

Physique : DM8

Ce sujet comporte deux parties. Le travail devra être fait en groupe.

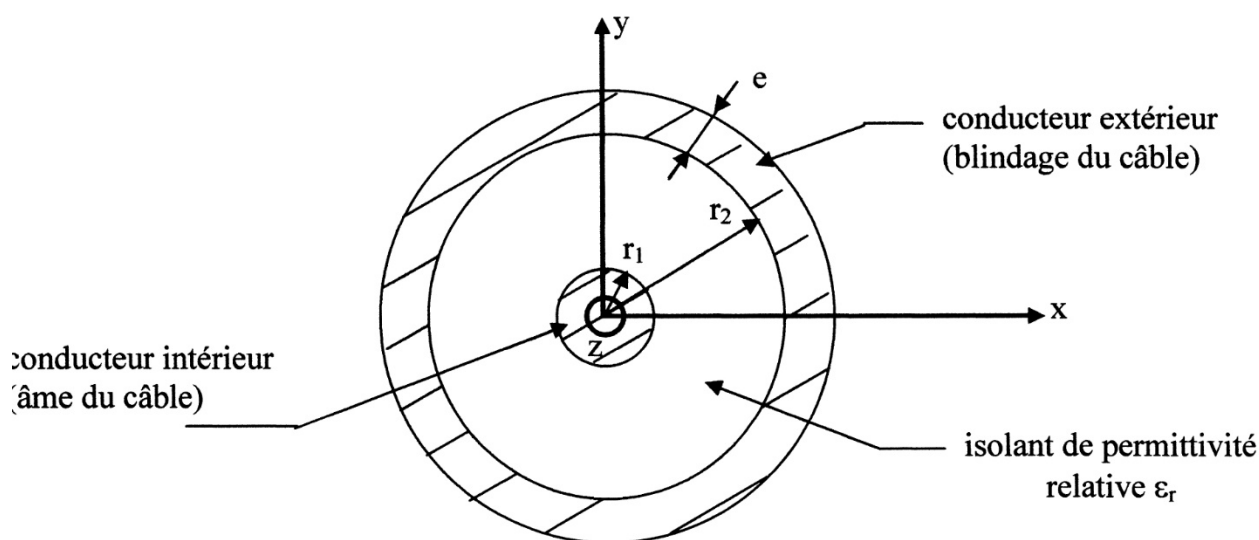
- 1 candidat traite la partie I et corrigera la partie II effectuée par son camarade.
- L'autre candidat traite la partie II et corrigera la partie I effectuée par son camarade.

Le sujet est à faire pour la date X et devra être corrigée 2 jours ouvrables après la date X. Les deux copies devront m'être remises et une note de groupe sera attribuée.

Partie I – Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué par deux cylindres coaxiaux parfaitement conducteurs, de même axe Oz, et de rayons respectifs r_1 , r_2 et (r_2+e) , et de longueur ℓ . La longueur de la ligne ℓ est assez grande devant r_1 et r_2 pour que l'on puisse négliger les effets d'extrémités : on considère que **les symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur ℓ était infinie.**

L'espace entre les deux conducteurs contient un isolant, homogène et isotrope de permittivité relative $\epsilon_r = 2,0$. On rappelle que la permittivité absolue ϵ de l'isolant est liée à sa permittivité relative par la relation $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$, la notation ϵ_0 désignant la permittivité absolue du vide.



Pour les applications numériques, on prendra: $r_1 = 0,15 \text{ cm}$, $r_2 = 0,50 \text{ cm}$, $\ell = 10 \text{ m}$, $e = 0,10 \text{ cm}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

1. Le conducteur **intérieur** est porté au potentiel V_1 constant et le conducteur **extérieur au potentiel V_2 , qu'on suppose nul**. Les conducteurs, en équilibre électrostatique, portent alors respectivement les charges électriques $+Q$ et $-Q$, supposées uniformément réparties sur les **deux seules** surfaces des conducteurs qui sont de rayon r_1 et r_2 .

