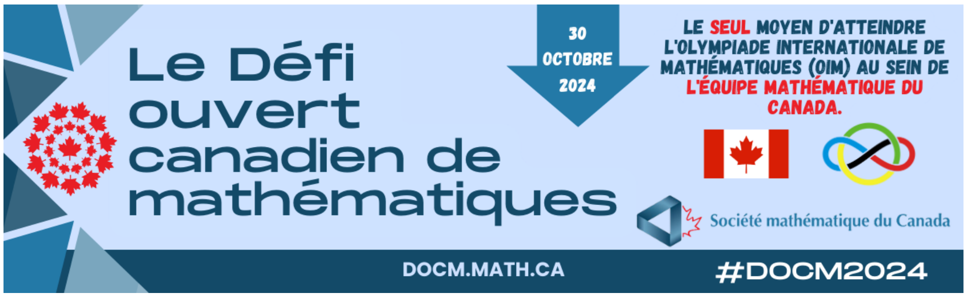
2024 Défi ouvert canadien de mathématiques

Solutions officielles (v.2)



Un concours de la Société mathématique du Canada.

Le DOCM comprend trois sections :

A. Des questions à réponse courte valant 4 points chacune. La totalité des points sera attribuée si la réponse est correcte. Des notes partielles peuvent être attribuées pour le travail démontré si la réponse n'est pas correcte.

B. Des questions à réponse courte valant 6 points chacune. La totalité des points sera attribuée si la réponse est correcte. Des notes partielles peuvent être attribuées pour le travail démontré si la réponse n'est pas correcte.

C. Des questions à solutions complètes en plusieurs parties, valant 10 points chacune. Les solutions doivent être complètes et clairement présentées pour obtenir la totalité des points.

Section A

A1 Deux sites A et B sont reliés par un sentier de 5 miles qui comporte un belvédère C. Un groupe de 15 randonneurs est parti de A et a marché le long du sentier jusqu'à C. Un autre groupe de 10 randonneurs est parti de B et a marché le long du sentier jusqu'à C. La distance totale parcourue jusqu'à C par tous les randonneurs du groupe parti de A est égale à la distance totale parcourue jusqu'à C par tous les randonneurs du groupe parti de B. Trouvez la distance (en miles) de A à C le long du sentier.

Solution : Soit x la distance de A à C. Alors la distance de B à C est $5-x$. La distance totale parcourue jusqu'à C par tous les randonneurs du groupe parti de A est de $15x$. $15x$. La distance totale parcourue jusqu'à C par tous les randonneurs du groupe parti de B est de $10(5-x)$. On a besoin de $15x = 10(5-x)$. Alors $25x = 50$, de sorte que $x = 2$.

Réponse : $\boxed{2}$.

A2 Alice et Bob courent autour d'un bâtiment rectangulaire de 100 mètres par 200. Ils commencent au milieu d'un côté de 200 mètres et courent dans la même direction, Alice courant deux fois plus vite que Bob. Après que Bob a fait un tour du bâtiment, quelle fraction du temps Alice et Bob ont-ils passé sur le même côté du bâtiment ?

Solution : Le périmètre du bâtiment est de 600 m. Lorsque Alice a parcouru les 100 premiers mètres jusqu'au coin, Bob a parcouru les 50 premiers mètres. Pendant ce temps, ils courent du même côté du bâtiment. Une situation similaire se produira à la fin lorsque Alice parcourra les 100 derniers mètres de son deuxième tour et que Bob parcourra ses 50 derniers mètres. On a $\frac{50+50}{600} = \frac{1}{6}$.

Réponse : $\boxed{\frac{1}{6}}$.

A3 Colleen a trois chemises (une rouge, une verte et une bleue), trois jupes (une rouge, une verte et une grise), trois écharpes (une rouge, une bleue et une grise), et trois chapeaux (un vert, un bleu et un gris). De combien de façons peut-elle choisir une chemise, une jupe, une écharpe et un chapeau, de sorte que deux des quatre vêtements soient d'une couleur et que les deux autres soient d'une couleur différente ?

Solution :

Classons les informations dans un tableau et observons que chaque paire d'éléments a deux couleurs en commun.

chemises	*rouge*	*vert*	*bleu*	
jupes	*rouge*	*vert*		*gris*
écharpes	*rouge*		*bleu*	*gris*
chapeaux		*vert*	*bleu*	*gris*

Pour satisfaire à la règle, par exemple, une chemise et une jupe peuvent être toutes deux rouges ou toutes deux vertes. En même temps, une écharpe et un chapeau peuvent être tous les deux bleus ou tous les deux gris.

Il y a trois façons de choisir les paires qui sont de la même couleur. Par exemple, on peut associer une chemise à une jupe, à une écharpe ou à un chapeau ; les deux articles restants forment alors une autre paire.

Ensuite, il y a deux façons de choisir une couleur pour la première paire et deux autres façons de choisir une couleur pour la paire restant. Au total, on a $3 \times 2 \times 2 = 12$.

Réponse : $\boxed{12}$.

A4 Considérons une suite de nombres pairs consécutifs débutant par 0 et disposés en rangées sous forme échelonnée, où chaque rangée contient un nombre de plus que la rangée précédente. Le début de cette suite est illustré ci-dessous :

$$\begin{array}{lllll} 0 \\ 2 & 4 \\ 6 & \underline{8} & 10 \\ 12 & 14 & 16 & 18 \\ 20 & 22 & 24 & 26 & 28 \end{array}$$

Le nombre au milieu de la troisième rangée est 8. Quel est le nombre au milieu de la 101^e rangée ?

Solution : On peut observer le patron qui se profile en regardant les nombres au milieu de chaque rangée dont le rang est un nombre impair.

$$\begin{array}{lllllll} \underline{0} \\ 2 & 4 \\ 6 & \underline{8} & 10 \\ 12 & 14 & 16 & 18 \\ 20 & 22 & \underline{24} & 26 & 28 \\ 30 & 32 & 34 & 36 & 38 & 40 \\ 42 & 44 & 46 & \underline{48} & 50 & 52 & 54 \end{array}$$

Il s'agit de 0, 8, 24, 48. Les nombres sont de la forme $n^2 - 1$, où $n = 1, 3, 5, 7$.

