



République Algérienne Démocratique et Populaire



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Tissemsilt

Faculté des Sciences et de la technologie

Département de science de la matière

Polycopie de Cours

Physique I

Préparé par : Dr F .DAHMANE

Dr M. MOKHTARI

Préface

Ce Polycopie de cours est destinée aux étudiants de la 1^{ère} année ST et SM, approprié aux programmes du LMD, Il est créé de façon à ajuster au mieux les difficultés inévitables au discours scientifique tout en gardant la rigueur nécessaire.

Dans le 1^{er} chapitre on a donnée quelque notion de base sur des rappels mathématiques : les équations aux dimensions et on a travaillé avec les documents suivants :

- ✓ Les cours de Mr A.FIZAZI Université -BECHAR LMD1/SM_ST

Le deuxième chapitre est consacré à la cinématique. Son but est d'exposer les mouvements d'objets sans s'intéresser aux causes qui les produisent, et on a travaillé avec les documents suivants :

- ✓ Cours de mécanique classique et initiation à la relativité restreinte Yves Grandidier, Mécanique I, Université de Sherbrooke – Automne 2006.
- ✓ mécanique du point matériel, Olivier GRANIER
- ✓ Cinématique générale, Jean-Pierre BROSSARD, l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon.
- ✓ Mécanique classique I, L Marleau, département de physique, Université Laval Québec, Canada.
- ✓ MÉCANIQUE I (PHQ 110) David Sénéchal, Département de physique Faculté des sciences Université de Sherbrooke
- ✓ Support De Cours Pour Licence LMD Première Année Physique I, Bettahar Nouredine
- ✓ Les cours de Mr A.FIZAZI Université -BECHAR LMD1/SM_ST
- ✓ Mécanique Du Point Matériel Cours Et Exercices, Dr ZIANI NOSSAIR, Pr BOUTAOUS AHMED Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf Algérie.

- ✓ PHYSIQUE TOUT-EN-UN • 1re année, Cours et exercices corrigés, Marie-Noëlle Sanz, Anne-Emmanuelle Badel, François Clausset

Le troisième chapitre traite de la dynamique du point matériel, dans le cadre de la mécanique de Newton avec ses trois lois, le principe de conservation de la quantité de mouvement, équation différentielle du mouvement, et on a travaillé avec les documents suivants :

- ✓ Cours de Mécanique du Point matériel, Chapitre 3 : Dynamique, SMPC1, Prof M. Elbaz, 2014
- ✓ <http://www.iihe.ac.be/~cvdvelde/Info/Cours/ChapII.pdf>
- ✓ Cours préparatoires de physique, L. Dreesen, 2012
- ✓ Physique I, Mécanique du point matériel, Faculté de physique USTHB, Lamria Benalegue, Mohamed Debiane, 2011
- ✓ Cours de mécanique classique et initiation à la relativité restreinte Yves Grandidier, Mécanique I, Université de Sherbrooke – Automne 2006.
- ✓ mécanique du point matériel, Olivier GRANIER
- ✓ Support De Cours Pour Licence Lmd Première Année Physique I, Bettahar Noureddine
- ✓ Mécanique Du Point Matériel Cours Et Exercices, Dr ZIANI NOSSAIR, Pr BOUTAOUS AHMED Université des sciences et technologie d'Oran mohamed Boudiaf Algérie.
- ✓ PHYSIQUE TOUT-EN-UN • 1re année, Cours et exercices corrigés, Marie-Noëlle Sanz, Anne-Emmanuelle Badel, François Clausset

Le quatrième chapitre concerne le travail et de l'énergie. Dans ce chapitre on écarte le calcul de l'accélération en assemblant directement la force, la masse, la vitesse et le déplacement. Nous examinons d'abord le travail d'une force et l'énergie cinétique d'une particule. Nous traitons ensuite les notions d'énergies potentielle et totale que nous appliquons au principe de conservation de l'énergie dans diverses situations. Et on a travaillé avec les documents suivants :

- ✓ Les cours de Mr A.FIZAZI Univ-BECHAR LMD1/SM_ST
- ✓ Les Cours de Dr Semari, université de Mascara
- ✓ Physique I, Mécanique du point matériel, Faculté de physique USTHB, Lamria Benalegue, Mohamed Debiane, 2011
- ✓ Mécanique classique I, L Marleau, département de physique, Université Laval Québec, Canada.
- ✓ Cours De Mécanique, Université De Bordeaux Institut Universitaire De Technologie « A » Génie Electrique Et Informatique Industrielle.
- ✓ Mécanique Du Point Matériel Cours Et Exercices, Dr ZIANI NOSSAIR, Pr BOUTAOUS AHMED Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf Algérie.
- ✓ MÉCANIQUE I (PHQ 110) David Sénéchal, Département de physique Faculté des sciences Université de Sherbrooke.
- ✓ PHYSIQUE TOUT-EN-UN • 1^{re} année, Cours et exercices corrigés, Marie-Noëlle Sanz, Anne-Emmanuelle Badel, François Clausset

Sommaire

Préface	2
Chapitre : Outils mathématiques	8
1. 1 Généralités sur les grandeurs physiques	8
1.1.1 Grandeurs physiques repérables	8
1.1.2 Grandeurs physiques mesurables	8
1-2 Les équations aux dimensions	9
1-2-1 Définition :	9
1-2-2 Utilités des équations aux dimensions	10
1-2-3 Corrélation entre les unités	11
1-3 Calculs vectoriel	12
1-3-1 Notion de vecteur	12
1-3-2 Le Vecteur Unitaire	12
1-3-3 La Somme Des Vecteurs	13
1-3-4 Composantes d'un Vecteur	14
1-3-5 Produit scalaire	15
1-3-6 Produit vectoriel	15
1-3-7 Produit mixte	16
1-4 Gradient, Divergence Rotationnel, et Laplacien	17
1-4-1 Le Gradient	17
1-4-2 La Divergence	17
1-4-3 Le Rotationnel	17
1-4-4 Le Laplacien	18
Exercices	18
Chapitre II : Cinématique	21
2-1 Vecteur position	22
2-1-1 Coordonnées cartésiennes	22
2-1-2 Coordonnées Sphériques	22
2-1-3 Coordonnées Cylindriques	23
2-1-4 Coordonnées Polaires	24
2-1-5 Trajectoire	25
2-1-5-1 Trajectoire ouverte	25
2-1-5-2 Trajectoire fermée	26

