

Maturité gymnasiale
Examen final de Mathématiques – Niveau 1
Session de mai-juin **2024**

NOM : _____

PRÉNOM : _____

CLASSE : _____

Matériel distribué :

- Ce cahier
- Sur demande, des feuilles de brouillon

Matériel personnel :

- Calculatrice non programmable
- Matériel d'écriture, de géométrie et de dessin
- « Formulaires et tables » de CRM (sans annotation)

Consignes à respecter strictement :

- Durant l'examen, aucun matériel ne circule d'un étudiant à l'autre.
- Les solutions seront rédigées proprement au stylo ou à l'encre dans les zones vierges de **ce cahier**. Exception faite pour les exercices de géométrie dans l'espace qui pourront être faits au crayon.
- Aucune solution n'est rédigée sur feuille de brouillon. En cas de besoin plusieurs pages blanches sont à votre disposition en fin de cahier.
- Toute réponse doit être justifiée.

Remarque :

Dans la correction de votre épreuve, il sera tenu compte de la clarté et de la rigueur de vos développements ainsi que de la qualité de votre présentation.

Problème 1. Analyse

(Poids 3)

Partie A

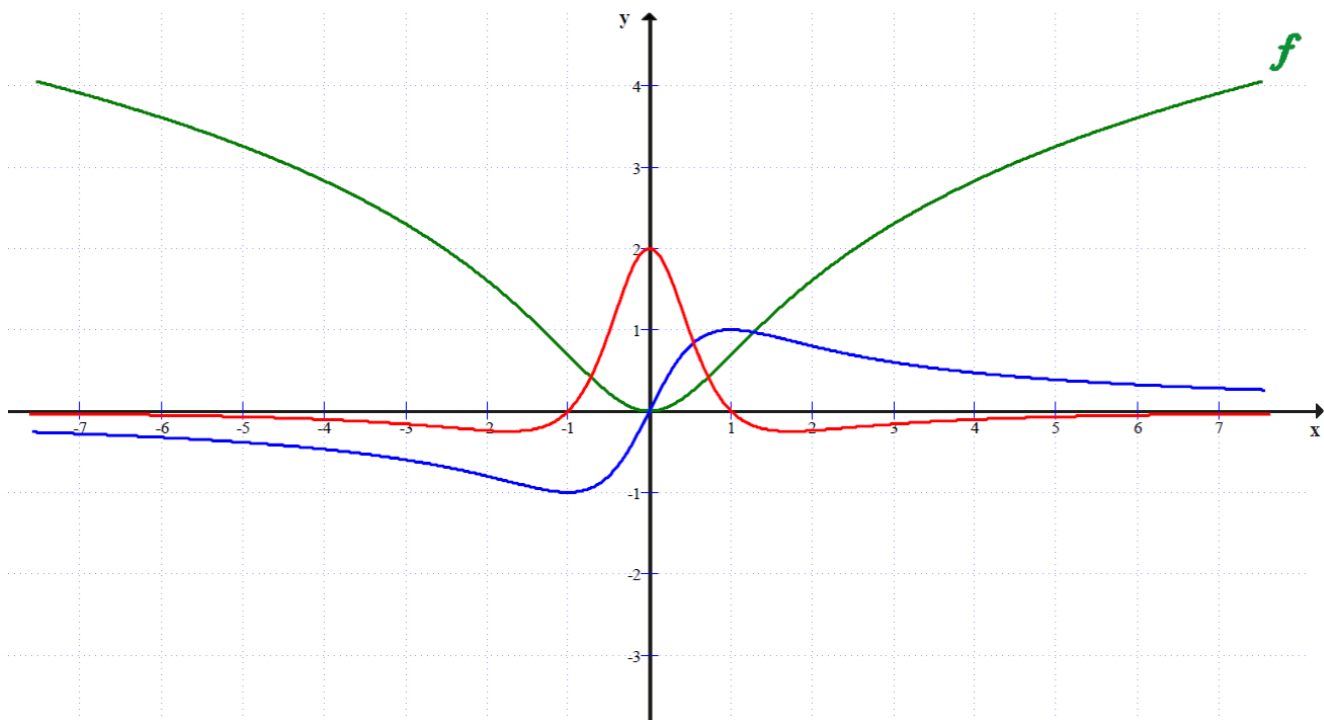
Soit la fonction réelle: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

1) Donner le domaine de définition de f

2) Déterminer le(s) zéro(s) de f

Dans le système d'axes ci-dessous, nous avons tracé les graphes de f , de f' et de f''

