

Raisonner et rédiger en mathématiques

PCSI1 – Lycée Joffre

Julien Cortier

23 août 2023

Table des matières

1	La rédaction et les notations en mathématiques	2
1.1	Quelques règles de rédaction	2
1.1.1	Règles générales	2
1.1.2	Dans un enchaînement de calculs ou d'assertions	3
1.1.3	Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$	3
1.1.4	Les quantificateurs	3
1.2	Les objets et notations usuelles	4
1.2.1	Les ensembles usuels de nombres	4
1.2.2	Les suites	4
1.2.3	Les fonctions	4
2	Raisonnements	5
2.1	Le raisonnement par implications ou équivalences	5
2.2	Le raisonnement par l'absurde	6
2.3	La récurrence	6

*Comme vous allez le voir toute l'année, faire des mathématiques, ce n'est pas simplement savoir faire des calculs... **Calculer** n'est d'ailleurs qu'une compétence parmi celles qui sont attendues de vous. Ce document vous donne quelques règles essentielles pour bien **raisonner** et pour **rédiger** proprement vos raisonnements.*

1 La rédaction et les notations en mathématiques

1.1 Quelques règles de rédaction

Quelle que soit la question posée, la réponse doit être bien rédigée, dans ce but :

Rendre votre cheminement de pensée clair, pour le correcteur et vous même.

Il s'agit d'*assurer à la personne relisant votre copie que vous avez compris et bien répondu à la question*. Cette personne –*a priori, elle ne vous connaît pas et ne peut pas lire dans vos pensées*– doit pouvoir se persuader de la justesse et de la rigueur de votre réponse : à vous de lui faciliter la tâche !

Une bonne rédaction facilitera également la recherche d'une éventuelle erreur de logique ou de calcul.

1.1.1 Règles générales

- **On rédige généralement en français, dans un langage correct.** Comme toujours, les phrases doivent comporter au minimum un sujet et un verbe.
- On ne mélange pas les raisonnements écrits en symboles mathématiques et ceux rédigés en français. Ainsi, les connecteurs logiques $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ou les quantificateurs $\forall$, $\exists$ ne doivent pas être employés comme abréviations à l'intérieur d'un raisonnement rédigé en français.

À titre d'exemple, on peut écrire indifféremment :

1. Soit x un réel. Alors il existe un entier n tel que : $n \leq x < n + 1$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$.

À noter le rôle joué au 1. par les « : » annonçant que l'on va écrire une phrase en symboles mathématiques.

En revanche, on n'écrit pas :

~~$\forall x \in \mathbb{R}$, il existe n entier tel que $n \leq x < n + 1$.~~

pas plus que :

~~Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x < n + 1$.~~

- Respecter la consigne « **une étape de raisonnement = une ligne** ».
 - **On introduit les notations ou les objets qui interviendront dans la suite du raisonnement**,¹, souvent à l'aide du mot « Soit ».
- À défaut, la personne qui relit peut légitimement se plaindre de ne pas savoir de quoi vous parlez !
- Avant d'entamer une longue étape : soyez gentils, **annoncez ce que vous comptez faire**.

Un exemple de question. Montrer que pour tout réel x , on a l'égalité : $|x| = \max(x, -x)$.

Une solution.

Soit $x \in \mathbb{R}$.²

Si $x \geq 0$, alors : $|x| = x$ et $\max(x, -x) = x$.

Sinon : $x < 0$, donc $|x| = -x$ et $\max(x, -x) = -x$.

Ainsi, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| = \max(x, -x)$.

Notez les mots de liaison *Soit, si, donc, ainsi* ... indispensables pour articuler le raisonnement.

Éviter l'emploi du tiret qui risque d'être confondu avec un signe « moins ».

1. De la même manière qu'un écrivain présente les personnages de son histoire avant de les mettre en action.

2. Comme vous le constatez, on tolérera l'emploi du « $\in$ » pour « appartenant à ».

1.1.2 Dans un enchaînement de calculs ou d'assertions

Dans une **suite d'égalités** un peu longue, on écrit une seule fois le signe « = » au début de chaque ligne.

