

Trigonométrie circulaireArcs remarquables

α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha & \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha & \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cot \alpha & \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan \alpha \\
\cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha & \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha & \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha & \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \\
\cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha & \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha & \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha & \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha
\end{aligned}$$

Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} & \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\
\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha & \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\
\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha & \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\
\tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} & \tan 3\alpha &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}
\end{aligned}$$

Somme $\rightarrow$ produit

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\
\tan p + \tan q &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} & \cot p + \cot q &= \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}
\end{aligned}$$

Produit $\rightarrow$ somme

$$\begin{aligned}
\cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] & \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \\
\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] & \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]
\end{aligned}$$

En fonction de $t = \tan \frac{\alpha}{2}$

$$\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

Trigonométrie hyperboliqueDéfinitions

$\cosh$ (cosinus hyperbolique) et $\sinh$ (sinus hyperbolique) sont respectivement les parties paire et impaire de la fonction exponentielle :

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

$$\coth u = \frac{1}{\tanh u}$$

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

$$\cosh u + \sinh u = e^u$$

$$\cosh u - \sinh u = e^{-u}$$

Formules d'addition

$$\cosh(u+v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v$$

$$\cosh(u-v) = \cosh u \cosh v - \sinh u \sinh v$$

$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v$$

$$\sinh(u-v) = \sinh u \cosh v - \cosh u \sinh v$$

$$\tanh(u+v) = \frac{\tanh u + \tanh v}{1 + \tanh u \tanh v}$$

$$\tanh(u-v) = \frac{\tanh u - \tanh v}{1 - \tanh u \tanh v}$$

$$\cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u = 2 \cosh^2 u - 1 = 2 \sinh^2 u + 1$$

$$\sinh 2u = 2 \sinh u \cosh u$$

$$\tanh 2u = \frac{2 \tanh u}{1 + \tanh^2 u}$$

Somme $\rightarrow$ produit

$$\cosh p + \cosh q = 2 \cosh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2}$$

$$\cosh p - \cosh q = 2 \sinh \frac{p+q}{2} \sinh \frac{p-q}{2}$$

$$\sinh p + \sinh q = 2 \sinh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2}$$

$$\sinh p - \sinh q = 2 \cosh \frac{p+q}{2} \sinh \frac{p-q}{2}$$

Produit $\rightarrow$ somme

$$\cosh u \cosh v = \frac{1}{2} [\cosh(u+v) + \cosh(u-v)]$$

$$\sinh u \sinh v = \frac{1}{2} [\cosh(u+v) - \cosh(u-v)]$$

$$\sinh u \cosh v = \frac{1}{2} [\sinh(u+v) + \sinh(u-v)]$$

$$\cosh u \sinh v = \frac{1}{2} [\sinh(u+v) - \sinh(u-v)]$$

En fonction de $t = \tanh \frac{u}{2}$

$$\cosh u = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$\sinh u = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\tanh u = \frac{2t}{1+t^2}$$

Dérivées et primitives

Dans le tableau qui suit u est, à priori, une fonction de x et u' sa dérivée. On note $F=f \circ u$ la fonction composée de f par u ; pour avoir la dérivée de la fonction $f(x)$ il suffit de remplacer u par x et u' par 1.

Rappel très important : si $F=f \circ u$ alors $F'=u' \cdot f'(u)$

F	F'	F	F'
u^n	$nu'u^{n-1}$ *	uv	$u'v + uv'$
$u + v$	$u' + v'$ *	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$ *
$\sin u$	$u' \cos u$ *	$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\cos u$	$-u' \sin u$ *	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$ *	$\arctan u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\cot u$	$-\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$ *	$\operatorname{arccot} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$
e^u	$u'e^u$ *	a^u	$u'a^u \ln a$ ($a > 0$) *
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$ *	$\log_a u$	$\frac{u'}{u} \log_a e$ *
$\sinh u$	$u' \cosh u$ *	$\operatorname{argsh} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
$\cosh u$	$u' \sinh u$ *	$\operatorname{argch} u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$ ($u > 1$)
$\tanh u$	$\frac{u'}{\cosh^2 u}$	$\operatorname{argth} u$	$\frac{u'}{1-u^2}$ ($u^2 < 1$)
$\coth u$	$-\frac{u'}{\sinh^2 u}$	$\operatorname{argcoth} u$	$\frac{u'}{1-u^2}$ ($u^2 > 1$)

Dans ce tableau toutes les fonctions sont supposées définies sur l'intervalle d'intégration.