3) Identifier clairement les graphes de f' et de f'' en l'indiquant directement dans le système d'axes



4) Par lecture graphique, compléter le tableau ci-dessous :

Les coordonnées du point à tangente horizontale de f	
Le nombre de points d'inflexion de f	
L'ensemble image de f	
Déterminer les limites	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots\dots\dots$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \dots\dots\dots$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = \dots\dots\dots$

5) Calculer la première dérivée et dresser le tableau de croissance de f

6) Montrer que la deuxième dérivée de f est $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

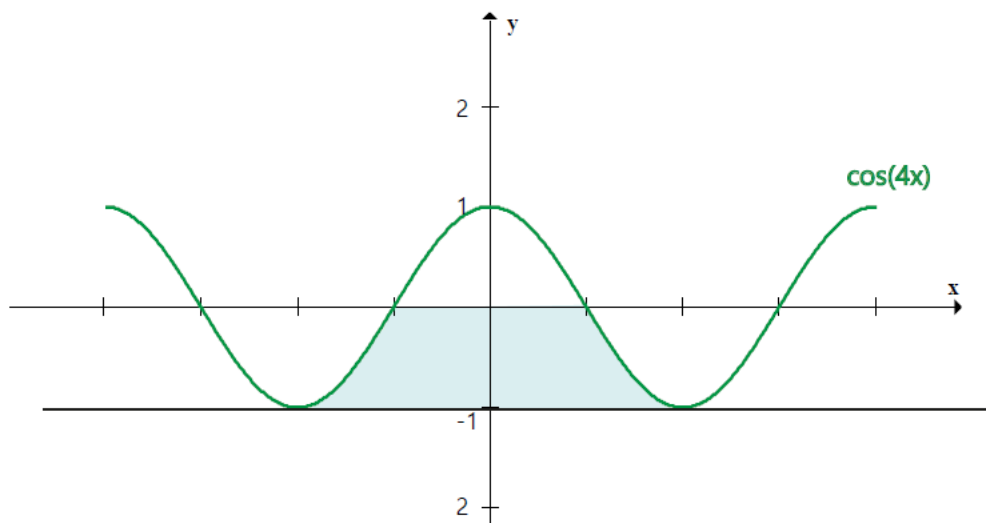
7) Dresser le tableau de courbure de f

8) Déterminer les coordonnées de(s) point(s) d'inflexion de f et l'équation de(s) droite(s) tangente(s) au graphe de f en ce(s) point(s)

9) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit d une droite d'équation $y = \lambda$. À l'aide du graphique discuter le nombre de points d'intersection de la droite d avec le graphe de f en fonction des valeurs de λ

Partie B

Soit la fonction réelle : $g(x) = \cos(4x)$ et une partie de son graphe représentée ci-dessous. L'axe x n'est volontairement pas gradué



- 1) Graduer l'axe x ci-dessus (x en radians)
- 2) Déterminer l'équation de la tangente t en $x = \frac{\pi}{8}$
- 3) Calculer l'angle aigu formé par cette tangente et l'axe y
- 4) Considérons la surface S grisée ci-dessus délimitée par le graphe de g , l'axe x et la droite d'équation $y = -1$. Calculer son aire

