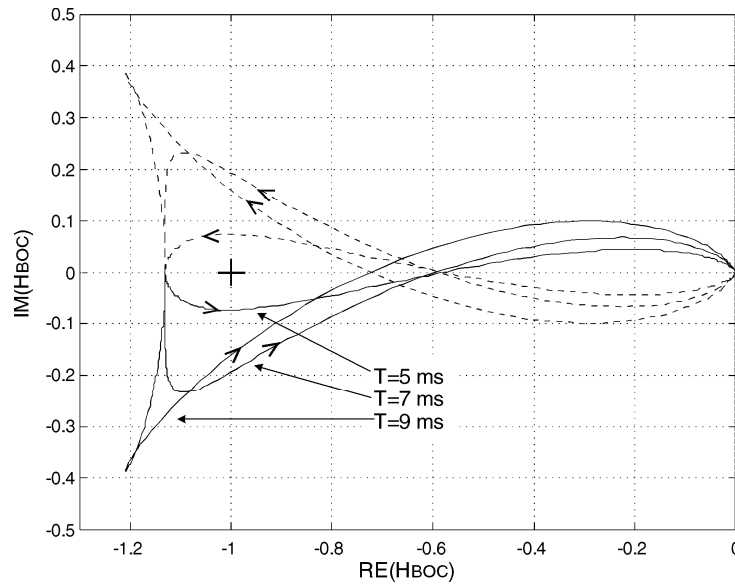


Figure 10 : influence de T sur le lieu de Nyquist de H_{BOC}

IV. Expérimentation

1/ Consigne de position

Tous les éléments du système ayant été déterminés, il reste à calculer la valeur de la tension de consigne nécessaire pour placer la boule au point de fonctionnement choisi. En régime statique,

$$E = V_{\text{cons}} - V_{\text{mes}} \quad \text{soit} \quad V_{\text{cons}} = \frac{RI_0}{AK_p} + K_{fe} V_{\text{opt}}$$

Pour le point [$e_0 = 2,5 \text{ cm}$; $I_0 = 1,29 \text{ A}$], V_{opt} étant déduit de la figure 5, on obtient la valeur de consigne : $V_{\text{cons}} = 0,6 \text{ V}$

2/ Essais

Expérimentalement, le fonctionnement est stable avec les paramètres prédéterminés. Il peut néanmoins être nécessaire, pour compenser l'influence de la température sur la résistance de la bobine et sur le gain de l'amplificateur de puissance, d'ajuster la valeur de K_p .

La boule reste en sustentation stable sur la plage de fonctionnement $e \in [1,9 ; 3,3] \text{ cm}$, ce qui correspond à $V_{\text{cons}} \in [-1,1 ; -0,4] \text{ V}$.

Pour vérifier la robustesse du système vis à vis d'un changement de consigne, on envoie une excitation en échelon. On constate (voir figure 11) que la forme de la réponse indicielle dépend du point de fonctionnement, ce qui met en évidence la limitation du modèle linéaire.