$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ *	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ *	$\int \sin u du = -\cos u + C$ *	$\int \cos u du = \sin u + C$ *
$\int \tan u du = -\ln \cos u + C$ *	$\int \cot u du = \ln \sin u + C$	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \tan \frac{u}{2} \right + C$	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \tan \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$	$\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$ *	$\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$
$\int e^u du = e^u + C$ *	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ *	$\int \sinh u du = \cosh u + C$ *	$\int \cosh u du = \sinh u + C$ *
$\int \tanh u du = \ln \cosh u + C$	$\int \coth u du = \ln \sinh u + C$	$\int \frac{du}{\sinh u} = \ln \left \tanh \frac{u}{2} \right + C$	$\int \frac{du}{\cosh u} = 2 \operatorname{arctan} e^u + C$
$\int \frac{du}{\sinh^2 u} = -\coth u + C$	$\int \frac{du}{\cosh^2 u} = \tanh u + C$	$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$	$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+u}{1-u} \right + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{argsh} u + C = \ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C$		$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \ln u + \sqrt{u^2-1} + C$

* : **à savoir absolument !**

Développements limitésFormule de Taylor-Young

Si la fonction f est définie, continue et pourvue de dérivées successives jusqu'à l'ordre n sur un intervalle I contenant x_0 , le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0 s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Formule de Mac-Laurin

Ce développement correspond à un développement de Taylor au voisinage de $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!} \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Développements limités usuels au voisinage de $x_0 = 0$

On utilise la notation de Landau : $\frac{(x-x_0)^n}{n!} \varepsilon(x) = o((x-x_0)^n)$

A savoir absolument :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ d'où l'on tire : } e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \text{ d'où l'on tire : } \ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^7)$$

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \text{ (facile à retenir : c'est la partie impaire de } e^x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \text{ (facile à retenir : c'est la partie paire de } e^x)$$

Un peu moins utiles (en physique !) :

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} - \dots - \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + o(x^7)$$

$$\arg \tanh x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

$$M = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \Big|_{\text{cart}}$$

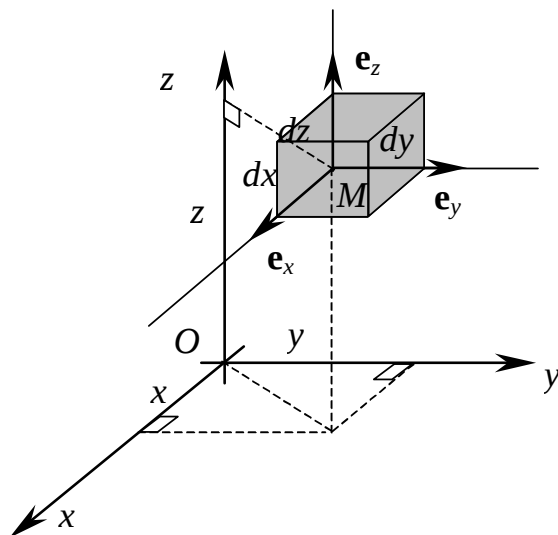
Domaines de définition : $x, y, z \in \mathbb{R}$

Vecteur position : $\mathbf{OM} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$

Déplacement élémentaire : $d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$

$$\text{Surfaces élémentaires : } \begin{cases} dx\mathbf{e}_x \wedge dy\mathbf{e}_y = dx dy \mathbf{e}_z \\ dy\mathbf{e}_y \wedge dz\mathbf{e}_z = dy dz \mathbf{e}_x \\ dz\mathbf{e}_z \wedge dx\mathbf{e}_x = dz dx \mathbf{e}_y \end{cases}$$

Volume élémentaire : $dx dy dz$



Coordonnées cylindriques

$$M = \begin{matrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{matrix} \Big|_{\text{cyl}}$$