Par exemple on écrira, si a, b, c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$, pour tout nombre complexe z :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right] && (\text{car } a \neq 0) \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] && (\text{où } \Delta = b^2 - 4ac). \end{aligned}$$

Ci-dessus, notez les **précisions écrites entre parenthèses pour éclairer certaines étapes ou notations**.

Idem pour un **enchaînement d'inégalités**. Par exemple, pour tous réels x et y , on a :

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &\leq (|x| + |y|)^2 && (\text{Inégalité triangulaire et croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| && (\text{Identité remarquable}) \\ &\leq 2(|x|^2 + |y|^2) && (\text{car } |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| = (|x| - |y|)^2 \geq 0). \end{aligned}$$

1.1.3 Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

Ils représentent en notations mathématiques deux connecteurs logiques, respectivement l'**implication** et l'**équivalence**. Ainsi si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux assertions, on a les correspondances entre les définitions en français et les symboles mathématiques :

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	L'assertion $\mathcal{A}$ implique l'assertion $\mathcal{B}$
$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	L'assertion $\mathcal{A}$ est équivalente à l'assertion $\mathcal{B}$

Remarques importantes :

- Une autre façon de lire $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ est : « Si $\mathcal{A}$ est vraie, alors $\mathcal{B}$ est vraie ».
- $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ est également une assertion, mais **ATTENTION** : le fait qu'elle soit vraie ne signifie en rien que $\mathcal{B}$ est vraie (erreur fréquente...).
Par exemple, si x est un réel, l'implication : $(x > 0) \Rightarrow (x + 1 > 0)$ est vraie. Pourtant, l'assertion $(x + 1 > 0)$ n'a pas de raison *a priori* d'être vraie, elle est fausse par exemple pour $x = -1$.
- Pour montrer que $\mathcal{B}$ est vraie, on montre que $\mathcal{A}$ est vraie ET que l'implication $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ est vraie.

Comme pour les enchaînements de calculs, lorsqu'on souhaite écrire en symboles un enchaînement d'implications, il convient d'écrire une seule fois le signe « $\Rightarrow$ » au début de la ligne, et de passer à la ligne suivante pour l'implication suivante.

1.1.4 Les quantificateurs

On en distingue deux, le **quantificateur universel** symbolisé par $\forall$ et le **quantificateur existentiel** symbolisé par $\exists$.

Ainsi, dans le cas d'une assertion $\mathcal{A}(x)$ dépendant d'un paramètre x (par exemple un réel), on a les correspondances entre écritures mathématique et en français :

$\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{A}(x)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout réel } x \\ \text{Quel que soit } x \text{ réel} \end{array} \right.$, l'assertion $\mathcal{A}(x)$ est vraie.
$\exists x \in \mathbb{R}, \mathcal{A}(x)$	Il existe (au moins) un réel x tel que l'assertion $\mathcal{A}(x)$ est vraie.
$\exists! x \in \mathbb{R}, \mathcal{A}(x)$	Il existe un unique réel x pour lequel $\mathcal{A}(x)$ est vraie.

1.2 Les objets et notations usuelles

1.2.1 Les ensembles usuels de nombres

Ils sont notés comme suit :

Entiers naturels	Entiers (relatifs)	Rationnels	Réels	Complexes
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$

L'ajout d'une étoile ($\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$) signifie que le nombre 0 en a été exclu.

Les rationnels sont les nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Bien sûr, une telle écriture n'est pas unique (on peut simplifier ou, au contraire, multiplier numérateur et dénominateur par un même facteur non nul, ce qui ne change pas la valeur du quotient).

Un nombre rationnel est mis sous *forme irréductible* s'il n'est pas possible de plus le simplifier.