Problème 2. Géométrie

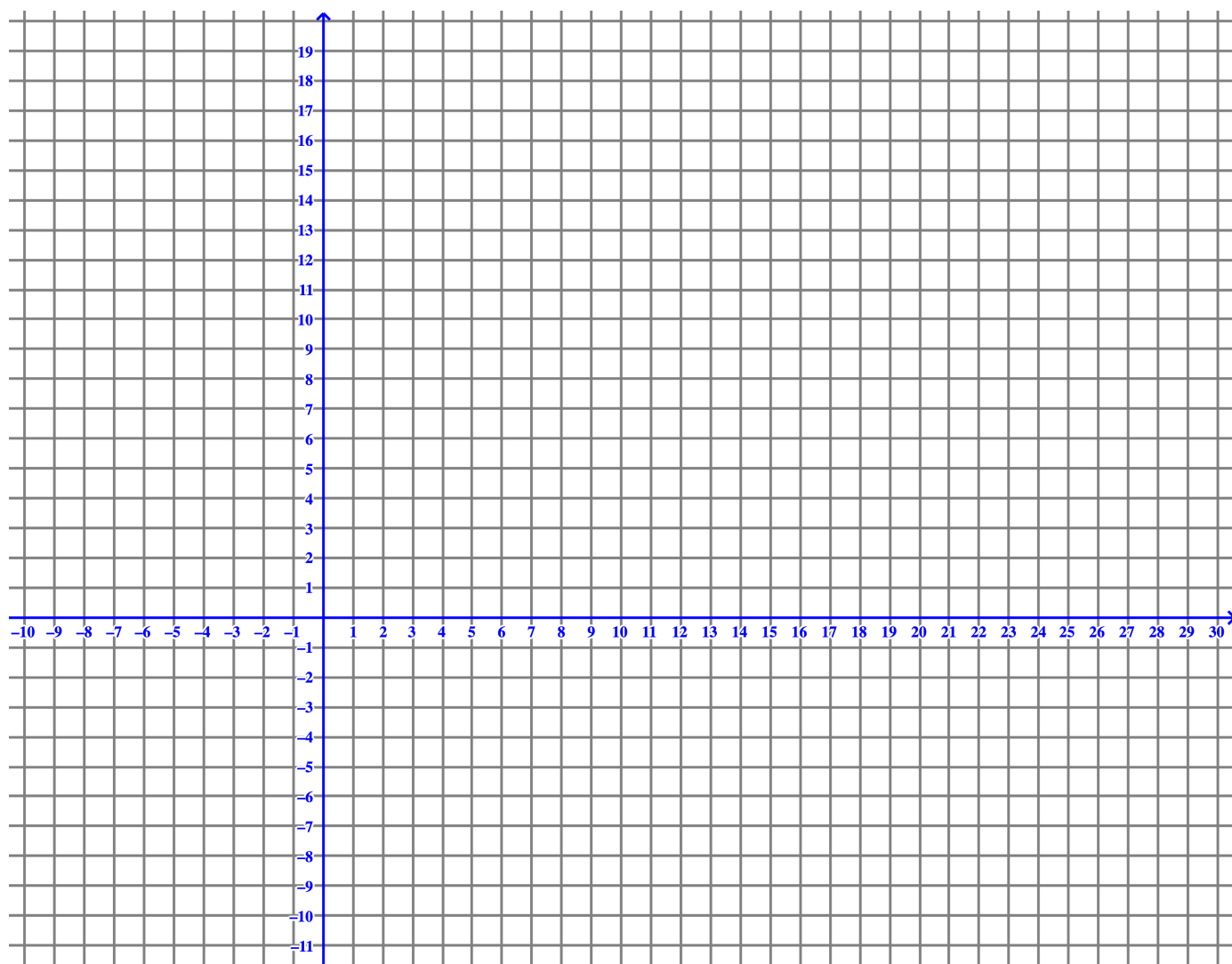
(Poids 3)

Partie A Géométrie plane

On considère les objets suivants :

- Le cercle $\mathcal{C}_1: (x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 25$
- Les droites $d_1: 3x - 4y + 20 = 0$ et $d_2: x = 12$
- Le point $M(4; 0)$

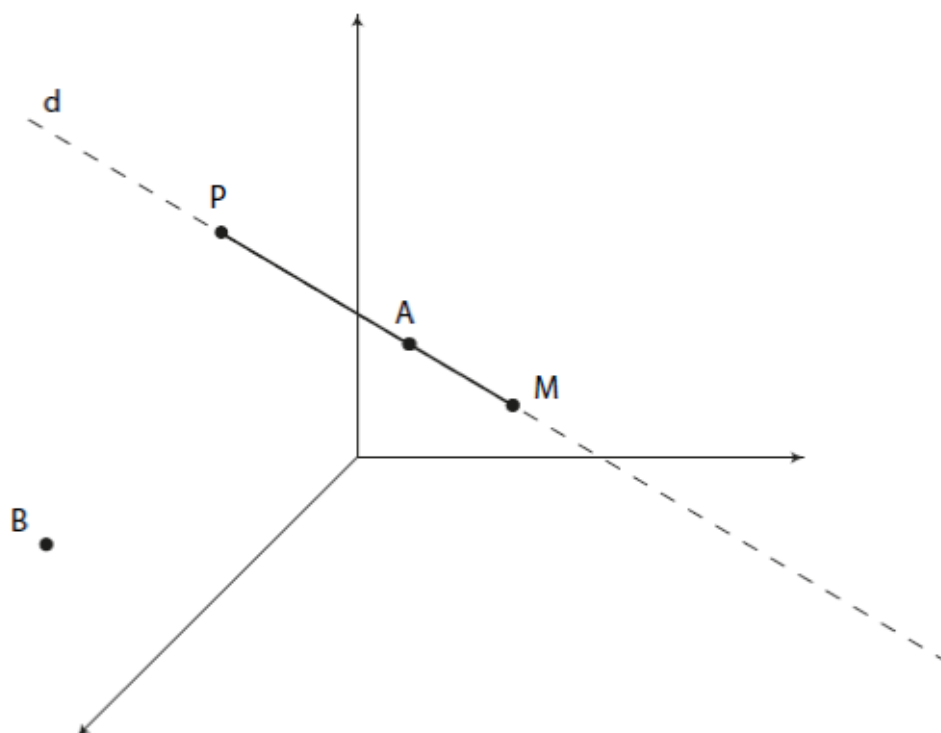
- 1) Déterminer le centre K et le rayon r_1 du cercle $\mathcal{C}_1$
- 2) Montrer que le point M appartient au cercle $\mathcal{C}_1$
- 3) Soit N le point d'intersection de d_1 avec d_2 . Calculer les coordonnées du point N
- 4) Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}_2$, centré en K et passant par le point N
- 5) Quelle est la position relative des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$? Justifier votre réponse
- 6) Déterminer l'équation de la droite d_3 , la droite tangente au cercle $\mathcal{C}_1$ au point M
- 7) Calculer la distance entre le point M et la droite d_1
- 8) Sachant que la droite d_1 est tangente au cercle $\mathcal{C}_1$. Déterminer par calculs les coordonnées de T , le point de tangence de d_1 avec $\mathcal{C}_1$
- 9) Dessiner les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et les droites d_1 , d_2 et d_3 dans le système d'axes ci-dessous
- 10) Calculer l'angle aigu entre d_1 et d_3
- 11) Calculer l'aire entre les deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$



