

ELITE RADES	Nombres complexes	
MR : AMMAR BOUJILA		
GSM : 98 742 026/ 52 742 026	CLASSE : 4 ^{eme} sciences	Résumé de cours

Le plan est muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{u}$, $\vec{v}$)

	Re(Z)	Im(Z)	Conjugué de Z	image de Z	Module de Z
$Z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$	x	y	$\bar{Z} = x - iy$	M(x ; y)	$ Z = r = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$

$Z + \bar{Z} = 2x$	$Z - \bar{Z} = 2iy$	$Z \cdot \bar{Z} = Z ^2 = x^2 + y^2$
--------------------	---------------------	---------------------------------------

Propriétés : Z et Z' des nombres complexes

- **Conjugué de un produit et un quotient** : $\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}$; $\overline{Z \cdot Z'} = \bar{Z} \cdot \bar{Z'}$
 $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}}$
- **Module de un produit et un quotient** : $|Z Z'| = |Z| |Z'|$; $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$; $|Z|^n = |Z^n|$
- **Argument de un produit et un quotient** : $\text{Arg}(Z Z') \equiv \text{arg}(Z) + \text{Arg}(Z') [2\pi]$;
 $\text{Arg}\left(\frac{Z}{Z'}\right) \equiv \text{Arg}(Z) - \text{Arg}(Z') [2\pi]$; $\text{Arg}(Z^n) \equiv n \text{Arg}(Z) [2\pi]$
- **Argument du conjugué et d'opposé** : $\text{Arg}(\bar{Z}) \equiv \pi - \text{Arg}(Z) [2\pi]$
 $\text{Arg}(-Z) \equiv \text{Arg}(Z) + \pi [2\pi]$
- **Notation et propriétés** : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$; $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$
 $e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$; $e^{i(\theta - \theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$; $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$; $e^{-i\theta} = e^{i(\theta + \pi)}$
; $e^{i0} = 1$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Complexe est géométrie :

- $\text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = Z_B - Z_A$; $AB = |Z_B - Z_A|$; I milieu [AB] alors $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$
- $Z_{(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v})} = \alpha Z_{\vec{u}} + \beta Z_{\vec{v}}$; $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V} \Leftrightarrow Z_{\vec{W}} = Z_{\vec{U}} + Z_{\vec{V}}$; $\vec{U} = \vec{V} \Leftrightarrow Z_{\vec{U}} = Z_{\vec{V}}$

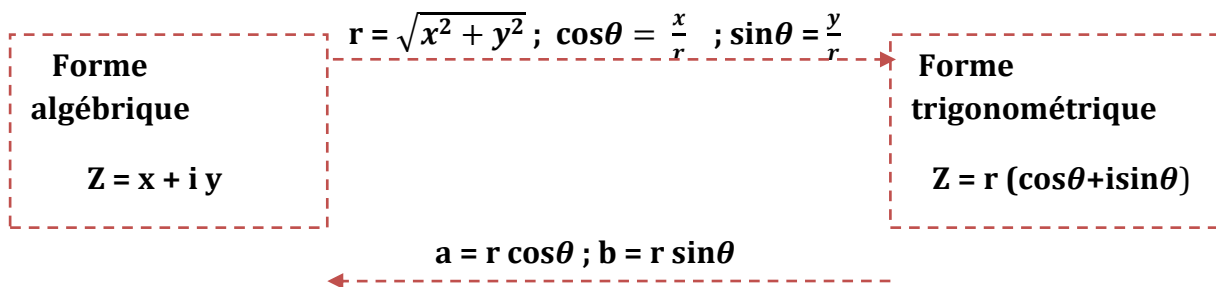
$\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires ssi $\frac{Z_{\vec{U}}}{Z_{\vec{V}}} \in \mathbb{R}$; $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux ssi $\frac{Z_{\vec{U}}}{Z_{\vec{V}}} \in i\mathbb{R}$

- $(\widehat{\vec{U}} \vec{AB}) \equiv \text{arg}(Z_B - Z_A) [2\pi]$; $(\widehat{\vec{AB}} \vec{CD}) \equiv \text{arg}\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) [2\pi]$

$(\widehat{\vec{AB}} \vec{CD}) \equiv 0 [\pi]$ sig que $\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}^*$; $(\widehat{\vec{AB}} \vec{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ sig que $\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \in i\mathbb{R}^*$

- $\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} = \frac{CD}{AB} (\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $(\widehat{\vec{AB}} \vec{CD}) \equiv \theta [2\pi]$

Relation de passage entre la forme trigonométrique et la forme cartésienne :



Remarque importante

- $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ dites forme trigonométrique et exponentielle ssi $r > 0$
- Z est un nombre complexe de module 1 ssi $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$

Nombres complexes et trigonométrie :

FORMULE DE MOIVRE : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

FORMULE D'EULER : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

PAR CONSEQUENCE : $\cos n\theta = \operatorname{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$; $\sin n\theta = \operatorname{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$

$$e^{i\theta} \pm e^{i\theta'} = e^{i(\frac{\theta+\theta'}{2})} (e^{i(\frac{\theta-\theta'}{2})} \pm e^{-i(\frac{\theta-\theta'}{2})})$$

$$1 - e^{i\theta} = -2i \sin(\frac{\theta}{2}) \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} ; 1 + e^{i\theta} = 2 \cos(\frac{\theta}{2}) \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Propriété : Z un nombre complexe

Z est réel $\Leftrightarrow Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 0$ ou $\operatorname{Arg}(Z) \equiv 0 [\pi]$

Z est imaginaire $\Leftrightarrow Z = -\bar{Z} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 0$ ou $\operatorname{Arg}(Z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

RACINE $n^{\text{ième}}$ DE L'UNITÉ : $Z^n = 1 \Leftrightarrow Z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{n})}$ avec $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$

RACINE $n^{\text{ième}}$: $Z^n = a[r; \theta] \Leftrightarrow Z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ avec $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$

Cas particulier : racines carrées $\Delta = \delta^2$ avec $\Delta = a + ib$; $\delta = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = a \\ \operatorname{sign}(x \cdot y) = \operatorname{sign}(b) \end{cases} \quad \text{alors } x = \pm \sqrt{\frac{|\Delta| + a}{2}} \quad \text{et } y = \pm \sqrt{\frac{|\Delta| - a}{2}}$$

RESOLUTION D'EQUATIONS DE DEGRE 2 :

$$az^2 + bz + c = 0 ; a \neq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\delta)^2 ; \quad Z = \frac{-b - \delta}{2a} ; \quad Z' = \frac{-b + \delta}{2a} ; \quad z + z' = -\frac{b}{a} ; \quad z \cdot z' = -\frac{c}{a}$$

si $a + b + c = 0$ alors $Z = 1$ et $Z' = \frac{c}{a}$ et si $a - b + c = 0$ alors $Z = -1$ et $Z' = -\frac{c}{a}$