De façon alternative, on remarque les chiffres au début et à la fin de chaque rangée dont le rang est un nombre impair :

Rangée	*Début*	*Fin*
1	$0 = 1 \times 0$	$0 = 0 \times 3$
3	$6 = 3 \times 2$	$10 = 2 \times 5$
5	$20 = 5 \times 4$	$28 = 4 \times 7$
7	$42 = 7 \times 6$	$54 = 6 \times 9$
n	$n \times (n-1)$	$(n-1) \times (n+2)$

Ainsi, au début de chaque rangée de rang n on a un nombre de la forme $n(n-1) = n^2 - n$, tandis qu'à la fin de la même rangée on a un nombre $(n-1)(n+2) = n^2 + n - 2$.

Le nombre au milieu d'une rangée de rang $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ est une moyenne des deux nombres aux extrémités de cette rangée. On obtient ainsi $\frac{1}{2}(n^2 - n + n^2 + n - 2) = n^2 - 1$.

Si $n = 101$, alors $n^2 - 1 = 10200$.

Réponse : $\boxed{10\,200}$.

Section B

B1 Pour tout nombre entier positif k, la factorielle $k!$ est définie comme le produit de tous les entiers compris entre 1 et k inclusivement : $k! = k \times (k-1) \times \cdots \times 1$

Soit $s(n)$ la somme des n premières factorielles, c'est-à-dire

$$s(n) = \underbrace{n \times (n-1) \times ... \times 1}_{n!} + \underbrace{(n-1) \times (n-2) \times ... \times 1}_{(n-1)!} + \cdots + \underbrace{2 \times 1}_{2!} + \underbrace{1}_{1!}$$

Trouvez le reste de la division de $s(2024)$ par 8.

Solution :

On soutient que $s(n)$ donne un reste de 1 lorsqu'il est divisé par 8, et ce, quel que soit $n \neq 2$.

En essayant les premiers cas, on trouve que $s(2)$ donne un reste de 3 lorsqu'il est divisé par 8.

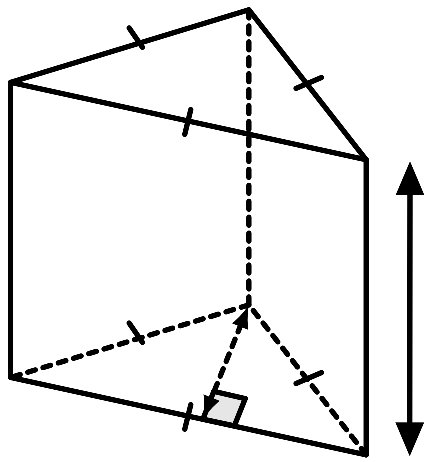
n	$s(n)$	$s(n) \mod 8$
1	1	1
2	3	3
3	9	1
4	9+24	1

On remarque qu'à partir de $n = 4$, n factoriel aura toujours un facteur de $4 \times 3 \times 2$ et sera toujours divisible par 8, ne contribuant en rien au reste.

Par conséquent, $s(n) \mod 8 = 1$ pour tout $n \geq 3$. En particulier, le reste de la division de $s(2024)$ par 8 est 1.

Réponse : $\boxed{1}$.

B2 David voulait calculer le volume d'un prisme à base triangulaire équilatérale. On lui a donné la hauteur du prisme $H = 15$ et la hauteur de la base $h = 6$. Il a accidentellement interverti les valeurs de H et h dans ses calculs. Par quel nombre doit-il multiplier son résultat afin d'obtenir le bon volume ?



Solution : Le volume d'un prisme est $V = H \times A$, où H est la hauteur du prisme A et est l'aire de la base.

L'aire de la base triangulaire est $A = \frac{1}{2}ah$ où a est la longueur d'un côté du triangle et h la hauteur correspondante du triangle. Puisque le triangle est équilatéral, tous ses côtés sont égaux et tous les angles sont de 60°. Par conséquent, $a = 2htan(30°)$ et donc $A = h^2 \tan(30°)$.

La réponse correcte pour la volume est $V = Hh^2 \tan(30°)$. La réponse erronée est $V' = hH^2 \tan(30°)$. Et leur rapport est

$$\frac{V}{V'} = \frac{Hh^2 \tan(30°)}{hH^2 \tan(30°)} = \frac{h}{H} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0.4$$

David doit donc multiplier son résultat par 0,4 pour obtenir le bon volume.

<u>Réponse :</u> $\boxed{0.4}$.

B3 Soient a, b, c et d quatre entiers distincts ($a \neq b \neq c \neq d$) tels que:

$$\begin{aligned} \min(a, b) &= 2 \\ \min(b, c) &= 0 \\ \max(a, c) &= 2 \\ \max(c, d) &= 4 \end{aligned}$$

Ici, $\min(a, b)$ et $\max(a, b)$ désignent respectivement le minimum et le maximum de deux nombres a et b.

Déterminez la cinquième plus petite valeur possible pour $a + b + c + d$.

Solution :

$$\begin{aligned} \min(a, b) &= 2 \quad (1) \\ \min(b, c) &= 0 \quad (2) \\ \max(a, c) &= 2 \quad (3) \\ \max(c, d) &= 4 \quad (4) \end{aligned}$$

D'après les énoncés (1) et (2), on peut conclure que $c = 0 \leq b$ et que $2 \leq b$ et $2 \leq a$. De l'énoncé (3), on sait alors que $a = 2$, et de (4), il résulte que $d = 4$. Notons que $b \geq 2$ reste inconnu et puisque a, b, c et d sont distincts, on a $b \neq 0, 2, 4$. Par conséquent, $a + b + c + d = 2 + b + 0 + 4 = b + 6$, où b peut être 3 ou $b \geq 5$. Dans le premier cas, on a $a + b + c + d = 9$ tandis que dans le second cas, on a $a + b + c + d \geq 11$. Ainsi, les cinq plus petites valeurs possibles pour $a + b + c + d$ sont $9, 11, 12, 13, 14$.