1.1. Montrer que le champ électrique est radial et que sa valeur algébrique ne dépend que de r , soit : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.

1.2.a. Etablir l'expression de $E(r)$ en fonction de Q , de la permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ de l'isolant, de r et de ℓ , en distinguant les trois cas : $r < r_1$, $r_1 < r < r_2$ et $r_2 < r < (r_2 + e)$. Il est rappelé que l'expression de $E(r)$ demandée se déduit de celle obtenue dans le cas d'un câble coaxial « à vide » en remplaçant la permittivité absolue ε_0 du vide par celle, ε , du matériau isolant

1.2.b. Montrer que, dans le domaine $r > (r_2 + e)$, $E(r) = 0$.

1.3.a. Tracer le graphe de $E(r)$.

1.3.b. Commenter **physiquement** les éventuelles discontinuités de $E(r)$ à la traversée des cylindres de rayons r_1 , r_2 et $(r_2 + e)$.

1.4. Exprimer la tension $U_{12} = V_1 - V_2$ en fonction de Q , $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$, ℓ , r_1 et r_2 .

1.5. Montrer que la capacité par unité de longueur du câble coaxial, notée C_1 , est donnée par :

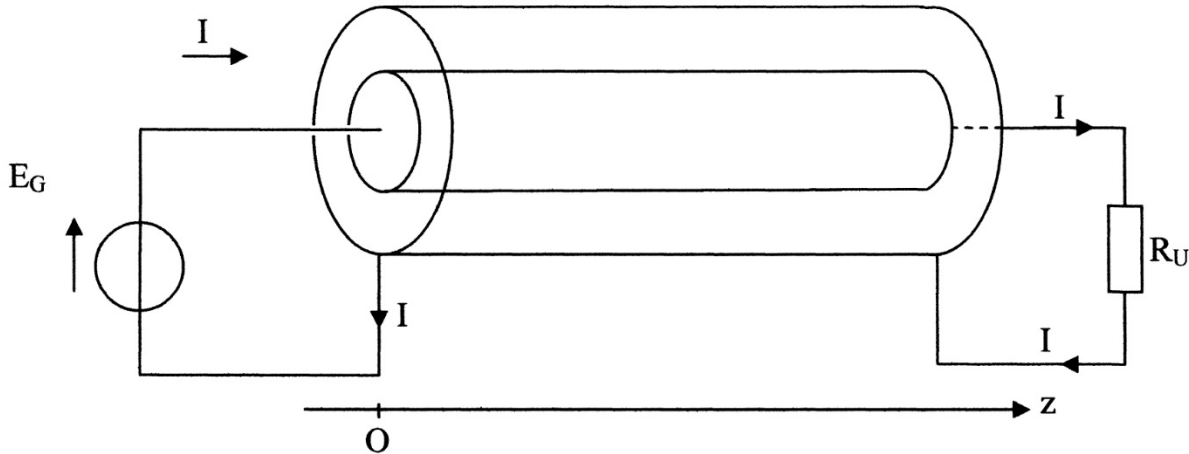
$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

1.6. En déduire **simplement** l'expression de l'énergie électrostatique W_e emmagasinée par le câble coaxial de longueur ℓ .

1.7. Calculer la valeur numérique de C_1 .

1.8. Calculer la valeur numérique de W_e pour une tension $U_{12} = 10$ V entre les armatures du câble.

2. Le câble coaxial est chargé (à sa sortie) par une résistance R_U et alimenté en entrée par un générateur de tension continue E_G .



Le conducteur intérieur constitue le conducteur aller du courant électrique d'intensité I .
Le conducteur extérieur constitue le conducteur retour de ce courant.