Partie B Géométrie dans l'espace

Soit d la droite représentée par sa trace P dans la paroi et sa trace M dans le mur.

Le point A appartient à la droite d . Le point B appartient au sol.



- 1) Représenter d_s la projection de la droite d dans le sol
- 2) Représenter les projections du point A dans les trois plans de référence. On les nommera A_s , A_M et A_P
- 3) Dans quel octant se trouve le point A ?
- 4) Soit le plan π contenant la droite d et le point B . Construire les traces de π dans les plans de référence
- 5) Hachurer la partie visible du plan π

Problème 3. Probabilités

(Poids 2)

Partie A Analyse combinatoire

Un passionné de jeux vidéo veut tester ses performances en jouant contre un système d'intelligence artificielle qui propose quatre algorithmes de jeu différents nommés A , B , C et D .

De combien de manières différentes peut-il faire chacun des essais suivants si on tient compte de l'ordre dans lequel les algorithmes sont lancés?

- 1) Jouer quatre parties chacune avec un algorithme différent
- 2) Jouer deux parties pour essayer deux algorithmes différents
- 3) Jouer cinq parties en essayant deux fois consécutives l'algorithme A et une fois chacun des trois autres algorithmes
- 4) Jouer trois parties et utiliser au moins une fois l'algorithme A
- 5) Jouer quatre parties et utiliser exactement trois fois l'algorithme A
- 6) Jouer quatre parties en utilisant les 4 algorithmes dans l'ordre suivant : $DCAB$

Partie B Probabilité

En jouant contre l'intelligence artificielle citée précédemment, la probabilité qu'un joueur réussisse lorsqu'il est confronté aux algorithmes B , C ou D est de 30 %. Cette probabilité s'élève à 60 % avec l'algorithme A , qui est réglé de manière plus favorable à la victoire.

- 1) Un joueur sélectionne aléatoirement un algorithme et joue une partie
 - a) Quelle est la probabilité qu'il choisisse l'algorithme A et réussisse ?
 - b) Quelle est la probabilité qu'il réussisse ?
 - c) Sachant qu'il a réussi, quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'algorithme A ?
- 2) Un joueur joue 10 fois avec l'algorithme A
 - a) Quelle est la probabilité qu'il réussisse exactement 2 fois ?
 - b) Quelle est la probabilité qu'il réussisse la première partie et une des 9 autres ?
 - c) Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins une fois ?
- 3) En choisissant l'algorithme A , combien de parties doit-il jouer au minimum pour que la probabilité de réussir au moins une fois soit supérieure à 99,9% ?
- 4) Deux amis (Michel et Alain) décident d'utiliser l'algorithme B et alternent pour jouer jusqu'à ce que l'un d'eux réussisse et donc le jeu s'arrête. Michel commence le jeu. On veut calculer la probabilité que ce dernier gagne à sa troisième partie.
 - a) Représenter l'expérience par un arbre de probabilité
 - b) Calculer cette probabilité