2-2 Vecteur Vitesse	26
2-2-1 Expression du vecteur vitesse	27
2-3 Vecteur Accélération	28
2.3.1 Vecteur accélération moyenne :	28
2.3.2 Vecteur accélération instantanée :	28
2-3-3 Expression analytique du vecteur accélération	28
2-4 Mouvement du point matériel	29
2-4-1 Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU):	29
2-4-2 Le Mouvement Rectiligne Uniformément Accélère	29
2-4-3 Le Mouvement Rectiligne sinusoïdal :	30
2-5 Mouvement Relatif	30
2-5-1 Transformation de Galilée	31
2-5-2 Relation entre les vitesses :	33
2-5-3 Relation entre les accélérations :	33
Exercices	34
Chapitre III : Dynamique	41
3-1 Généralité	41
3-1-1 La Force	41
a- La force de gravitation :	42
b- La force électrique	43
c- La force de rappel d'un ressort :	43
d- Les forces de frottement :	43
3.1.1 La Quantité De Mouvement	44
3-1-2 La masse	45
3-1-3 Moment D'une Force	45
3-1-3 Référentiels d'inertie ou galiléen	46
3-2 Les Lois De Newton	47
3-2-1 La première loi de Newton (le principe de l'inertie)	47
3-2-2 La deuxième loi de Newton (Principe Fondamental de la Dynamique (PFD))	48
3-2-3 La troisième loi de Newton Principe d'action et de réaction	49
3-3 Principe de Conservation de la quantité de mouvement	51
3-3-1 Collisions élastiques	52
3-4 Moment cinétique	53
Exercices	55

Chapitre IV Travail et énergie	61
4-1 Travail d'une force	61
4-1-1 Force constante sur un déplacement rectiligne	61
4-1-2 Travail élémentaire	63
4-1-3 Puissance d'une force	65
4-2 Energie cinétique.....	66
4-2-1 Définition.....	66
4-2-2 Théorème de l'énergie cinétique	67
Ce théorème s'énonce de la façon suivante :	67
La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés.....	67
4-3 Energie potentielle	67
4-3-1 Forces conservatives	67
4-3-2 Notion d'énergie potentielle.....	68
4-3-2-1 Energie potentiel élastique	68
4-3-2-2 Energie potentiel gravitationnelle	69
4-3-3 Energie mécanique totale	70
Exercices	73

Chapitre : Outils mathématiques

1. 1 Généralités sur les grandeurs physiques

On classe deux types de grandeurs

- grandeurs physiques repérables
- grandeurs physiques mesurables

1.1.1 Grandeurs physiques repérables

Une grandeur physique est repérable s'il est possible de définir une relation d'ordre pour chaque couple d'observation une grandeur, sans lui donner des valeurs numériques précises.

Exemple : Viscosité

1.1.2 Grandeurs physiques mesurables

Une grandeur physique est mesurable s'il est possible de définir l'égalité et l'addition de deux grandeurs de son espèce, et s'il est possible aussi de lui associer une valeur numérique. Le nombre qui mesure cette grandeur est le rapport de cette grandeur à la grandeur de même espèce choisie comme unité.

Il existe deux types de grandeurs mesurables : Scalaires et Vectorielles.

Exemple de grandeurs scalaires :

- Longueur
- Masse ..

Exemple de grandeurs vectorielles

- Vitesse ..

1-2 Les équations aux dimensions

1-2-1 Définition :

Le système international (S.I.) est constitué par les unités du système MKSA rationalisé (M : Mètre, K : Kilogramme, S : Seconde et A : Ampère) et comporte des définitions supplémentaires de l'unité de température et de l'unité d'intensité lumineuse.

A partir des unités de base auparavant définies, on peut définir facilement des unités qui en découlent exemple :

- Surface : mètre carré (m^2) Aire d'un carré de 1mètre de coté
- Volume : mètre cube (m^3) Volume d'un cube de 1mètre de coté.
- Vitesse : mètre par seconde (m/s) Vitesse d'un mobile qui, animé d'un mouvement uniforme, parcourt en 1 seconde, une distance de 1mètre.
- Accélération : mètre par seconde, par seconde (m/s^2)
- Vitesse Angulaire : radian par seconde (rd/s)

L'analyse dimensionnelle consiste à mettre en relation différentes dimensions entre elles par le biais de lois physiques ou de relations connues. Le mot dimension a une signification particulière en physique. Il désigne généralement la nature physique d'une quantité. La distance par exemple, que ce soit mesuré par l'unité du pied ou par le mètre reste toujours une distance. Nous disons que la dimension –la nature physique– de la distance est la longueur. La dimension d'une grandeur mécanique s'exprime en fonction des dimensions fondamentales L (longueur), T (temps) et M (masse). D'une manière générale il est possible d'exprimer la dimension de toutes les grandeurs physiques en fonction de sept dimensions de base.

Une grandeur physique est le produit d'une valeur numérique et d'une unité. Si l'on mesure la distance L , entre deux points, on présentera le résultat numérique sous la forme $L=35\text{m}$

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des unités fondamentales : Longueur, Masse et Temps : symbolisées par les majuscules L , M et T .

Les grandeurs physiques sont organisées dans un système dimensionné bâti sur sept grandeurs fondamentales à partir desquelles on définit toutes les autres. Le Système International d'Unités (SI) est basé sur ces sept unités fondamentales qui ont les mêmes dimensions que les grandeurs physiques associées. Leurs noms et leurs symboles sont résumés dans le tableau 1 :

Tableau 1 Les unités du système international (SI)

Grandeur	Nom de l'unité SI	Symbole de l'unité
Masse	kilogramme	kg
Longueur	mètre	m
Temps	seconde	s
Intensité électrique	ampère	A
Température thermodynamique	kelvin	K
Intensité lumineuse	candela	cd
Quantité de matière	mole	mol

En conséquence une v qui est le quotient d'une longueur L par un temps T est représentée par

$$v = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

- Une accélération : $\Gamma = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$

1-2-2 Utilités des équations aux dimensions

Les équations aux dimensions aident à examiner l'cohérence des formules :

Ainsi $E = \frac{1}{2}mv^2$ est cohérent à une énergie, l'équation aux dimensions d'un travail

est $W = ML^2T^{-2}$

$$\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow M\left(\frac{L}{T}\right)^2 \rightarrow ML^2T^{-2} \text{ Est une énergie.}$$

1-2-3 Corrélation entre les unités

Les corrélations entre les unités des divers systèmes peuvent être couramment installées en servant des équations aux dimensions.

On baptise équation aux dimensions de la grandeur(G), le monôme de cette grandeur écrit sous la forme : $[G] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$

Où M, L, T sont respectivement les symboles de la masse, de la longueur et du temps, et α , β et γ des nombres réels.