L'ajout d'un indice « + » ou « - » comme dans $\mathbb{R}_+$ ou dans $\mathbb{Z}_-$ signifie que l'on restreint l'ensemble à ses éléments positifs (*resp.* négatifs).

1.2.2 Les suites

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une famille d'éléments d'un ensemble³, indexée par des entiers naturels.

Attention. Le choix de la lettre n pour paramétrer les termes de la suite est arbitraire : ainsi les notations $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ désignent exactement la même suite !

Lorsqu'on parle d'une suite, il faut distinguer **deux objets de natures totalement différentes** :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Un terme u_n , où $n \in \mathbb{N}$
--	---

Ainsi une suite de réels peut avoir des propriétés telles que *être monotone*, *converger* ou *être bornée*.

En revanche, un terme u_n d'une telle suite est juste un réel : on peut dire de lui qu'il est *positif*, *négatif*... mais guère plus !

Dire que u_n est borné ou croissant ne veut rien dire.

Pour exprimer qu'une suite admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cap \{-\infty, +\infty\}$, on préférera l'écriture :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

à celle que vous connaissez déjà :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Cette dernière écriture est à utiliser **uniquement si l'on sait déjà que la limite existe**.

Attention. Quelle que soit l'écriture utilisée, **la limite d'une suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **ne doit pas dépendre du paramètre** n , puisque c'est une propriété de la suite, et non d'un terme en particulier.

1.2.3 Les fonctions

Lorsqu'on parle d'une fonction, on peut désigner celle-ci...

1. Par la transformation qu'elle opère, comme dans les exemples

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} \quad , \quad t \mapsto 2 \cos^2(t) - 1 \quad , \quad s \mapsto 3e^{-s^2} \quad , \quad \dots$$

Cette écriture a l'avantage d'indiquer comment la fonction agit sur l'argument de départ.

Ainsi : $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ et $t \mapsto \sqrt{t^2 + t + 1}$ sont une seule et même fonction !

3. Le plus souvent, il s'agira de suites de nombres mais on peut aussi parler de suites de fonctions, de suites de matrices, de suites de polynômes...

2. **Par une lettre ou un symbole**, comme $f, g, A, u, \varphi \dots$ Très utile pour s'y référer lors d'un raisonnement.

Attention. Lorsqu'on utilise une telle notation, *il faut impérativement l'avoir défini au préalable.*

3. **Certaines fonctions ont une notation qui leur est propre** : $\cos, \sin, \ln, \exp, \arctan, \sqrt{}, \text{etc.}$

Comme pour les suites, si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on distingue **deux objets de natures différentes** :

La fonction f ou $x \mapsto f(x)$	L'image d'un nombre $f(x)$, où $x \in I$
--	--

On peut écrire (**égalité point par point**) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

ou encore (**égalités de fonctions**) : Si f est la fonction $x \mapsto \sin(2x)$, alors :

$$f = 2 \sin \cos .$$

De même que pour les suites, pour exprimer qu'une fonction f admet une limite ℓ en un point a , on écrira :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell .$$

2 Raisonnements

2.1 Le raisonnement par implications ou équivalences

Voir le paragraphe 1.1.3.

Remarques.

- Dans un raisonnement rédigé en français, on emploiera les mots de liaison ou expressions suivantes *Donc ; Ainsi ; Si ... Alors... ; On en déduit ; Si et seulement si ; C'est-à-dire ; ...* (la liste n'est pas exhaustive !). Voici un exemple écrit en respectant les règles de rédaction vues au 1.1.3.

Exemple. Montrer que pour tout x positif, on a $\sin(x) \leq x$.

Démonstration. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x) - x$, pour tout x réel.

Alors f est dérivable et, pour tout x réel, $f'(x) = \sin'(x) - 1 = \cos(x) - 1$,

donc il vient : $f'(x) \leq 0$.

Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que pour tout x réel positif, $f(x) \leq f(0)$,

c'est-à-dire que pour tout x positif, on a : $\sin(x) - x \leq 0$.

