

CONCOURS D'ENTRÉE EN 1<sup>ère</sup> ANNEE  
SESSION D'AOUT 2015

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Sans document

*N.B. N'utiliser que la feuille de composition mise à votre disposition. La copie ne doit pas être signée et ne devra porter aucun signe distinctif.*

Exercice 1 (5 pts)

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants : chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs; chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire. (1 pt)
2. Quelle est la probabilité
  - a) qu'il soit malade et qu'il ait un test positif? (0,5 pt)
  - b) qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif? (0,5 pt)
  - c) qu'il ait un test positif? (0,5 pt)
  - d) qu'il ait un test négatif? (0,5 pt)
3. Calculer la probabilité
  - a) qu'il ne soit pas malade sachant que le test est positif. (1 pt)
  - b) qu'il soit malade sachant que le test est négatif. (1 pt)

Exercice 2 (5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 2 cm).  $B, C, D$  sont des points du plan tels  $OBCD$  soit un rectangle avec  $B$  et  $D$  d'affixes respectifs 1 et  $2i$ .

1. Déterminer l'affixe du point du  $C$ . (0,5 pt)
2. Faire une figure. (0,5 pt)
3. Soit  $M$  le milieu de  $[BC]$  et soit  $s$  la similitude directe telle que  $s(O) = M$  et  $s(B) = D$ .
  - a) Déterminer l'écriture complexe de  $s$ . (1 pt)
  - b) Déterminer les éléments caractéristiques de  $s$ . On désignera par  $\Omega$  son centre. (1 pt)
4. Soit  $I$  le symétrique de  $D$  par rapport à  $M$ . Démontrer que les points  $O, \Omega, M$  et  $I$  appartiennent à un même cercle  $(C)$ . Vérifier que  $B$  est le centre de  $(C)$  et donner son rayon. Construire le cercle  $(C)$ . (2 pts)

Problème (10 pts)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}.$$

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ; unité graphique : 4cm.

A/ Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = x + 2 - e^x$ .

1. Etudier le sens de variation de  $g$  et déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
2. a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule  $\alpha$  dans  $[0; +\infty[$ .  
b) Prouver que  $1,14 < \alpha < 1,15$ .
3. En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

B/

1. a) Montrer que pour tout  $x$  positif,

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

- b) En déduire le sens de variation de  $f$ .

2. a) Montrer que pour tout réel positif  $x$ ,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

- b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat.

3. a) Etablir que

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

- b) Donner un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe  $C$  au point d'abscisse 0.

5. a) Etablir que pour  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ ,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1} \text{ avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$

- b) Etudier le sens de variation de  $u$  sur  $[0; +\infty[$ . En déduire le signe de  $u(x)$ .

- c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe  $C$  par rapport à la droite (T).

6. Tracer  $C$  et (T).

C/

1. Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
2. On note  $D$  le domaine délimité par la courbe  $C$ , la tangente (T) et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Calculer en  $cm^2$  l'aire  $A$  du domaine  $D$ .

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

- a) Calculer  $v_0, v_1$  et  $v_2$ .
- b) Interpréter graphiquement  $v_n$ .
- c) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

En déduire la monotonie de la suite  $(v_n)$  à partir de  $n = 1$ .

- d) Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ .

Institut Africain d'Informatique, BP 2263 Libreville (GABON), Tel (241) 07 70 55 00

CONCOURS D'ENTRÉE EN 1<sup>re</sup> ANNÉE DU CYLCE DE FORMATION DES  
ANALYSTES-PROGRAMMEURS  
SESSION 2016

Epreuve de Mathématiques générales

Durée : 4 heures. Sans document. Coefficient 06.

Ce sujet comporte trois (03) pages.

N.B. N'utiliser que la feuille de composition mise à votre disposition. La copie ne doit pas être signée et ne devra porter aucun signe distinctif.

Exercice 1 (4 points)

On pose  $I_0 = \int_1^e x dx$  et, pour tout  $n$  entier naturel non nul :  $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Établir la relation  $2I_n + nI_{n-1} = e^2$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ . Calculer  $I_2$
3. .

(a) Montrer que la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.