Le but de cette formule est surtout l'acquisition de l'unité de la grandeur (G) dans le système international des unités et qui doit être sous la forme : $Kg^\alpha M^\beta S^\gamma$

L'opération qui admet à inspirer les nombres réels α , β et γ s'appelle l'analyse dimensionnelle de la grandeur G.

Exemple : Déterminer l'équation aux dimensions de la vitesse et de l'accélération

$$\text{La vitesse : } v = \frac{x}{t} \rightarrow [v] = \frac{L}{T} \rightarrow [v] = LT^{-1} \quad v : ms^{-1}$$

$$\text{Accélération : } a = \frac{v}{t} \rightarrow [a] = \frac{v}{t} \rightarrow [a] = \frac{LT^{-1}}{T} \quad a : ms^{-2}$$

Symbole	Quantité et unité	dimension
V	Volume (m^3)	L^3
S	Surface(m^2)	L^2
α	Angle (rad)	1

<i>v</i>	Vitesse (<i>m / s</i>)	LT^{-1}
<i>a</i>	Accélération (<i>m / s²</i>)	LT^{-2}
<i>F</i>	Force (<i>Newton (N)</i>)	MLT^{-2}
<i>G</i>	Constante de la gravitation (<i>m³ / kg.s²</i>)	$M^{-1}L^3T^{-2}$
<i>ρ</i>	Densité (<i>kg / m³</i>)	ML^{-3}
<i>E</i>	Energie (<i>Joule (J)</i>)	ML^2T^{-2}
<i>Pu</i>	Puissance (<i>Watt (W)</i>)	ML^2T^{-3}

1-3 Calculs vectoriel

1-3-1 Notion de vecteur

Grandeur scalaire :

Grandeur physique complètement dénie en un point de l'espace au moyen d'un nombre indépendamment de toute direction ; exemples : le temps, la masse, la pression, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, la température.

On peut les additionner, les soustraire, les multiplier, les diviser

Grandeur vectorielle :

Grandeur physique complètement dénie par sa longueur (module, norme), sa direction (droite portant le vecteur) et son sens de parcourir la direction ; exemples : la vitesse d'un mobile, son accélération, la force agissant sur le mobile, la variation de la température.

On appelle vecteur lie, la donnée d'un couple de points (A, B) note : $\overrightarrow{AB}$ La droite (AB) est appelée le support du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}$: représente le vecteur

$\|\overrightarrow{AB}\| = |\overrightarrow{AB}| = AB$: représente le module ou l'intensité du vecteur

1-3-2 Le Vecteur Unitaire

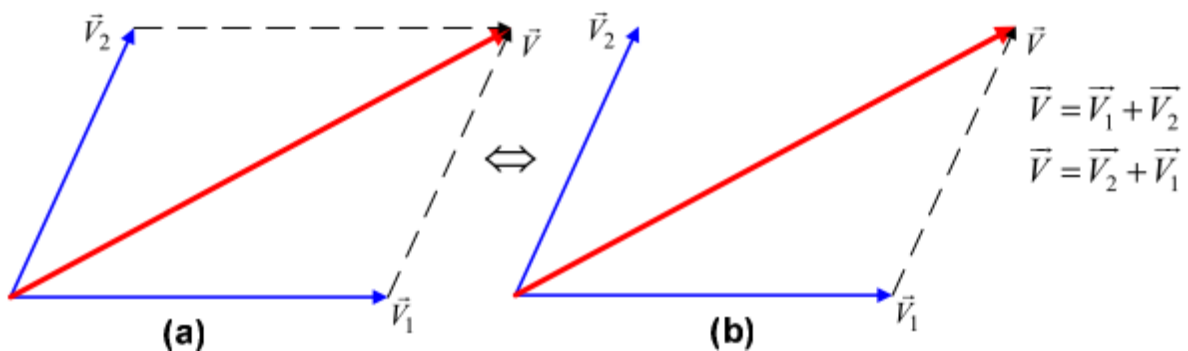
C'est un vecteur de module égal à l'unité (le nombre un). On peut exprimer un vecteur parallèle au vecteur unitaire sous la forme :

$$\vec{V} = V\vec{u}$$

1-3-3 La Somme Des Vecteurs

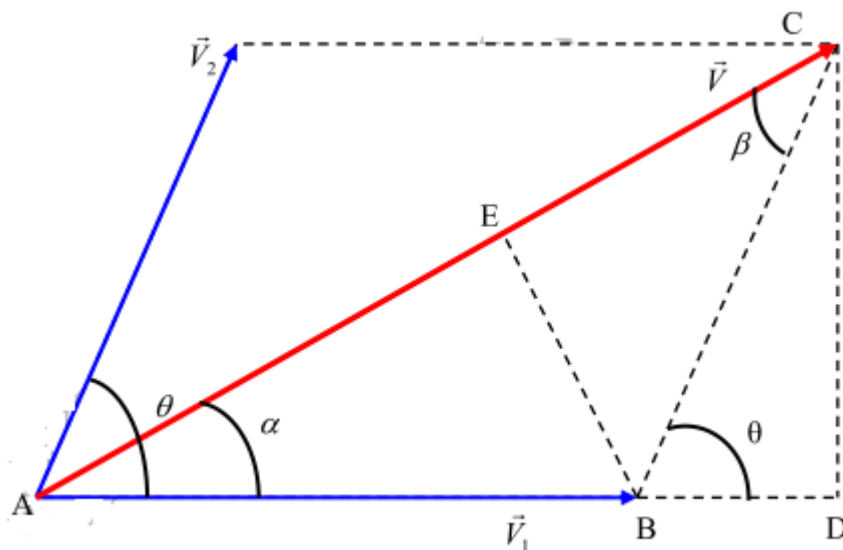
La somme de deux vecteurs : c'est une opération commutative.

On calcule le module du vecteur résultant à partir de la loi des cosinus



$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \theta}$$

Pour déterminer la direction de V il suffit de chercher la valeur de l'angle α



$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{V} \\ \sin \theta &= \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{V_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V \sin \alpha = V_2 \sin \theta$$

Nous pouvons en déduire la formule générale, appelée loi des sinus :

$$\frac{V}{\sin \theta} = \frac{V_1}{\sin \beta} = \frac{V_2}{\sin \alpha}$$

1-3-4 Composantes d'un Vecteur

En physique, on préfère, pour l'espace à trois dimensions, un système d'axes rectangulaires d'origine O et doté d'une base orthonormée formée de trois vecteurs unitaires (de module égal à l'unité) et perpendiculaires entre eux : $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$. Chaque vecteur peut être considéré comme étant la somme de deux vecteurs ou plus (le nombre de possibilités est illimité).