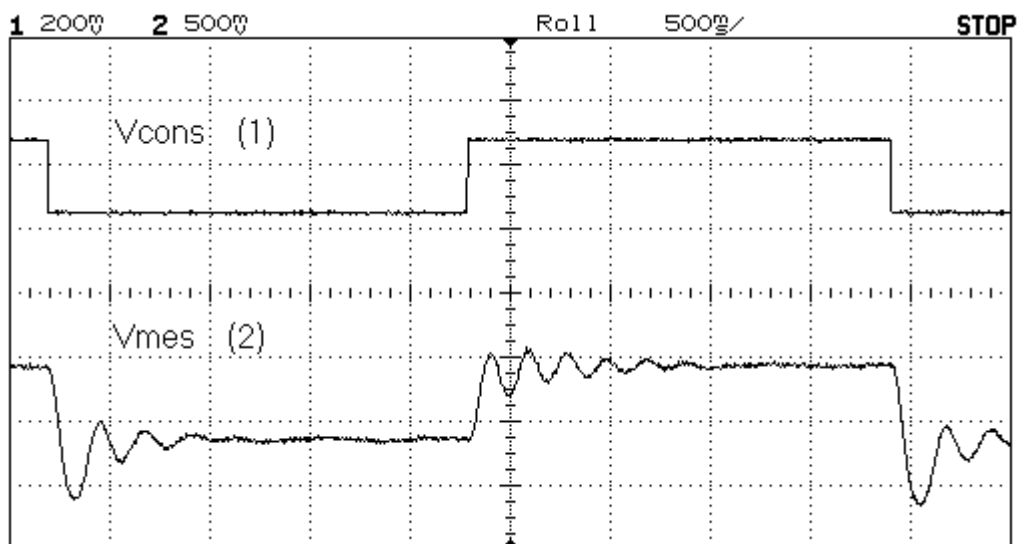


Figure 11 : réponse indicielle

3/ Réalisation pratique

Cette maquette peut être réalisée assez facilement, pour la construction du support comme pour celle du circuit électronique. Il est possible de la faire réaliser par les élèves, en particulier ceux des filières techniques.

Le schéma électrique du circuit est donné en annexe ; il est réalisé sous forme d'un typon qui s'encastre dans le support. Les différents éléments y sont détaillés, avec les valeurs des composants. La consigne de position possède deux entrées : une entrée externe (GBF) permettant de faire des essais à consigne variable, et une entrée interne réglable grâce à un potentiomètre. Le correcteur est réalisé en utilisant des éléments RC montés en parallèles plutôt qu'en série pour éviter les problèmes de charge des condensateurs. Un potentiomètre permet d'ajuster le gain à la valeur souhaitée.

Le prix de revient de la maquette sans l'électroaimant est d'environ 200 Frs. Ce prix comprend les divers composants électroniques, le capteur optique, le dissipateur thermique, les douilles de connexions et la plaque époxy du typon.

V. Conclusion

Cette maquette de sustentation magnétique est un exemple concret de système asservi instable en boucle ouverte et non linéaire. La méthode d'identification statique proposée a permis d'obtenir un modèle de force précis du processus. Le critère de Nyquist, rarement utilisé en pratique, a permis la synthèse du correcteur. La vérification du bon fonctionnement par une simulation n'est pas nécessaire, le procédé permettant de faire les essais directement sans danger. Cette maquette de réalisation très simple, permet sans modification notable du correcteur un fonctionnement avec d'autres boules (« boule à thé »).

Utilisée du secondaire au supérieure, cette maquette fournit un support de cours attrayant et un thème de travaux pratiques d'automatique.

Pour tout renseignement vous pouvez nous joindre à l'adresse suivante :

Université Paul Sabatier
Agrégation de Physique Appliquée – Bât 3A
118, route de Narbonne – 31062 Toulouse Cedex
Tel : 05 61 55 83 41
e-mail : boitier@cict.fr
stephannelaure@caramail.com

Références

- [1] *Revue 3 EI* – n° 15, décembre 1998
- [2] <http://www.mvp.de/> (Transrapid)
- [3] <http://www.fbk.com> (Feedback)
- [4] <http://www.ccnet.com/~lnstech/#lev> (LNS Technologies)
- [5] *Composition d'automatismes industriels* - problème d'agrégation de génie électrique, 1992
- [6] *Electromagnétisme* – Pérez, Carles, Fleckinger – Ed. Masson
- [7] *Digital Control for a magnetic suspension system as an undergraduate project* – Kuniomi Oguchi, Yoshio Tomigashi - Int. J. Elect. Enging. Educ., vol. 27, pp226-236, 1990
- [8] <http://www.national.com> (National Semi conductor, LM 675 Power Operational Amplifier)
- [9] *Automatique de base* – P. Siarry – Ed. Ellipses

Annexe

Schéma électrique de l'asservissement