Réponse : $\boxed{14}$.

B4 Initialement, l'entier 80 est écrit sur un tableau noir. À chaque étape, l'entier x sur le tableau est remplacé par un entier, choisi uniformément au hasard parmi $[0, x-1]$, sauf si $x = 0$, auquel cas il est remplacé par un entier choisi uniformément au hasard parmi $[0, 2024]$. Soit $P(a, b)$ la probabilité qu'après a étapes, l'entier sur le tableau soit b. Déterminez

$$\lim_{a\to\infty} \frac{P(a, 80)}{P(a, 2024)}$$

(c'est-à-dire la valeur que la fonction $\frac{P(a,80)}{P(a,2024)}$ approche lorsque a tend vers l'infini).

Solution 1 : Si 0 est écrit au tableau, on choisit l'un des entiers de l'intervalle $[0, 2024]$ avec une probabilité de $\frac{1}{2025}$.

Si 1 est écrit au tableau, alors on choisit 0 avec une probabilité de 1.

Si 2 est écrit au tableau, on choisit l'un des entiers de l'intervalle $[0, 1]$ avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Si 3 est écrit au tableau, on choisit l'un des entiers de l'intervalle $[0, 2]$ avec une probabilité de $\frac{1}{3}$.

Si $x > 0$ est écrit au tableau, on choisit l'un des entiers de l'intervalle $[0, x-1]$ avec une probabilité de $\frac{1}{x}$.

Alors on a

$$P(a, 2024) = \frac{1}{2025}P(a-1, 0),$$

$$P(a, 2023) = \frac{1}{2025}P(a-1, 0) + \frac{1}{2024}P(a-1, 2024),$$

$$P(a, 2022) = \frac{1}{2025}P(a-1, 0) + \frac{1}{2024}P(a-1, 2024) + \frac{1}{2023}P(a-1, 2023),$$

et, en général,

$$P(a, b) = \frac{1}{2025}P(a-1, 0) + \sum_{i=b+1}^{2024} \frac{1}{i}P(a-1, i).$$

Définissons maintenant $f(x) = \lim_{a\to\infty} P(a, x) = \lim_{a\to\infty} P(a-1, x)$. Ensuite, en prenant les limites des deux côtés de notre équation, on obtient

$$f(b) = \frac{1}{2025}f(0) + \sum_{i=x+1}^{2024} \frac{1}{i}f(i).$$

Par conséquent, on obtient

$$f(2024) = \frac{f(0)}{2025},$$

$$f(2023) = \frac{f(0)}{2025} + \frac{1}{2024}f(2024) = \frac{f(0)}{2025}(1 + \frac{1}{2024}) = \frac{f(0)}{2024},$$

Et par induction, on peut montrer que

$$f(x) = \frac{f(0)}{x+1}, \quad 0 \leq x \leq 2024.$$

Plus précisément, on suppose que $f(i) = \frac{f(0)}{i+1}$ pour $x < i \leq 2024$. Alors

$$f(x) = \frac{1}{2025}f(0) + \sum_{i=x+1}^{2024} \frac{1}{i}f(i) = f(0)\left(\frac{1}{2025} + \sum_{i=x+1}^{2024} \frac{1}{i(i+1)}\right) = \frac{f(0)}{x+1}$$

Ici, on a utilisé le fait que $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$, et par télescopage, $\sum_{i=x+1}^{2024} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2025}$. On obtient donc

$$\frac{f(80)}{f(2024)} = \frac{2025}{81} = 25.$$

Réponse : $\boxed{25}$.

Solution 2 :

On commence par démontrer le fait suivant pour tout $1 \leq b \leq 2024$:

$$P(a, b-1) = P(a, b) + \frac{1}{b}P(a-1, b).$$

Soit X_a la variable aléatoire égale à l'entier écrit sur le tableau après a étapes. Donc, $P(a, b) = \text{Prob}(X_a = b)$. (Ici "Prob" signifie "probabilité".) Par la formule de la probabilité totale, puisque le nombre entier écrit sur le tableau après $a-1$ étapes est soit b soit pas b, on a

$$\begin{aligned} P(a, b) = {} & \text{Prob}(X_a = b | X_{a-1} \neq b)\text{Prob}(X_{a-1} \neq b) \\ & + \text{Prob}(X_a = b | X_{a-1} = b)\text{Prob}(X_{a-1} = b). \end{aligned} \tag{1}$$

Ici, $\text{Prob}(A|B)$ est la probabilité conditionnelle de l'événement A si l'événement B se produit. De même,

$$\begin{aligned} P(a, b-1) = {} & \text{Prob}(X_a = b-1 | X_{a-1} \neq b)\text{Prob}(X_{a-1} \neq b) \\ & + \text{Prob}(X_a = b-1 | X_{a-1} = b)\text{Prob}(X_{a-1} = b). \end{aligned} \tag{2}$$

Remarquons que les probabilités conditionnelles

$$\text{Prob}(X_a = b | X_{a-1} = b) = 0, \qquad \text{Prob}(X_a = b-1 | X_{a-1} = b) = \frac{1}{b}.$$

De même

$$\text{Prob}(X_a = b | X_{a-1} = c) = \text{Prob}(X_a = b-1 | X_{a-1} = c) \quad \text{for all} \quad c \neq b.$$

Alors,

$$\text{Prob}(X_a = b | X_{a-1} \neq b) = \text{Prob}(X_a = b-1 | X_{a-1} \neq b).$$

Ainsi, en soustrayant l'équation (1) de l'équation (2), on obtient

$$P(a, b-1) - P(a, b) = \frac{1}{b}\text{Prob}(X_{a-1} = b),$$

ce qui est équivalent à $P(a, b-1) = P(a, b) + \frac{1}{b}P(a-1, b)$.