Les trois projections OM, ON, OP d'un vecteur $\vec{a}$ sur les trois axes de coordonnées O x y z peuvent être considérées comme trois vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}$, et $\vec{Z}$ portés respectivement par ces trois axes, dont le sens et les grandeurs sont définis par les trois nombres algébriques X, Y et Z.

Le vecteur $\vec{a}$ est la somme des trois vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}$, et $\vec{Z}$

$$\vec{a} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}$$

Les trois vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}$, et $\vec{Z}$ s'appellent les 3 composantes du vecteur $\vec{a}$

Si on a 3 vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$ de composantes $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1), (\vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$ et $(\vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (\vec{X}_1 + \vec{Y}_1 + \vec{Z}_1) + (\vec{X}_2 + \vec{Y}_2 + \vec{Z}_2) + (\vec{X}_3 + \vec{Y}_3 + \vec{Z}_3) \\ &= (\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3) + (\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2 + \vec{Y}_3) + (\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \vec{Z}_3) \end{aligned}$$

L'égalité vectorielle $\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3}$ est équivalente aux trois égalités

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

1-3-5 Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ faisant entre eux l'angle θ

$$m = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{Un scalaire}$$

$$m = a.b.\cos\theta = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$$

- le produit scalaire est commutatif c'est-à-dire $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a^2$
- en désignant par X, Y, Z et X', Y', Z' les coordonnées de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ par rapport aux trois axes rectangulaires de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ on peut écrire : $\vec{a} \cdot \vec{b} = XX' + YY' + ZZ'$

Le produit scalaire est :

- ✓ Commutatif
- ✓ Distributif par rapport à la somme vectorielle

1-3-6 Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel d'un vecteur $\vec{a}$ par un vecteur $\vec{b}$ et qu'on note par : $\vec{P} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

Un vecteur libre $\vec{P}$ perpendiculaire au plan des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de tel sorte que le trièdre a, b, p soit direct et dont le module est donné par :

$$P = a.b.\sin\theta$$

Le module de p correspond donc à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Il résulte de la définition que le produit vectoriel n'est pas indépendant de l'ordre des deux facteurs :

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{b} \wedge \vec{a}$ Sont deux vecteurs opposés.

Pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ on suit les étapes suivantes :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{W} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_2 z_1 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k} \end{aligned}$$

Le module du vecteur est donné par l'expression :

$$W = a.b.(\sin \angle \vec{a} \vec{b})$$

Le produit vectoriel est :

- ✓ Anticommutatif
- ✓ Non associatif
- ✓ Distributif

1-3-7 Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ une quantité scalaire m égale au produit scalaire du troisième vecteur et du produit vectoriel des deux premiers :

$$m = (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c}$$

Ce produit mixte donne le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$

$$\begin{aligned} m &= (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ &= (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} \\ &= (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

1-4 Gradient, Divergence Rotationnel, et Laplacien

1-4-1 Le Gradient

Le « gradient » d'une fonction scalaire f $\overrightarrow{\text{grad}} f$ consiste à fabriquer un vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles de f par rapport aux coordonnées x , y et z .

Si $f(x, y, z)$ est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Autre Définition

Le **gradient** d'une fonction de plusieurs changeants en un certain point est un vecteur qui caractérise la variabilité de cette fonction au voisinage de ce point. Défini en tout point où la fonction est différentiable, il définit un champ de vecteurs, également dénommé *gradient*. Le gradient est la généralisation à plusieurs variables de la dérivée d'une fonction d'une seule variable.

1-4-2 La Divergence

Si $V (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant :

$$\text{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

1-4-3 Le Rotationnel

Si $V(V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{rot(V)} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \vec{k}$$

1-4-4 Le Laplacien

Le Laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Exercices

Exercice 1

On examine, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, trois vecteurs :
 $\vec{A} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{C} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

1. calculer les modules de $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$
2. calculer le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{C}$ et en déduire l'angle formé par les deux vecteurs.
3. calculer le produit vectoriel $\vec{B} \wedge \vec{C}$

Solution

1. $A = 6.4$ $B = 5.38$ $C = 5.91$
2. $\vec{A} \cdot \vec{C} = x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 = 15 + 4 + 12 = 31$
 $\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{A \cdot C} = \frac{31}{6.40 \times 5.38} = 0.176 \Rightarrow \alpha = 79.86^\circ$
3. $\vec{B} \wedge \vec{C} = 5\vec{i} + 26\vec{j} - 17\vec{k}$

Exercice 2

1. Trouver la somme des trois vecteurs :
 $\vec{A} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{B} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{C} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$
2. Trouver le module de la résultante
3. Trouver les angles quelle forme avec les axes OX, OY et OZ

Solution

1.

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$$

$$D = 8.54$$

2.

$$D_x = D \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{8.54} = 0.70 \Rightarrow \alpha = 45.6^\circ$$

$$D_y = D \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{8.54} = 0.70 \Rightarrow \beta = 45.6^\circ$$

$$D_z = D \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{8.54} = 0.12 \Rightarrow \gamma = 83.1^\circ$$

Exercice 3

Donner une relation entre α , β et γ pour que les trois vecteurs $\vec{u}$ (α , 1, 0), $\vec{v}$ (-1, β , 1) et $\vec{w}$ (1, -1, γ) ne soient pas coplanaires. Calculons le produit mixte

Solution

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & \beta & 1 \\ 1 & -1 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma + 1$$

La condition est donc

$$\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma + 1 \neq 0.$$

Exercice 4

Soient les deux vecteurs $\vec{A} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\vec{B} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Trouver α et β pour que $\vec{B}$ soit parallèle à $\vec{A}$

Solution

Pour que les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient parallèles il faut que la relation $\vec{B} = \lambda \vec{A}$ Soit vérifiée, avec λ constante.

$$\frac{\vec{B}}{\lambda} = \vec{A} \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\lambda} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\lambda} \\ \frac{-3}{\lambda} \\ \frac{4}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{2}{\lambda} = 1 \\ \frac{-3}{\lambda} = \alpha \\ \frac{4}{\lambda} = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \alpha = -1.5 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{B} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Chapitre II : Cinématique

En mécanique, on étudie le mouvement de certains corps ou de certaines parties de l'Univers. Toute partie que l'on peut ainsi isoler est appelée système mécanique. On étudiera, en mécanique classique, particulièrement des objets qui sont directement sensibles par nos sens. Il faut toutefois noter que la mécanique classique peut s'utiliser dans de nombreux cas où il n'en est pas ainsi, notamment dans certains problèmes de mécanique des particules.

Un point matériel est défini comme étant un élément de matière, de dimensions négligeables, que l'on assimile à un point géométrique. En réalité, on étudie le mouvement du centre de masse d'un corps, point au quel est supposé concentré toute la masse du corps.