(b) En déduire, en utilisant la relation de récurrence précédente, l'encadrement

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$$

(c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .

Exercice 2 (6 points)

1. Déterminer le terme général de la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{16}u_{n-1}$$

$$\text{avec } u_0 = \sqrt{3} \text{ et } u_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

2. Résoudre l'équation  $u_n = 0$  pour calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

Exercice 3 (10 points). On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (x+1)e^{-2x} + 1 - x$$

et on désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ , d'unité graphique : 2 cm.

**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$ , par :  $g(x) = 2x + 1 + e^{2x}$

1. Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variation.
3.
  - (a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - (b) Trouver le nombre entier  $p$  tel que  $p \times 10^{-2} \leq \alpha \leq (p+1) \times 10^{-2}$
  - (c) En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Partie B : Étude de la fonction  $f$ .**

1.
  - (a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - (b) Démontrer que pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-2x}[x+1 + (1-x)e^{2x}]$ .  
En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
2.
  - (a) Démontrer que pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -e^{-2x}g(x)$ .
  - (b) Étudier le sens de variation de  $f$ .
  - (c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - (d) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{-2\alpha^2}{2\alpha+1}$ .
3.
  - (a) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -x + 1$  est asymptote à la courbe  $(C)$ .

(b) Étudier la position relative de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$ .

(c) Tracer avec soin la courbe  $(C)$  et la droite  $(\Delta)$ .

*Partie C : Calcul d'intégrale.*

1. .

(a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale  $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 (x+1) e^{-2x} dx$ .

(b) Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

2. Montrer que

$$I(\alpha) = \frac{-1}{4} \left( \frac{2\alpha + 3}{2\alpha + 1} \right) - \frac{3}{4}$$



## CONCOURS D'ENTREE EN 1<sup>ère</sup> ANNEE / SEPTEMBRE 2018

### Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 h

#### Exercice 1

1. On considère le polynôme  $P$  de la variable  $z$  défini par

$$P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}.$$

- (a) Montrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une solution imaginaire pure  $z_0$ .
- (b) Trouver deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$ , on ait

$$P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b).$$

- (c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $P(z) = 0$ .

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 1 cm pour unité graphique.

- (a) Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $I$  d'affixes respectives  $z_A = -7 + 5i$ ,  $z_B = -7 - 5i$  et  $z_I = i\sqrt{2}$ .
- (b) Déterminer l'affixe de l'image du point  $I$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$ .
- (c) Placer le point  $C$  d'affixe  $z_C = 1 + i$ . Déterminer l'affixe du point  $N$  tel que  $ABCN$  soit un parallélogramme.
- (d) Placer le point  $D$  d'affixe  $z_D = 1 + 11i$ . Calculer  $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Que peut-on dire des droites  $(AC)$  et  $(BD)$ ? En déduire la nature du quadrilatère  $ABCD$ .

#### Exercice 2

A/ Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on considère l'intégrale  $I_n$  définie par  $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$ .

1. Calculer  $I_2$ .
2. (a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1 - n)I_n.$$

- (b) Calculer  $I_3$  et  $I_4$ .

B/ On considère les intégrales  $I$  et  $J$  ci-dessous

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2x) \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - 1) \sin^2 x dx$$

1. Calculer  $I - J$ .
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I + J$ .
3. En déduire  $I$  et  $J$ .

#### Problème

##### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$ . On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité 2 cm.

1. (a) Calculer les dérivées première  $f'$  et seconde  $f''$  de  $f$ .  
 (b) Étudier le sens de variation de  $f'$  et en déduire le signe de  $f'(x)$ .  
 (c) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. (a) Démontrer que la droite  $(\Delta) : y = x + 1$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  en  $+\infty$  et préciser la position relative de  $(\Delta)$  et  $(\mathcal{C})$ .  
 (b) Déterminer les coordonnées du point  $K$  en lequel la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  est parallèle à la droite  $(\Delta)$ .  
 (c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Conclure.
3. Démontrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$ .
4. Construire  $(\Delta)$ ,  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$ .
5. (a) À l'aide d'une intégration par partie calculer  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ .  
 (b) En déduire l'aire du domaine limité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

#### Partie B

On définit sur  $[0, 1]$  la fonction  $h$  par  $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ .

1. Démontrer que  $h(\alpha) = \alpha$ .
2. À l'aide de la variation de  $h$ , montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $h(x) \in [0, 1]$ .
3. (a) Vérifier que  $h''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$ .  
 (b) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|h'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .
4. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = h(u_n)$ .  
 (a) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, 1]$ .  
 (b) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ .  
 (c) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{4})^n$ .  
 (d) Quelle est la limite de  $(u_n)$ .  
 (e) Déterminer le plus petit entier  $p$  tel que  $|u_p - \alpha| \leq 10^{-6}$ .



## Institut Africain d'Informatique

Établissement Inter – États d'Enseignement Supérieur  
BP 2263 Libreville (Gabon) Tél. (241) 07 70 55 00 - 07 70 56 00

Site web: [www.iaisiege.net](http://www.iaisiege.net) E-mail : [contact@iaisiege.net](mailto:contact@iaisiege.net)

### CONCOURS D'ENTREE EN 1<sup>ère</sup> ANNEE DU CYCLE DE FORMATION DES ANALYSTES-PROGRAMMEURS & LICENCES PROFESSIONNELLES POUR L'ANNEE ACADEMIQUE 2017-2018

#### Epreuve de Mathématique

**NB.** Durée : 4 heures. Coefficient 6. Sans documents. Chaque copie ne doit pas être signée et ni porter de signe distinctif, faute de nullité. Utiliser exclusivement les copies vierges fournies.

#### Exercice 1 (9 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x}$$

On notera  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, i, j)$  (unités graphique: 4cm).

1. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $[0 ; +\infty[$ , on a :

a)  $f(x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 + xe^{-x}}$ .

b) En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Calculer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  puis montrer que :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + x)^2}$  avec  $g(x) = xe^x - 2e^x - 1$ .

3. Etudier la fonction  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$  puis dresser son tableau de variation complet.

- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0 ; +\infty[$ .
- En déduire le signe de  $g$  et le sens de variation de  $f$ .
- Dresser le tableau de variation complet de  $f$ .
- Construire la courbe  $C$  et la droite d'équation  $y=1$  dans le repère défini ci-dessus. (Prendre  $\alpha \approx 2,1$  et  $f(\alpha) \approx 0,9$ ).

4. On note  $\Delta$  l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine ( $\Omega$ ) délimité par la courbe C, l'axe des ordonnées et les droites d'équation  $x = 1$  et  $y = 1$ .
- Hachurer le domaine ( $\Omega$ ).
  - Déterminer F, la fonction primitive de f puis en déduire la valeur exacte de  $\Delta$  puis en donner la valeur exacte de  $\Delta$  et en donner une valeur approchée arrondie au  $\text{cm}^2$  près.

### Exercice 2 (6 points)

Une personne loue un appartement à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2007.

Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est 600.000 f cfa et le locataire s'engage à occuper l'appartement pendant six années complètes.

1. Contrat n°1.

Le locataire accepte une augmentation annuelle de 10% du loyer de l'année précédente. Si l'on note  $U_0$  le loyer annuel pour 2007,  $U_1$  le loyer annuel pour 2008, calculer  $U_n$  le loyer annuel pour l'année (2007 + n).

Calculer  $S_6$  la somme payée à l'issue des six années du contrat.

2. Contrat n°2

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 70.000 f cfa du loyer de l'année précédente. Si l'on note  $V_0$  le loyer annuel pour 2007,  $V_1$  le loyer annuel pour 2008, calculer  $V_n$  le loyer annuel pour l'année (2007 + n).

Calculer  $S'_6$  la somme à payer à l'issue des six années du contrat. Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?

### Exercice 3 (5 points)

Soit A et B deux événements, on donne  $P(A) = \frac{1}{6}$ ,  $P(B) = \frac{1}{5}$  et  $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ .

- Montrer que les événements A et B sont indépendants.
- Calculer la probabilité des événements suivants :
  - A et B se produisent.
  - A seulement se produit.
  - Ni A, ni B ne se produisent.
  - Un seul des deux événements se produit.