Définissons maintenant $f(b) = \lim_{a\to\infty} P(a, b)$. Ensuite, en prenant les limites des deux côtés de notre équation, on obtient $f(b-1) = \frac{b+1}{b}f(b)$, et en multipliant, on obtient $bf(b-1) = (b+1)f(b)$. On voit donc que

$$f(0) = 2f(1) = 3f(2) = \cdots = (b+1)f(b),$$

pour tout $b \in [0, 2024]$. En particulier, $81f(80) = 2025f(2024)$, donc la réponse souhaitée est $\frac{f(80)}{f(2024)} = \frac{2025}{81} = 25$.

Remarque 1:

Une partie de la première solution peut être exprimée sous forme de matrice.

Considérons une matrice (2025×2025)-matrice M, où M_{ij} est la probabilité de choisir $i = 0, 1, \ldots 2024$ étant donné que $j = 0, 1, \ldots 2024$ est écrit sur le tableau. Ensuite, on a :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2025} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2023} & \frac{1}{2024} \\ \frac{1}{2025} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2023} & \frac{1}{2024} \\ \frac{1}{2025} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2023} & \frac{1}{2024} \\ \frac{1}{2025} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{2023} & \frac{1}{2024} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2025} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2024} \\ \frac{1}{2025} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(a-1,0) \\ P(a-1,1) \\ P(a-1,2) \\ P(a-1,3) \\ \cdots \\ P(a-1,2023) \\ P(a-1,2024) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(a,0) \\ P(a,1) \\ P(a,2) \\ P(a,3) \\ \cdots \\ P(a,2023) \\ P(a,2024) \end{bmatrix}$$

Soit $f(x) = \lim_{a\to\infty} P(a, x) = \lim_{a\to\infty} P(a-1, x)$, $x = 0, 1, \dots, 2024$. On obtient alors

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2025} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2023} & \frac{1}{2024} \\ \frac{1}{2025} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2023} & \frac{1}{2024} \\ \frac{1}{2025} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2023} & \frac{1}{2024} \\ \frac{1}{2025} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2023} & \frac{1}{2024} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2025} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2024} \\ \frac{1}{2025} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ \dots \\ f(2023) \\ f(2024) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ \dots \\ f(2023) \\ f(2024) \end{bmatrix}$$

ce qui est équivalent à $f(b) = \frac{1}{2025} f(0) + \sum_{i=x+1}^{2024} \frac{1}{i} f(i)$ for $0 \leq b \leq 2024$.

Remarque 2 : Dans notre définition de $f(b)$, on a implicitement supposé que $f(b)$ existe. On a également utilisé le fait que la limite du rapport est le rapport des limites, si elles existent.

Par souci d'exhaustivité, on présente ci-dessous une preuve de l'existence de $f(b)$. On commence par la récurrence

$$P(a, b) = \frac{1}{2025} P(a-1, 0) + \sum_{i=b+1}^{2024} \frac{1}{i} P(a-1, i),$$

et soit $Q(a, b) = (b+1)P(a, b)$. La récurrence devient alors

$$Q(a, b) = (b+1) \left(\frac{Q(a-1, 0)}{2025} + \sum_{i=b+1}^{2024} \frac{Q(a-1, i)}{i(i+1)} \right).$$

Soit $M(a) = \max\limits_{0 \leq i \leq 2024} Q(a, i)$. Alors l'inégalité suivante est valable pour tout b :

$$Q(a, b) \leq (b+1) \left(\frac{1}{2025} + \sum_{i=b+1}^{2024} \frac{1}{i(i+1)} \right) M(a-1) = M(a-1)$$

et donc

$$M(a) \leq M(a-1). \max_{0 \leq i \leq 2024} Q(a, i) \leq \max_{0 \leq i \leq 2024} Q(a-1, i).$$

Ainsi, n'augmente pas lorsque $a \to \infty$, et s'approche donc d'une valeur limitee M. On affirme maintenant que pour *tout* i, on a $\lim_{a\to\infty} Q(a, i) = M$. Supposons qu'il existe un indice minimal j sans cette propriété ; alors, il existe un ε tel que $Q(a, j) < M - \varepsilon$ pour a arbitrairement grand. Supposons également qu'il existe un certain N pour lequel $\max\limits_{0\le i\le 2024} Q(a,i) < M + \varepsilon/2^{100}$ pour $a > N$. Alors, pour un indice $a > N$ avec $Q(a,i) < M - \varepsilon$, on a

$$Q(a+1, j-1) = j\left(\frac{Q(a,0)}{2025} + \sum_{i=j}^{2024} \frac{Q(a,i)}{i(i+1)}\right) < M - \frac{\varepsilon}{2j(j+1)}.$$

Cela est vrai pour un choix arbitraire de a, ce qui contredit la minimalité de j, à moins que l'indice minimal soit 0. Enfin, dans le cas où $\lim_{a\to\infty} Q(a,0) \neq M$, on dit à nouveau qu'il existe un certain ε tel que $Q(a,0) < M - \varepsilon$ pour a arbitrairement grand, et pour un certain N, on a $\max_{0\le i\le 2024} Q(a,i) < M + \varepsilon/2^{100}$ pour $a > N$. Ensuite, pour tout indice b, on obtient

$$Q(a+1, b) < M - \frac{\varepsilon}{10000},$$

ce qui contredit l'hypothèse voulant que $\max_{0\le i\le 2024} Q(a+1,i) \geq M$.

Section C

C1 Soit la fonction $f(x,y,t) = \frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2}$ pour toutes les valeurs réelles x, y et $t \neq \pm 1$.

(a) Évaluez $f(2,0,3)$ et $f(0,2,3)$.