On appelle solide tout système matériel pour lequel les distances entre deux points du système sont constantes et invariantes au cours du temps. On peut noter qu'il s'agit d'un modèle simplificateur : un solide subit des déformations liées aux contraintes qui lui sont imposées. Par exemple, lorsqu'on tire sur les deux extrémités d'une barre métallique, celle-ci peut se déformer, voire se casser, si la contrainte est trop importante. La définition qui vient d'être donnée exclut ce type de déformations : cela suppose que celles-ci sont négligeables par rapport aux autres aspects mécaniques.

Le but de la cinématique est le traité des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui le produisent. L'étude du mouvement d'un corps est l'étude des positions successives de ce corps par rapport à un repère pris comme référence (en général, un trièdre de référence ou référentiel). La notion de temps est aussi prise en considération. En mécanique, dans l'étude des mouvements, on tient compte des forces qui les incitent.

2-1 Vecteur position

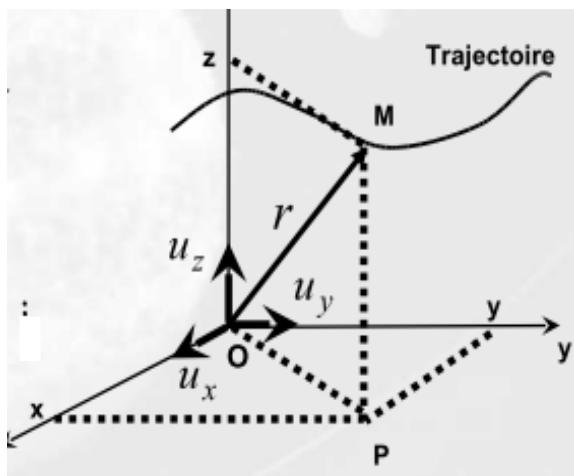
Dans l'espace, le vecteur position d'une particule de coordonnées cartésiennes (x, y, z) s'écrit : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ce vecteur concerne évidemment du choix d'une origine de l'espace.

2-1-1 Coordonnées cartésiennes

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ Est appelé rayon vecteur de M.

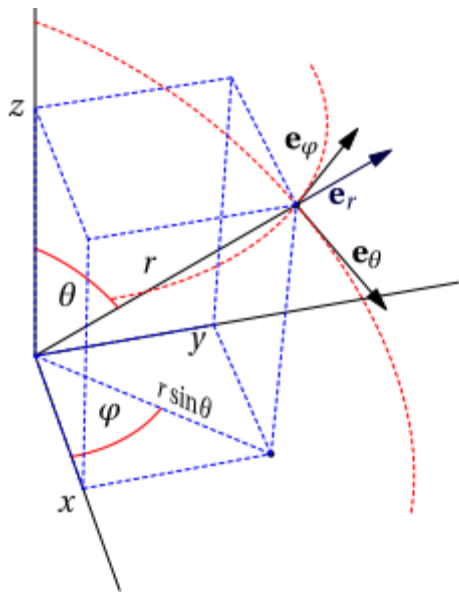
La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est aussi appelée base cartésienne. Pour cette base cartésienne, on écrira souvent les vecteurs de base (x, y, z)

Dans une base cartésienne, le module (ou norme) de r est alors donné par : $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



2-1-2 Coordonnées Sphériques

Un autre système de coordonnées utile est celui des coordonnées sphériques (r, θ, φ). Il est ainsi défini par rapport au système des coordonnées cartésiennes :



$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

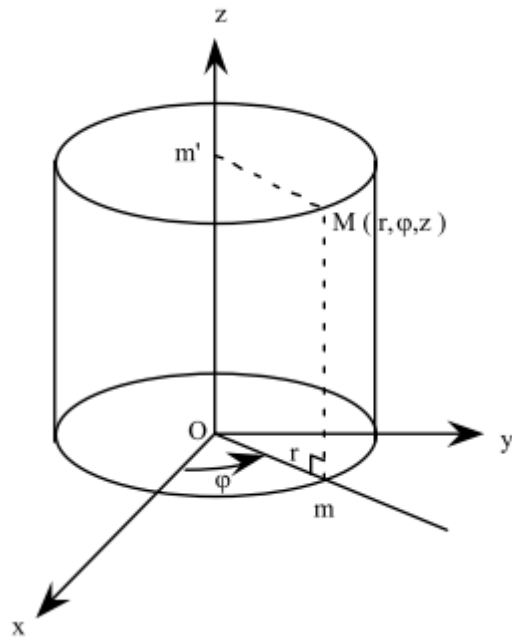
2-1-3 Coordonnées Cylindriques

Si la trajectoire est spatiale, où ρ et φ jouent un rôle remarquable dans la détermination de la position du point matériel, il est préférable de faire appel aux coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

ρ : rayon polaire

φ : angle polaire

z : altitude

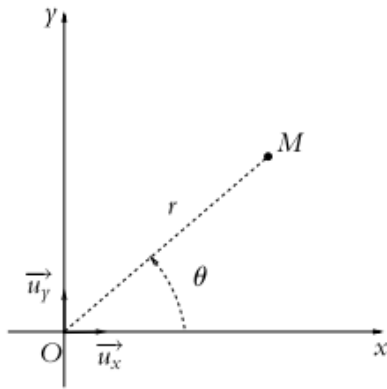


Les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques :

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \\ \varphi = \arccos \frac{x}{\rho} \end{array} \right.$$

2-1-4 Coordonnées Polaires

La symétrie polaire comporte à privilégier un point O fixe autour duquel tourne le point M. La position de M est alors définie par la distance r du point M au point O. On utilise en outre un angle orienté de rotation appelé angle polaire et noté habituellement θ .



On peut relier les coordonnées polaires d'un point à ses coordonnées cartésiennes. Il suffit pour cela de choisir l'axe (Ox) par exemple comme axe de référence pour l'angle de rotation θ et de projeter sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \end{array} \right.$$

2-1-5 Trajectoire

C'est l'emplacement des positions consécutives attachées par un point mobile. Celle-ci peut être droite ou bien curviligne. Elle peut être ouverte ou fermée.

✓ Equation du mouvement (ou équation Horaire) C'est la relation qui lie le chemin parcouru, au temps nécessaire à le parcourir.