D'où le résultat.

- Comme le montre cet exemple, on peut être amené, pour prouver une implication, à employer les quantificateurs universels et existentiels, voir le paragraphe 1.1.4.
- Attention aux fausses équivalences!** Il vaut mieux vérifier une par une les implications $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \Leftarrow \mathcal{B}$ (et éventuellement remarquer qu'une des deux s'avère en réalité fausse !) plutôt qu'écrire trop rapidement $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ quand ce n'est pas évident.

Un exemple : Que pensez-vous de l'assertion $(x \geq 2) \Leftrightarrow (x^2 \geq 4)$?

2.2 Le raisonnement par l'absurde

Il consiste à montrer qu'une assertion $\mathcal{A}$ est vraie en prouvant que son contraire $\overline{\mathcal{A}}$ est faux. Plus précisément, on fait l'hypothèse que $\overline{\mathcal{A}}$ est vraie et on en tire des conséquences jusqu'à obtenir une contradiction ou une absurdité.

Un exemple incontournable de raisonnement par l'absurde permet de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Rappel : On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels défini par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Démonstration. Par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.

On peut **donc** écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous forme irréductible, c'est-à-dire que $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ n'ont pas de diviseur commun positif autre que 1.

Alors on a : $2 = \frac{a^2}{b^2}$, c'est-à-dire : $2b^2 = a^2$.

On en déduit que a^2 est pair, et **donc** que a est pair : il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2c$.

On obtient $2b^2 = 4c^2$, c'est-à-dire $b^2 = 2c^2$.

Donc b^2 est pair, par conséquent b aussi.

a et b sont **donc** tous les deux divisibles par 2 : contradiction !

Ainsi, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 2.1. (★) Montrer que pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, on a l'équivalence $(a \text{ est pair}) \Leftrightarrow (a^2 \text{ est pair})$.

Exercice 2.2. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de réels de l'intervalle $[0; 1]$ et tels que $x_k < x_{k+1}$, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \leq 1$.

En déduire qu'il existe $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que : $x_{k+1} - x_k \leq \frac{1}{n}$.

2.3 La récurrence

Ce mode de raisonnement porte sur des assertions à paramètre $\mathcal{A}(n)$, où n est un entier tel que $n \geq n_0$, avec $n_0 \in \mathbb{Z}$ donné.

On l'utilise lorsqu'il n'est pas évident a priori d'établir directement la véracité de $\mathcal{A}(n)$ pour tout n . Le principe de récurrence ici à l'œuvre est une conséquence des axiomes de Peano sur les entiers naturels.

On suit alors les étapes suivantes :

Méthode 2.1. Rédaction d'une récurrence.

- **(Initialisation)** On prouve $\mathcal{A}(n_0)$ (souvent $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$)
- **(Hérédité)** Soit n un entier tel que $n \geq n_0$.

Il s'agit de montrer l'implication :

$$(\mathcal{A}(n) \implies \mathcal{A}(n+1))$$

(la propriété « se propage au rang suivant »).

- **(Conclusion)** Par le principe de récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie, pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{A}(n)$ l'assertion : $\left(\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$.

- $\mathcal{A}(0)$ est vraie, car dans le cas $n = 0$, le membre de gauche vaut 0^2 , c'est-à-dire 0, tout comme le membre de droite.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{A}(n)$ est vraie.
Calculons alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad (\text{car } \mathcal{A}(n) \text{ est vraie}) \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \quad (\text{en factorisant par } n+1) \\ &= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} \quad (\text{en développant dans le crochet}). \end{aligned}$$

Or, on peut factoriser : $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, de sorte qu'on a effectivement :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

autrement dit, $\mathcal{A}(n+1)$ est vérifiée.

- Par le principe de récurrence, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $\mathcal{A}(n)$ est vraie.