(b) Montrez que $f(x,y,0) = f(y,x,0)$ pour toutes les valeurs de (x,y).

(c) Montrez que $f(x,y,t) = f(y,x,t)$ pour toutes les valeurs de (x,y) et $t \neq \pm 1$.

(d) Étant donné

$$g(x,y,s) = \frac{(x^2-y^2)(1+\sin s)}{2} - \frac{(x-y\sin s)^2}{1-\sin s}$$

pour toutes les valeurs réelles de x, y et $s \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, où k est un nombre entier, montrez que $g(x,y,s) = g(y,x,s)$ pour toutes les valeurs de (x,y) et s dans le domaine.

Solution :

(a) $f(2,0,3) = 2 + 1/2 = 5/2$ et $f(0,2,3) = -2 + 9/2 = 5/2$.

(b) $f(x,y,0) = \frac{x^2-y^2}{2} - x^2 = -\frac{x^2+y^2}{2}$.
$f(y,x,0) = -\frac{y^2+x^2}{2} = f(x,y;0)$.

(c) $f(x,y,t) = \frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2} = \frac{(x^2-y^2)(1-t^2)-2(x-yt)^2}{2(1-t^2)} = \frac{4xyt-(x^2+y^2)(1+t^2)}{2(1-t^2)}$.

Ici, on a utilisé le fait que $(x^2-y^2)(1-t^2) - 2(x-yt)^2 = x^2 - y^2 - t^2x^2 + t^2y^2 - 2x^2 + 4xyt - 2t^2y^2 = -x^2 - y^2 - t^2x^2 - t^2y^2 + 4xyt = 4xyt - (x^2+y^2)(1+t^2)$.

Cette expression est invariante si l'on interchange x et y, et il en va de même de $f(x,y,t)$ pour tout $t \neq \pm 1$.

(d) On a $g(x,y,s) = \frac{(x^2-y^2)(1-\sin^2 s)-2(x-y\sin s)^2}{2(1-\sin s)}$.

Remarquons que si on laisse $\sin s = t$ et que l'on répète les calculs de la partie (c), on obtient $g(x,y) = \frac{4xyt-(x^2+y^2)(1+t^2)}{2(1-t)}$. Cette expression est invariante si l'on interchange x et y pour tout $t \neq 1$ ou, de manière équivalente, $\sin s \neq 1$.

C'est-à-dire pour toute valeur $s \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, où k est un nombre entier.

De façon alternative, observons que

$$g(x,y,s) = (1+\sin(s))f(x,y,\sin(s))\,.$$

Lorsque $1+\sin(s) = 0$ on a $g(x,y,s) = 0 = g(y,x,s)$ et lorsque $1+\sin(s) \neq 0$ l'affirmation découle de (c).

C2 (a) Combien y a-t-il de façons d'apparier les éléments de 1, 2, ..., 14 en sept paires de façon à ce que chaque paire ait une somme d'au moins 15 ?

(b) Combien y a-t-il de façons d'apparier les éléments de 1, 2, ..., 14 en sept paires de façon à ce que chaque paire ait une somme d'au moins 13 ?

(c) Combien y a-t-il de façons d'apparier les éléments de 1, 2, ..., 2024 en 1012 paires de façon à ce que chaque paire ait une somme d'au moins 2001 ?

Solution :

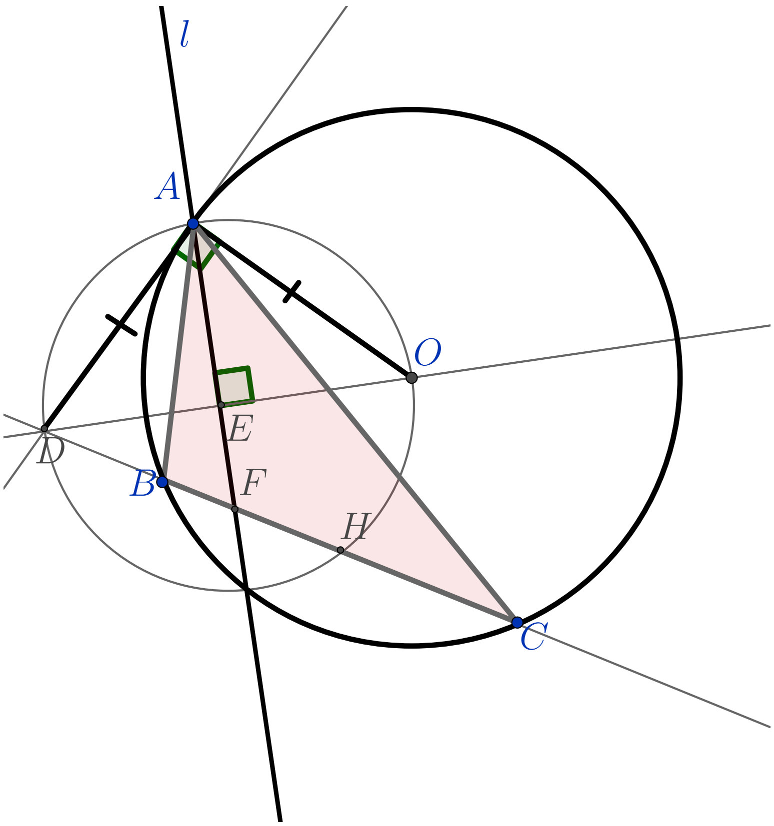
(a) Une seule façon. Le 1 doit être associé au 14, puis le 2 au 13, etc.

(b) 3^6 façons. Le 1 peut être associé à n'importe lequel de 12, 13 et 14. Alors il y a 3 paires candidates pour 2 : les trois nombres parmi 11, 12, 13 et 14 avec lesquels 1 n'est pas apparié. Ensuite, il y a 3 paires candidates pour 3 : les trois nombres parmi 10, 11, 12, 13 et 14 avec lesquels 1 et 2 ne sont pas appariés. On répète ce processus pour former six paires, puis les deux derniers nombres seront appariés automatiquement.