✓ Définition intrinsèque du mouvement

Le mouvement d'un point M est exactement défini si l'on connaît :

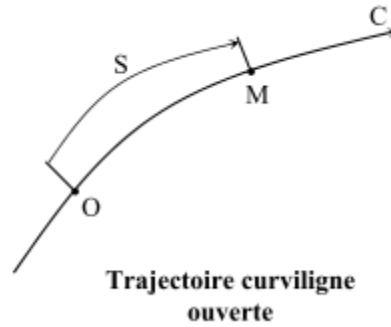
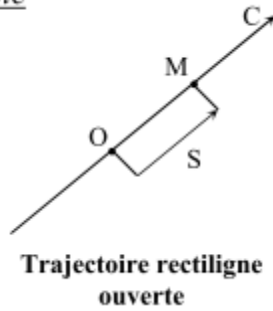
- la trajectoire C
- la position, à chaque instant « t » du point M sur la trajectoire C.

On fait le choix d'une origine et d'un sens positif (indiqué par une flèche).

OM est défini par la fonction $OM = S = f(t)$

2-1-5-1 Trajectoire ouverte

Exemple



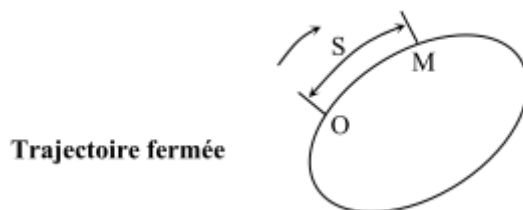
Une position de M est déterminée par son abscisse curviligne (S) par rapport à l'origine O.

Valeur absolue de ce nombre S : longueur de l'arc OM.

- Signe + si M se déplace dans le sens positif de la trajectoire
- Signe - si M se déplace dans le sens négatif de la trajectoire

2-1-5-2 Trajectoire fermée

A une abscisse curviligne S donnée, correspond un seul point M, mais la réciproque n'est plus vraie ici.



A un point donné M, correspond une infinité d'abscisses curvilignes qui sont données par la relation :

$$s = S + KL$$

s : l'une des abscisses ;

S = OM (mesuré dans le sens positif)

L : longueur de la courbe

K : entier positif, négatif ou nul.

2-2 Vecteur Vitesse

Soit un point mobile M, sur une trajectoire quelconque, au temps « t », il est dans la position M ; au temps « t₁ » il est dans la position M₁. On définit :

- la vitesse moyenne ;
- la vitesse instantanée.

La vitesse moyenne $\vec{v}_{moy}$ est la vitesse d'un point mobile qui irait de M à M₁ pendant le temps « Δt » d'un mouvement rectiligne et uniforme.

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$$

La Vitesse instantanée

C'est la limite du rapport $\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$ lorsque $t_1 \rightarrow t$, c'est-à-dire lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ notée $\vec{v}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

2-2-1 Expression du vecteur vitesse

Soit un point M avec les coordonnées $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

Le vecteur vitesse est défini par les coordonnées du vecteur dérivée de OM par rapport au temps :

$$\vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{cases} x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{cases}$$

On peut écrire le vecteur vitesse sous la forme :

$$\vec{V}_M = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

2-3 Vecteur Accélération

L'accélération est une grandeur (unité : ms^{-2}) qui exprime le rapport de la distance parcourue au carré la durée mise pour la parcourir. C'est aussi une mesure de la variation de la vitesse par unité de temps.

2.3.1 Vecteur accélération moyenne :

Pour caractériser la façon dont change la vitesse (en module et en direction), nous définissons l'accélération moyenne pendant un intervalle de temps Δt comme :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Le vecteur $\Delta \vec{V}$ est la variation du vecteur vitesse instantanée entre les deux instants.

L'accélération moyenne a comme module $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ et pour direction celle du vecteur $\Delta \vec{V}$

2.3.2 Vecteur accélération instantanée :

Si nous considérons un intervalle de temps Δt très faible, nous obtenons à la limite l'accélération à l'instant t :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \quad \text{on la note :} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$$

2-3-3 Expression analytique du vecteur accélération

$$\text{On a } \vec{V}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{cases} x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{dV}{dt} = \begin{cases} x''(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ y''(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \\ z''(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2} \end{cases}$$

Module de l'accélération :

$$\gamma = |\vec{\gamma}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

2-4 Mouvement du point matériel

2-4-1 Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU):

Le MRU est un mouvement rectiligne à vitesse constante :

$$V(t) = V_0$$

$$a = \frac{dV_0}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \Rightarrow x(t) = x_0 + v(t - t_0) \quad \text{avec } x_0 = x(t_0)$$

Où $0 \leq x(t) = x_0$. C'est une équation, représentée par une droite

2-4-2 Le Mouvement Rectiligne Uniformément Accélère

Le mouvement rectiligne uniformément a accélération constante :

$$a = a_0$$

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \Rightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a(t - t_0) \Rightarrow x(t) = x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

La fonction $x(t)$ est du second degré et la courbe à laquelle elle correspond est une parabole

$$V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$$

2-4-3 Le Mouvement Rectiligne sinusoïdal :

Le mouvement d'un point M est dit Rectiligne sinusoïdal si

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

X_m : L'amplitude de mouvement

$\omega t + \varphi$: Phase à l'instant t avec ϕ la phase à l'origine $t = 0$

x variant sinusoïdal de $-X_m$ à X_m

L'expression de la vitesse : $V(t) = x' = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$

Accélération $a = V'(t) = x'' = -\omega^2 X_m (\cos(\omega t + \varphi))$

L'équation différentielle du mouvement est donc : $x'' + \omega^2 x = 0$

2-5 Mouvement Relatif

Deux repères peuvent être en mouvement relatif, soit parce que leurs origines se déplacent l'une par rapport à l'autre, soit parce que l'orientation relative des deux repères change avec le temps.

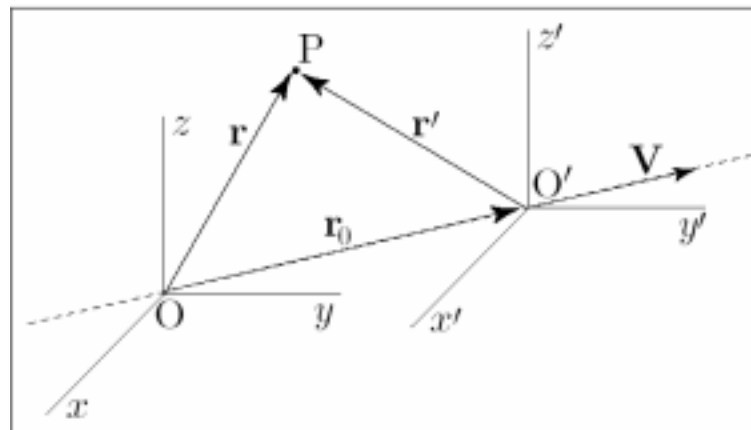
On peut bien utiliser une variété de repères différents qui ne sont pas en mouvement les uns par rapport aux autres. Par exemple, il peut s'agir de deux repères cartésiens qui diffèrent seulement par le choix de l'origine, ou par

l'orientation des axes. On dira que ces deux repères appartiennent au même référentiel, puisqu'ils ne sont pas en mouvement relatif.