Les conducteurs sont parcourus dans toute leur épaisseur par des courants volumiques de densités uniformes $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$, de même direction que Oz . On considère de nouveau que **les symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur ℓ était infinie.**

2.1. Montrer que le champ magnétique est orthoradial et que sa valeur algébrique ne dépend que de r , soit : $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$.

2.2. Etablir les expressions de $B(r)$, en fonction de μ_o , I , r_1 , r_2 et de e , en distinguant quatre domaines à définir.

2.3.a. Tracer l'allure du graphe de $B(r)$.

2.3.b. Observe-t-on des discontinuités de $B(r)$ à la traversée des cylindres de rayons r_1 , r_2 et (r_2+e) ? Aurait-on pu le prévoir avant de traiter les questions 2.1 à 2.2 ? Pourquoi ?

2.4.a. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique en un point de l'espace, en fonction du champ magnétique en ce point.

Dans toute la suite, on néglige, notamment pour alléger les calculs, la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme - région $r < r_1$ - et celle localisée dans le blindage - région $r_2 < r < (r_2+e)$ - du câble coaxial.

2.4.b. Exprimer, **dans ces conditions**, l'énergie magnétique W_m emmagasinée par le câble coaxial de longueur ℓ , en fonction de μ_o , I , r_1 , r_2 et de ℓ .

2.5. En déduire l'expression de l'inductance propre du câble coaxial par unité de longueur notée L_1 .

2.6. Calculer la valeur numérique de L_1 .

2.7. Le câble coaxial est parcouru par un courant d'intensité $I = 0,10$ A.
Calculer la valeur numérique de l'énergie magnétique W_m emmagasinée par le câble coaxial.

3. Les conducteurs intérieur et extérieur ont une conductivité $\gamma = 5,8 \cdot 10^7$ S.m⁻¹.

3.1. Exprimer la résistance des conducteurs par unité de longueur, notée R_1 , en fonction de γ , r_1 , r_2 , et de $r_3 = (r_2 + e)$.

3.2. Calculer la valeur numérique de R_1 .

3.3. On souhaite régler la tension E_G du générateur pour obtenir un courant d'intensité $I = 0,20$ A. La ligne est chargée par $R_u = 50 \Omega$. Calculer la valeur numérique de E_G .

Partie II – Chauffage par induction

Un disque conducteur de conductivité σ , d'axe Oz vertical, de rayon b et d'épaisseur e est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ (figure 6). Ce champ magnétique a les caractéristiques suivantes :

- il est localisé dans un cylindre d'axe vertical Oz de rayon a ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé verticalement suivant le vecteur unitaire $\vec{e}_z$;
- il varie sinusoïdalement au cours du temps selon la forme : $\vec{B}(t) = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$, où B_m représente son amplitude et ω sa pulsation.