(c) On peut associer chacune des valeurs $1, 2, \ldots, 1000$ de 25 façons. En effet, 1 peut être associé à n'importe lequel de $2000, 2001, \ldots, 2024$; il y a donc 25 paires candidates pour 2 : les 25 nombres parmi $1999, \ldots, 2024$ avec lesquels 1 n'est pas apparié, alors il y a 25 paires candidates pour 3 : les 25 nombres parmi $1998, \ldots, 2024$ avec lesquels 1 et 2 ne sont pas appariés, etc.; enfin, il y a 25 paires candidates pour 1000 : les 25 nombres parmi $1001, \ldots, 2024$ avec lesquels $1, \ldots, 999$ ne sont pas appariés.

Les 24 autres nombres (à l'exception de $1, \ldots, 1000$ et de leurs partenaires) sont tous supérieurs ou égaux à 1001. Par conséquent, on peut associer le plus petit d'entre eux à n'importe lequel des 23 nombres restants. Il reste donc 22 nombres et on peut à nouveau associer le plus petit d'entre eux à l'un des 21 nombres restants, etc. jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule paire. Ainsi, les 24 nombres peuvent être appariés de $23 \times 21 \times \cdots \times 3 \times 1$ façons. La réponse est donc $25^{1000} \times 23!!$

C3 Soit ABC un triangle pour lequel la tangente de A au cercle circonscrit coupe la droite BC au point D, et soit O le centre du cercle circonscrit. Traçons la droite ℓ qui passe par A et qui est perpendiculaire à OD. La droite ℓ rencontre OD au point E et BC au point F. Soit le cercle passant par ADO qui coupe à nouveau BC au point H. On sait que $AD = AO = 1$.



(a) Trouvez OE.

(b) Supposons pour cette partie seulement que $FH = \frac{1}{\sqrt{12}}$, déterminez l'aire du triangle OEF.

(c) Supposons pour cette partie seulement que $BC = \sqrt{3}$, déterminez l'aire du triangle OEF.

(d) Supposons que B se trouve sur la bissectrice de DEF, trouvez l'aire du triangle OEF.

Solution :

(a) Le triangle ADO est un triangle droit isosèle, $AO = AD = 1$, donc $OD = \sqrt{2}$ et $OE = \frac{1}{2}DO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Comme H est situé sur le cercle (ADO) et comme $\angle DAO = 90° \implies \angle OHD = 90°$. On sait donc que $EOHF$ est cyclique. Ensuite, à partir de la puissance d'un point $DF \cdot DH = DE \cdot DO$. On note $y = DF$, alors $DH = DF + FH = y + \frac{1}{\sqrt{12}}$.

On sait aussi que $DE = OE = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $DO = \sqrt{2}$. Donc, on voit que $y(y + \frac{1}{\sqrt{12}}) = 1$. On résoud y pour obtenir

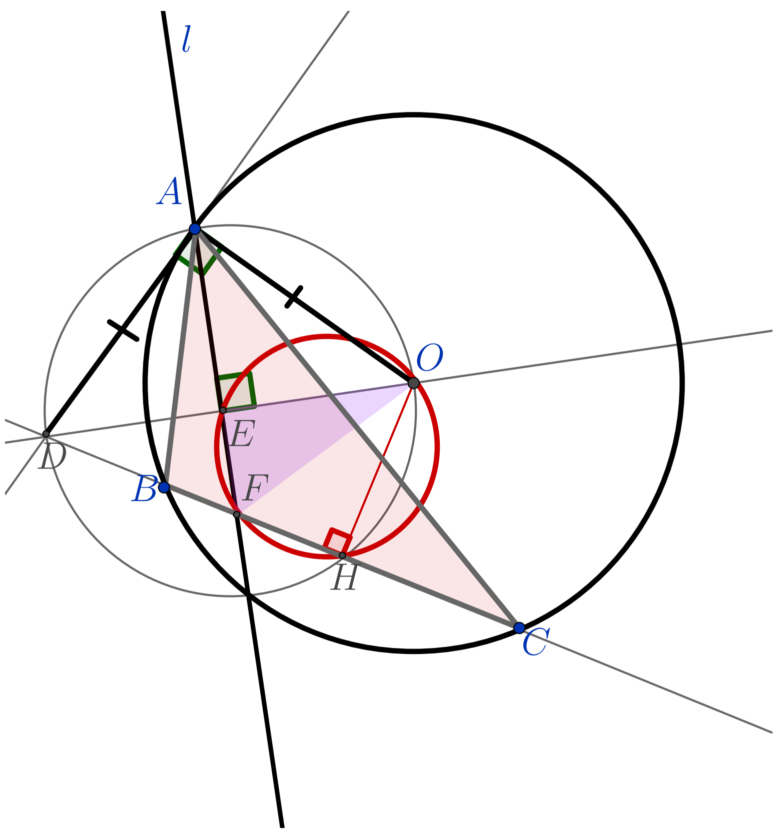
$$y = \frac{-\frac{1}{\sqrt{12}} + \sqrt{\frac{1}{12} + 4}}{2} = \frac{6}{2\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, on constate que

$$EF = \sqrt{DF^2 - DE^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Il s'ensuit que l'aire du triangle rectangle $[\triangle OEF] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

(c)



D'après la puissance d'un point (ou d'après les triangles semblables DAB et DCA), on sait que $DA^2 = DB \cdot DC$. Si, $x = DB$, alors $DC = DB + BC = x + \sqrt{3}$, et $DA = 1$. Ansi, $x(x + \sqrt{3}) = 1$ implique que $x = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$.