Au contraire, deux repères cartésiens qui se déplacent à une vitesse constante l'un par rapport à l'autre n'appartiennent pas au même référentiel. Notez qu'une quantité comme la vitesse v d'une particule ne dépend pas du repère utilisé

2-5-1 Transformation de Galilée

Considérons le cas d'un repère cartésien R' qui coïncide avec un autre repère R (même origine et mêmes axes) au temps $t = 0$, mais dont l'origine O' se déplace à la vitesse constante $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ par rapport au repère R . Au temps t , la position $\vec{r}_0$ de l'origine O' sera $\vec{V}t$. On dit que R et R' constituent alors des référentiels inertiels. Voir figure ci-dessous.



Pour un point quelconque P de l'espace, en supposant que la relation entre les deux repères peut s'obtenir à partir de la simple addition vectorielle

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

avec un vecteur de translation $\vec{r}_0 = t\vec{V}$ qui dépend du temps, alors la position $\vec{r}'$ du point P vu depuis le repère R' s'exprime ainsi en fonction de la position $\vec{r}$ du même point dans le repère R :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Le temps t s'écoule de la même façon dans les deux référentiels

$$t = t'$$

vitesse relative constante V est dirigée selon l'axe des x .

La relation entre les coordonnées d'espace et de temps des deux référentiels est la suivante :

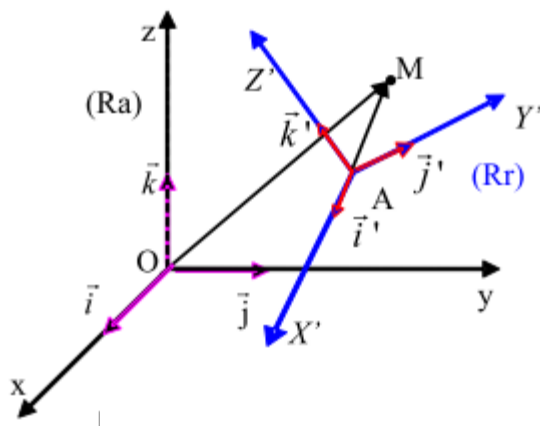
$$x' = x - Vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Cette relation est la transformation de Galilée.



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

avec

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AM} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

2-5-2 Relation entre les vitesses :

En dérivant cette relation par rapport au temps, on obtient la relation entre les différentes vitesses :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} + \vec{i}' \frac{dx'}{dt} + \vec{j}' \frac{dy'}{dt} + \vec{k}' \frac{dz'}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{V_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}}_{V_e} + \underbrace{\vec{i}' \frac{dx'}{dt} + \vec{j}' \frac{dy'}{dt} + \vec{k}' \frac{dz'}{dt}}_{V_r}$$

V_a : La vitesse absolue : c'est la vitesse de M par rapport au repère (Ra)

V_e : Vitesse d'entraînement : c'est la vitesse du repère mobile (Rr) par rapport au repère absolu fixe (Ra)

V_r : Vitesse relative, c'est la vitesse du point M par rapport au repère (Rr).

Donc

$$V_a = V_e + V_r$$

2-5-3 Relation entre les accélérations :

Pour trouver accélération On dérive une deuxième fois

$$\begin{aligned}
a_a &= \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{dV_a}{dt} = \underbrace{\frac{d^2 \overrightarrow{OA}}{dt^2} + x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2}}_{a_e} \\
&\quad + \underbrace{i' \frac{d^2 x'}{dt^2} + j' \frac{d^2 y'}{dt^2} + k' \frac{d^2 z'}{dt^2}}_{a_r} \\
&\quad + 2 \underbrace{\left[\frac{dx' di'}{dt^2} + \frac{dy' dj'}{dt^2} + \frac{dz' dk'}{dt^2} \right]}_{a_c}
\end{aligned}$$

a_a : accélération absolue : c'est l'accélération de M par rapport au repère (Ra)

a_r : accélération relative : c'est l'accélération de M par rapport au repère (Rr)

a_e : accélération d'entraînement : c'est l'accélération du repère (Rr) par rapport au repère (Ra)

a_c : accélération de Coriolis : c'est une accélération complémentaire appelée accélération de Coriolis en mémoire à son auteur (Gaspard Coriolis 1792-1843) qui l'a établie en 1832.

Exercices

1. Une moto parcourt 30 kilomètres de ligne droite en 50 minutes. Que vaut la vitesse moyenne exprimée en m/s?
2. Un athlète parcourt 100 m en 8 s et 13 centièmes. Que vaut sa vitesse moyenne exprimée en Km/h?
3. Un escargot parcourt 1 mm en 10 s. que vaut sa vitesse moyenne en Km/h ?
4. X et Y quittent leurs maisons au même moment et roulent en sens opposé. X a une vitesse de 30 Km/h alors que Y a une vitesse deux fois plus grande. Quelle est la distance entre leurs maisons sachant qu'ils se croisent après 10 min ?
5. Une voiture est sur le point d'en dépasser une autre. Sa vitesse augmente de 50 à 100 Km/h en 4 s. Que vaut l'accélération moyenne en m/s²?
6. Une voiture, qui a une vitesse initiale de 20 m/s freine avec une décélération de 3 m/s². Quel temps lui faudra-t-elle pour s'arrêter?

Exercice 1

Un point matériel se déplace dans le plan (xOy) suivant les équations suivantes :

$$x(t) = t \quad \text{et} \quad y(t) = t^2$$

- Donner l'équation de mouvement du mobile
- calculer la vitesse ainsi que l'accélération du pt M.

Solution

- $y = x^2$ équation de la trajectoire
- $\vec{v} = \vec{i} + 2t\vec{j}$ et $\vec{a} = 2\vec{j}$

Exercice 2

Deux modèles réduits de voitures radiocommandées ont des performances différentes : le premier a une accélération de $4,0 \text{ m.s}^{-2}$, le second de $5,0 \text{ m.s}^{-2}$. Cependant l'utilisateur de la première voiture a plus de réflexes que celui de la seconde, ce qui lui permet de la faire démarrer $1,0 \text{ s}$ avant le second.

1. Déterminer le temps nécessaire au véhicule à plus grande accélération pour rattraper l'autre.
2. Calculer pour les deux courses la vitesse finale de chacun des véhicules.