Attention. Il faut absolument s'assurer que lors de l'étape **hérédité**, celle-ci s'applique bien en particulier au rang n_0 de l'initialisation.

Exercice 2.3. (★★) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que :

- $a_0 = 0$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq n$.

Exercice 2.4. (★★) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

Récurrence double, multiple La méthode suivante est utile lorsqu'une assertion à paramètre $\mathcal{A}(n)$, où $n \geq n_0$, semble dépendre de $\mathcal{A}(n-1)$ et $\mathcal{A}(n-2)$...

Méthode 2.2. Récurrence double.

- On établit l'initialisation sur deux rangs : $\mathcal{A}(n_0)$ et $\mathcal{A}(n_0+1)$.
- Soit n un entier tel que $n \geq n_0$.
On suppose que les assertions $\mathcal{A}(n)$ et $\mathcal{A}(n+1)$ sont vraies avant d'établir $\mathcal{A}(n+2)$.
- On conclut par le principe de récurrence que $\mathcal{A}(n)$ est vraie, pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n de la suite de Fibonacci⁴ est entier.

Démonstration.

- u_0 et u_1 sont bien entiers par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n et u_{n+1} sont entiers.
Alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est entier comme somme d'entiers.
- On conclut par le principe de récurrence que u_n est entier, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.5. (★) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2, u_1 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.

Remarque 2.1. On peut faire de même des **réurrences multiples** en initialisant sur p rangs (où $p \in \mathbb{N}^*$) et, à l'étape hérédité, étant donné $n \geq n_0$, supposer que $\mathcal{A}(n), \mathcal{A}(n+1), \dots, \mathcal{A}(n+p-1)$ sont vraies et établir que $\mathcal{A}(n+p)$ est vraie.

Récurrence forte C'est une autre variante... Mais après l'initialisation, étant donné un entier $n \geq n_0$, l'hérédité est remplacée par l'hypothèse que toutes les assertions $\mathcal{A}(k)$ sont vraies, pour tout entier k tel que $n_0 \leq k \leq n$. Il s'agit alors d'établir que $\mathcal{A}(n+1)$ est vraie.

Remarque 2.2. Une récurrence forte portant sur les assertions $\mathcal{A}(n)$ n'est rien d'autre qu'une récurrence simple sur les assertions $\mathcal{B}(n)$ définies par $\mathcal{B}(n) = (\mathcal{A}(k), \forall k \in \{n_0, \dots, n\})$.

Exemple 2.2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p, q \in \mathbb{N}, n = 2^p(2q+1)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{A}(n)$ l'assertion $(\exists q \in \mathbb{N}, n = 2^p(2q+1))$.

- $\mathcal{A}(1)$ est vraie, en effet, le couple $(p, q) = (0, 0)$ convient : $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{A}(k)$ est vraie pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

On distingue deux cas :

- Si $n+1$ est impair :

Il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n+1 = 2q+1 = 2^0(2q+1)$, avec $q \in \mathbb{N}$ car $n+1 \geq 1$.

Donc le couple $(0, q)$ convient pour $n+1$.

- Si $n+1$ est pair :

Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2m$. Comme par ailleurs $n+1 \geq 2$ par hypothèse sur n , on a $1 \leq m < n+1$, donc $m \in \{1, \dots, n\}$.

Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{A}(m)$ est alors vraie, c'est-à-dire qu'il existe une couple $(p', q') \in \mathbb{N}^2$ tel que $m = 2^{p'}(2q'+1)$. Il vient alors

$$n+1 = 2m = 2^{p'+1}(2q'+1).$$

Ainsi, le couple $(p, q) = (p'+1, q') \in \mathbb{N}^2$ convient pour $n+1$.

Compte-tenu de ces deux cas, $\mathcal{A}(n+1)$ est vraie, ce que l'on voulait.

- **Conclusion :** $\mathcal{A}(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.6. (★★) On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

4. Définie par les conditions : $u_0 = 1, u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.