Observons que H est le point milieu de BC car $OH \perp BC$, d'où $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors $DH = DB + BH = x + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

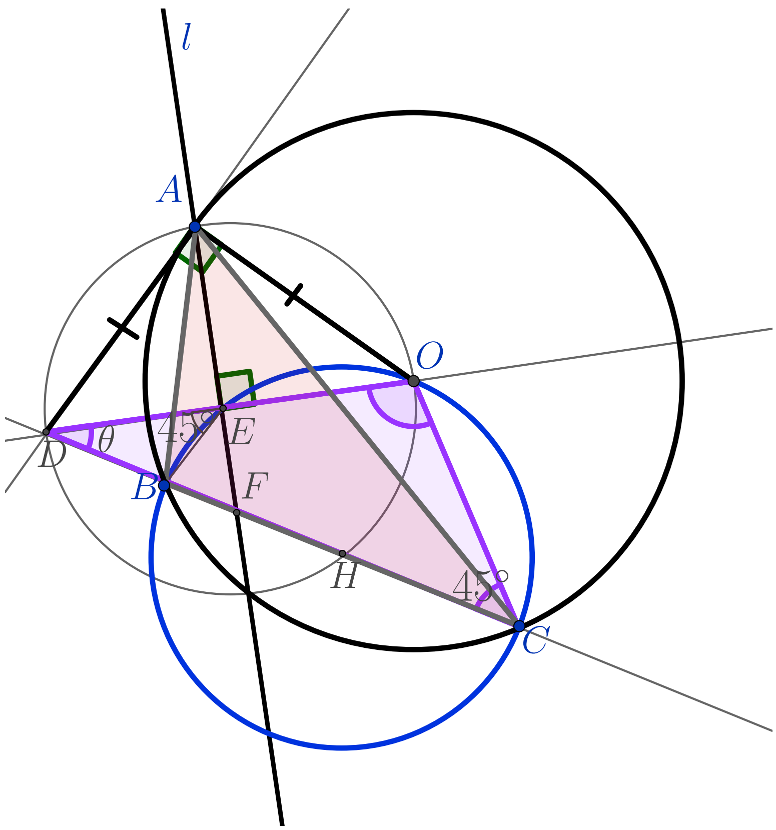
Comme en (b), on a $DF \cdot DH = DE \cdot DO$ et $DE \cdot DO = 1$, d'où $DF = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Du triangle rectangle DEF, par le théorème de Pythagore, on obtient

$$EF = \sqrt{DF^2 - DE^2} = \sqrt{\frac{4}{7} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Il s'ensuit que l'aire du triangle rectangle $[\triangle OEF] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{1}{4\sqrt{7}}$.

(d)



Tout d'abord, on voit que $DE \cdot DO = DA^2$ (les deux côtés sont égaux à 1) et $DB \cdot DC = DA^2$ comme observé en (b). Donc $DE \cdot DO = DB \cdot DC$, ce qui signifie que E, O, C et B sont concycliques.

On voit donc que $\angle BEO + \angle OCB = 180°$. Puisque $\angle BEO + \angle DEB = 180°$ aussi, $\angle OCB = \angle DEB = \frac{1}{2}\angle DEF = 45°$.

On a $\angle OCD = \angle OCB = 45°$. Notons $\angle ODC = \theta$. D'après la loi des sinus appliquée à $\triangle DOC$, on voit que

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45°} = \frac{1}{\sin\theta} \implies \sin\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = 30°$$

Par conséquent, à partir du triangle rectangle DEF, on a $EF = DE \cdot \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Il s'ensuit que l'aire du triangle rectangle $[\triangle OEF] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

C4 Un polynôme $f(x)$ est dit *excellent* si ses coefficients sont tous dans $[0,1)$ et si $f(x)$ est un entier pour tous les entiers x.

(a) Calculez le nombre de polynômes excellents dont le degré est au plus égal à 3.

(b) Calculez, en fonction de n, le nombre de polynômes excellents dont le degré est au plus égal à n.

(c) Trouvez le minimum $n \geq 3$ pour lequel il existe un polynôme excellent de la forme $\frac{1}{n!}x^n + g(x)$, où $g(x)$ est un polynôme de degré au plus $n-3$.

Solution :

(a) Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme excellent. Alors :

i. $f(0) = d$ doit être un entier, donc $d = 0$.

ii. $f(1) = a+b+c$ doit être un entier, de même que $f(-1) = -a+b-c$, donc en les additionnant, on obtient que $2b$ doit être un entier, donc $b = 0$ ou $b = \frac{1}{2}$. De plus, à partir de $f(1) - f(-1)$, on obtient que $2(a+c)$ doit être un entier, donc $a+c$ doit être l'un de $0, \frac{1}{2}, 1$, ou $\frac{3}{2}$.

iii. $f(2) = 8a + 4b + 2c = 6a + 4b + 2(a+c)$ doit être un entier, donc puisque $4b$ et $2(a+c)$ sont tous deux des entiers, $6a$ doit être un entier. Ainsi a doit être l'un de0, $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, ou $\frac{5}{6}$.

iv. En mettant tout cela bout à bout, on obtient ce qui suit :
Si $b = 0$, alors $a+c = 0$ ou 1, on a donc six possibilités :
si $a = 0$ alors $c = 0$ et on obtient $f(x) = 0$;
si $a = \frac{1}{6}$ alors $c = \frac{5}{6}$
(et on obtient $f(x) = \frac{x^3+5x}{6} = \frac{x(x^2+5)}{6}$ qui est un entier pour tout entier x);
si $a = \frac{1}{3}$ alors $c = \frac{2}{3}$;
si $a = \frac{1}{2}$ alors $c = \frac{1}{2}$;
si $a = \frac{2}{3}$ alors $c = \frac{1}{3}$;
si $a = \frac{5}{6}$ alors $c = \frac{1}{6}$.

si $b = \frac{1}{2}$, alors $a+c = \frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$, et on a donc six autres possibilités :
si $a = 0$ alors $c = \frac{1}{2}$;
si $a = \frac{1}{6}$ alors $c = \frac{1}{3}$;
si $a = \frac{1}{3}$ alors $c = \frac{1}{6}$;
si $a = \frac{1}{2}$ alors $c = 0$;
si $a = \frac{2}{3}$ alors $c = \frac{5}{6}$;
si $a = \frac{5}{6}$ alors $c = \frac{2}{3}$.