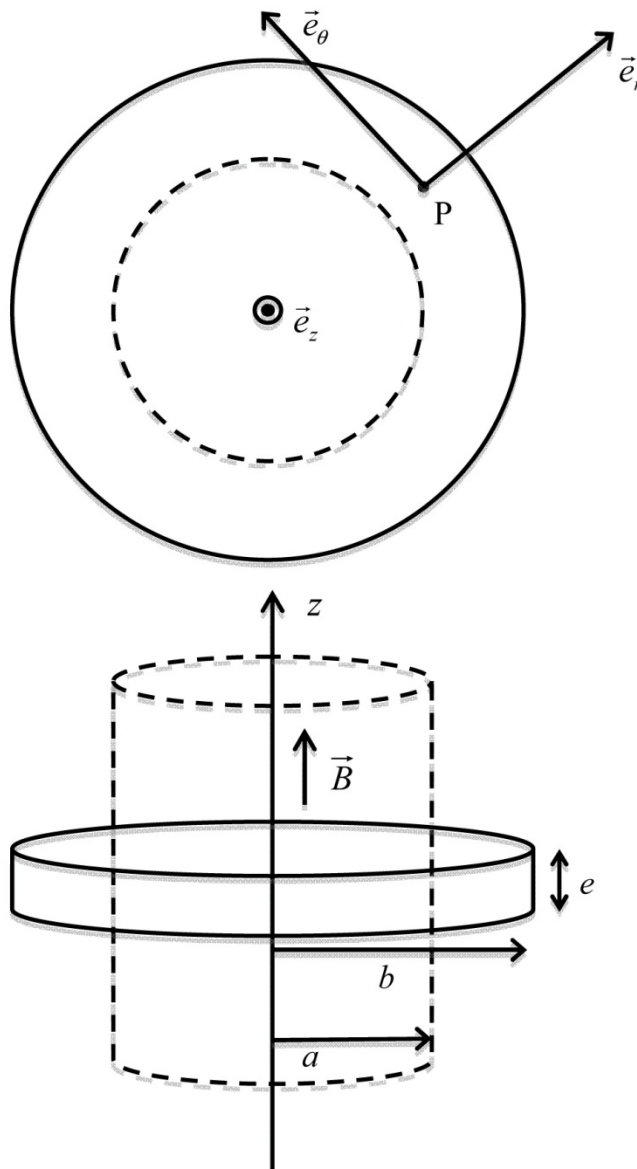


Figure 6 : disque conducteur et champ magnétique

Nous admettons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le disque conducteur étant disposé dans un champ magnétique variable, il sera le siège d'un courant volumique induit $\vec{j}$;
- compte-tenu de la symétrie du système, le courant volumique induit est orthoradial et de la forme : $\vec{j} = j(r,t)\vec{e}_\theta$;
- dans les conditions du problème, le champ magnétique induit créé par le courant induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

1 – Rappeler la relation liant le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ au champ électrique $\vec{E}$ dans un conducteur de conductivité σ .

2 – On considère un contour circulaire Γ de rayon r et d'axe Oz . Déterminer la circulation $C(r,t)$ du champ électrique résultant sur ce contour. On exprimera $C(r,t)$ en fonction de r , $j(r,t)$ et σ .

3 – Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique à travers la surface définie par le contour Γ .

On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.

4 – En appliquant la loi de Faraday, déterminer l'expression du courant volumique induit $j(r,t)$ en fonction de σ , ω , r , a , B_m et t .

On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.

5 – Rappeler l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule.

6 – En considérant que le disque conducteur est constitué par des couronnes de rayon r , de largeur dr et d'épaisseur e , déterminer l'expression de la puissance totale P_{joule} dissipée par effet Joule dans l'ensemble du disque conducteur puis sa valeur moyenne $\langle P_{\text{joule}} \rangle$.

On montrera que $\langle P_{\text{joule}} \rangle$ peut se mettre sous la forme $\langle P_{\text{joule}} \rangle = A\omega^2 B_m^2$ où A est un coefficient que l'on exprimera en fonction de e , a , b et σ .

On se placera, pour la suite, dans le cas particulier où $a = b$. Dans ce cas, le coefficient A est donné

par l'expression :

$$A = \frac{\pi e \sigma a^4}{16}.$$

7 – Le dispositif précédent est utilisé dans les plaques électriques à induction pour chauffer les casseroles et leur contenu.

Comment peut-on créer, en pratique, le champ magnétique souhaité ?

Citer quelques avantages de ce dispositif de chauffage par rapport aux plaques électriques classiques.

8 – En pratique, le champ magnétique utilisé a une pulsation ω de l'ordre de $2 \times 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ (courant de fréquence f de l'ordre de 30 kHz). Son intensité B_m est de l'ordre de 10^{-4} T .

On considère une plaque à induction de rayon $b = 10 \text{ cm}$ et une casserole dont le fond a le même rayon $a = b = 10 \text{ cm}$, une épaisseur $e = 1,0 \text{ cm}$ et une conductivité $\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance moyenne $\langle P_{\text{joule}} \rangle$ dissipée dans le fond de la casserole.