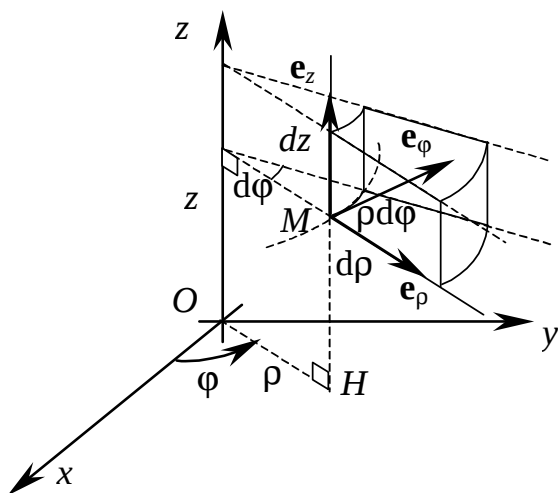
Définitions et domaines de définition : $\begin{cases} \rho = (OH), \rho \in \mathbb{R}^+ \\ \varphi = (Ox, \mathbf{OH}), \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases}$

Vecteur position : $\mathbf{OM} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$

Déplacement élémentaire : $d\mathbf{l} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi + dz\mathbf{e}_z$

$$\text{Surfaces élémentaires : } \begin{cases} d\rho\mathbf{e}_\rho \wedge \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi = \rho d\rho d\varphi \mathbf{e}_z \\ \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi \wedge dz\mathbf{e}_z = \rho d\varphi dz \mathbf{e}_\rho \\ dz\mathbf{e}_z \wedge d\rho\mathbf{e}_\rho = d\rho dz \mathbf{e}_\varphi \end{cases}$$

Volume élémentaire : $\rho d\rho d\varphi dz$



Coordonnées sphériques

$$M = \begin{matrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{matrix} \Big|_{\text{sph}}$$

Définitions et domaines de définition : $\begin{cases} r = (OM), r \in \mathbb{R}^+ \\ \theta = (Oz, \mathbf{OM}), \theta \in [0, \pi] \\ \varphi = (Ox, \mathbf{OH}), \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases}$

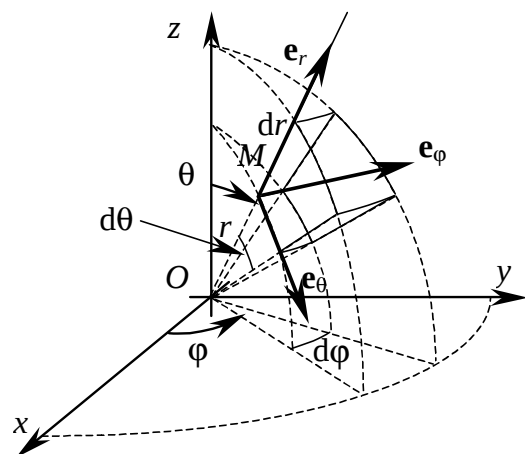
(H a la même définition que sur le schéma des coordonnées cylindriques)

Vecteur position : $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$

Déplacement élémentaire : $d\mathbf{l} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$

$$\text{Surfaces élémentaires : } \begin{cases} dr\mathbf{e}_r \wedge r d\theta\mathbf{e}_\theta = r dr d\theta \mathbf{e}_\varphi \\ r d\theta\mathbf{e}_\theta \wedge r \sin \theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r \\ r \sin \theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi \wedge dr\mathbf{e}_r = r \sin \theta dr d\varphi \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

Volume élémentaire : $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$



Opérateur gradient

Définition :

On appelle **gradient** au point M du champ scalaire $f(M)$ le vecteur noté **grad** $f(M)$ tel que :

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{grad} f(M) \cdot d\mathbf{l}(M) = \int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A)$$

où $d\mathbf{l}(M)$ désigne le vecteur déplacement élémentaire au point M appartenant à la courbe $\widehat{AB}$.

Sous forme différentielle : $df(M) = \mathbf{grad} f(M) \cdot d\mathbf{l}(M)$.

Propriétés

- * L'opérateur gradient transforme un champ scalaire en champ vectoriel.
- * Le vecteur **grad** $f(M)$ est :
perpendiculaire aux surfaces isoscales $f = \text{cte}$
orienté dans le sens des f croissants
- * Par sa définition même, la circulation du vecteur **grad** f est indépendante du chemin suivi, **grad** f est donc à circulation conservative. Réciproquement, si un champ vectoriel $\mathbf{F}(M)$ est à circulation conservative, il existe un champ scalaire $U(M)$, défini à une constante additive près, tel que $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} U$; on dit alors que $\mathbf{F}$ dérive du potentiel scalaire U .

Expressions dans les différents systèmes de coordonnées

$$\mathbf{grad} f = \begin{array}{c|c} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right|_{\text{cart}} & \left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right|_{\text{cyl}} & \left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{array} \right|_{\text{sph}} \end{array}$$