Par conséquent, il y a 12 polynômes excellents au total.

On peut également obtenir le même résultat en se basant sur la partie (b), comme indiqué ci-dessous.

(b) On a besoin du **Lemme** suivant:

Tout polynôme de degré au plus n qui associe des entiers à des entiers est une combinaison entière des polynômes $1, x, \binom{x}{2}, \ldots, \binom{x}{n}$.

Démonstration : On utilise l'induction. L'énoncé est clairement vrai lorsque $n = 0$. Supposons maintenant que ce soit vrai pour un certain $n = k$, et que f est un polynôme excellent de degré $k + 1$. Alors, le polynôme $f(x + 1) - f(x)$ est un polynôme de degré au plus k qui envoie les entiers sur des entiers, donc on peut écrire

$$f(x+1) - f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i \binom{x}{i},$$

pour certains entiers a_i. On a alors

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{y=0}^{x-1} \binom{y}{i} = f(0) + \sum_{i=0}^{k} a_i \binom{x}{i+1}.$$

Puisque $f(0)$ et les a_i sont tous entiers, cela prouve le lemme.

En particulier, tous les polynômes excellents sont de cette forme.

Étant donné f un polynôme excellent de degré au plus n, le lemme implique qu'il existe un entier c tel que $g(x) = f(x) - c\binom{x}{n}$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui fait correspondre des entiers à des entiers. Notons que $\binom{x}{n} = \frac{1}{n!}x^n + p(x)$, où $p(x)$ est un polynôme de degré au plus $n - 1$, le coefficient de x^n dans $f(x)$ est $\frac{c}{n!}$. Par conséquent, puisque f est excellent, c est un entier tel que $\frac{c}{n!} \in [0, 1]$ et qu'il y a donc $n!$ options pour c.

Pour tout c de ce type, $g(x)$ est un polynôme de degré au plus $n - 1$ qui fait correspondre des entiers à des entiers. Puisque l'ajout d'un polynôme à coefficients entiers à g permet toujours de faire correspondre des entiers à des entiers, il existe un polynôme unique h à coefficients entiers et de degré au plus $n-1$ tel que $g-h$ est excellent. Réciproquement, pour tout excellent polynôme g de degré au plus $n - 1$, il existe $n!$ entiers c tels que le coefficient de x^n dans $g(x) + c\binom{x}{n}$ est dans $[0, 1)$ et un unique polynôme h à coefficients entiers et de degré au plus $n - 1$ tel que $f(x) = h(x) + g(x) + c\binom{x}{n}$ est excellent.

Puisque les processus ci-dessus sont inverses l'un de l'autre, le nombre de polynômes excellents de degré au plus n est $n!$ fois le nombre de polynômes excellents de degré au plus $n - 1$. La réponse pour (a) est donc $3!2!1! = 12$ et pour (b) $n!(n-1)! \cdots 1! = n(n-1)^2 \cdots 2^{n-1}1^n$.

(c) On doit trouver un certain n tel qu'il existe des entiers c et d tels que le polynôme

$$\binom{x}{n} + c\binom{x}{n-1} + d\binom{x}{n-2} - \frac{1}{n!}x^n$$

est de degré au plus $n-3$.

Observons que

$$\binom{x}{n} = \frac{x!}{n!(x-n)!} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{n!}.$$

Puis,

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-k) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + q(x),$$

où $q(x)$ est un polynôme de degré $k-3$, $c_{k-1} = -\sum_{j=1}^{k} j = -\frac{(k+1)k}{2}$, et

$$c_{k-2} = \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=j+1}^{k} ij = \frac{1}{2}\left(\frac{(k+1)^2k^2}{4} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right) = \frac{1}{24}(k+1)k(k-1)(3k+2).$$

En prenant $k = n-1$, on voit que

$$\binom{x}{n} = \frac{1}{n!}\left(x^n - \frac{(n-1)(n)}{2}x^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24}x^{n-2}\right) + P(x),$$

où $P(x)$ est un polynôme de degré au plus $n-3$.

De même,

$$\binom{x}{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left(x^{n-1} - \frac{(n-2)(n-1)}{2}x^{n-2}\right) + Q(x),$$

et

$$\binom{x}{n-2} = \frac{1}{(n-2)!}x^{n-2} + R(x),$$

où Q et R sont de degré au plus $n-3$.
On est obligé de choisir $c = \frac{n-1}{2}$ et on obtient

$$\frac{(n-2)(3n-1)}{24} - \frac{(n-2)(n-1)}{4} + d = 0.$$

Ainsi, $d = \frac{3n^2-11n+10}{24} = \frac{(3n-5)(n-2)}{24}$. Pour que les coefficients c et d soient entiers, il faut que $2|(n-1)$ et $24|(3n^2-11n+10)$. La valeur minimale de n est 23.

Remarque

Voici quelques exemples de polynômes excellents non nuls de degré 2 et 3

$\frac{x+x^2}{2}$, $\frac{x+x^3}{2}$, $\frac{2x+x^3}{3}$, $\frac{5x+x^3}{6}$, $\frac{4x+3x^2+5x^3}{6}$, $\frac{2x+3x^2+x^3}{6}$, $\frac{x+3x^2+2x^3}{6}$, $\frac{5x+3x^2+4x^3}{6}$.

Notons que pour un polynôme $P(x)$ de degré n, il suffit de vérifier que $P(0), \ldots, P(n)$ sont des entiers pour conclure que $P(k)$ est entier pour tout entier k. Ce fait est prouvé par induction car il est vrai pour $n = 0$ et le degré du polynôme $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ est au plus $n - 1$. Ainsi, si $n \geq 1$ alors pour tout $k \geq n$, $P(k+1) = P(k) + Q(k)$ est entier étant donné que $P(k)$ est entier.