Solution

1. Pour le premier, on a une accélération a_1 constante soit après une double intégration l'équation horaire suivante

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

$$\text{Pour le deuxième, } x_2 = \frac{1}{2} a_2 (t - t_0)^2$$

On cherche l'instant pour lequel on a $x_1 = x_2$. La résolution de l'équation du second degré

$$(a_1 - a_2)t^2 - 2a_2 t_0 t + a_2 t_0^2 = 0$$

$$\text{Donne } t = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_1 a_2}}{a_2 - a_1} t_0$$

L'application numérique donne $t = 9,5 \text{ s}$ et $t = 0,5 \text{ s}$. La seconde solution n'est pas possible puisque l'un des deux n'est pas encore parti

Il faut donc $8,5 \text{ s}$ pour que le second rattrape le premier.

$$2. \quad v_1 = 38 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } v_2 = 42.5 \text{ m.s}^{-1}$$

Exercice 3

Un point matériel se déplace sur l'axe $x'Ox$ de façon qu'entre le carré v^2 de sa vitesse et son abscisse x , il existe la relation $v^2 = Ax + B$, où A et B sont des constantes.

1. Calculer l'accélération du mobile. Que peut-on dire du mouvement ?
2. Connaissant la nature du mouvement, trouver par une autre méthode les valeurs de A et B en fonction des caractéristiques du mouvement.

Solution

1. On dérive les deux membres de l'équation par rapport au temps :

$$2v \frac{dv}{dt} = A \frac{dx}{dt}$$

$$2.v.a = Av$$

$$a = \frac{A}{2}$$

Comme l'accélération est constante et la trajectoire une droite, le mouvement est rectiligne uniformément varié.

2. Détermination de A et B :

$$v = at + v_0$$

$$v^2 = a^2 t^2 + v_0^2 + 2av_0 t$$

$$v^2 = a(at^2 + 2v_0 t) + v_0^2$$

$$v^2 = 2a\left(\frac{1}{2}at^2 + v_0t\right) + v_0^2$$

$$\text{avec } x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

$$v^2 = 2ax + v_0^2$$

D'après les données : $v^2 = Ax + B$

On en déduit : $2a = A$ et $B = v_0^2$

Exercice 4

1. Un mobile, animé d'un mouvement sur l'axe (Ox) avec une vitesse

$v_x(t) = 2t + 1$ m/s, passe au point d'abscisse $x_0 = 2$ m au temps $t_0 = 0$ s.

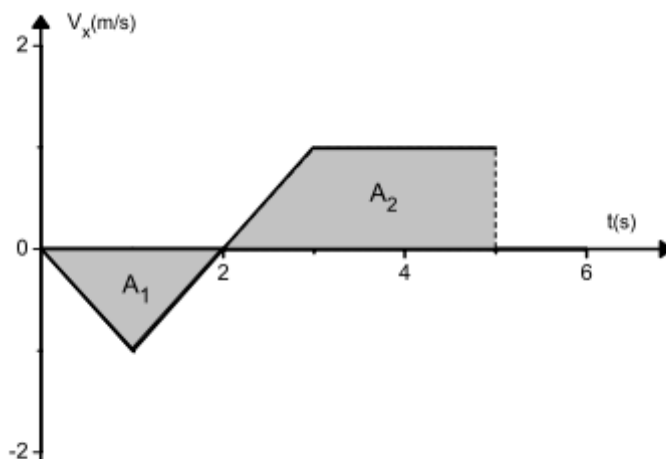
Déterminez l'équation horaire de la position.

2. considérons le diagramme de vitesse de la figure, connaissant $x(0s) = 1$ m, déterminons $x(2s)$ et $x(5s)$

Solution

$$1. \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t) dt = 2 + \int_{t_0}^t (2t + 1) dt = t^2 + t + 2(m)$$

2.



$$x(2s) = x(0s) + \int_0^2 v_x(t) dt = 1 + \text{aire } A_1 = 1 + \frac{2(-1)}{2} = 0m$$

$$x(5s) = x(2s) + \int_2^5 v_x(t) dt = 0 + \text{aire } A_2 = \frac{[(5-3) + (5-2)] \times 1}{2} = 2.5m$$

Exercice 5

Un point matériel se déplace sur une ligne droite suivant l'équation horaire suivante :

$$x(t) = -6t^2 + 16t$$

1. Quelle est la position de ce corps à $t=1s$
2. A quel instant t , il passe par la position l'origine O
3. Quelle est la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris entre 0s et 2 s
4. Donner l'expression de la vitesse instantanée, déduire sa valeur à $t=0s$

Solution

1. $X(1)=10$
2. $X=0 \quad 6t^2+16t=0 \quad$ il passe par l'origine à $t=0s$ et $t=8/3=2.7s$
3. $v_{moy} = \frac{x(t=2) - x(t=0)}{2-0} = 4m/s$
 $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{moy} = 16 - 12t = 16m/s$
4. $(v(0) = 16m/s)$

Exercice 6

Un conducteur roule à vitesse constante v_0 sur une route rectiligne. Comme il est en excès de vitesse à 110 km.h^{-1} , un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse de 90 km.h^{-1} au bout de 10 s.

1. Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ?
2. Quelle distance aura-t-il parcourue ?
3. Quelle vitesse aura-t-il alors atteinte ?

Solution

1. Soit Ox l'axe le long duquel a lieu le mouvement. La vitesse de la voiture est $\dot{x} = v_0$ et sa position $x = v_0 t$ en prenant l'origine à la position de la voiture ou celle de la moto (ce sont les mêmes) à $t = 0$.

Quant à la moto, son accélération est $\ddot{x} = a_0$ dont on déduit par intégration sa vitesse $\dot{x} = a_0 t$ et sa position $x = \frac{1}{2} a_0 t^2$.

On cherche l'instant pour lequel les positions de la voiture et de la moto sont à nouveau identiques, ce qui revient à résoudre $v_0 t = \frac{1}{2} a_0 t^2$. Les solutions sont $t = 0$

qui n'est bien évidemment pas la solution cherchée et $t = \frac{2v_0}{a_0} = 22.2 \text{ s}$

On note qu'il faut pour faire l'application numérique transformer la vitesse en m.s^{-1} soit $v_0 = 100 \text{ km.h}^{-1} = 27,8 \text{ m.s}^{-1}$ et déterminer l'accélération par le fait qu'au bout de 10 s, la moto atteint une vitesse de 90 km.h^{-1} ou 25 m.s^{-1} soit $a_0 = \frac{v_0}{t} = 2.5 \text{ m.s}^{-2}$

2. La distance parcourue est alors $d = v_0 t_0 = 617 \text{ m}$.

3. La moto possède alors une vitesse $v_m = a_0 t_0 = 55 \text{ m.s}^{-1} = 198 \text{ km.h}^{-1}$

Exercice 7

Dans cet épisode de la Guerre des Étoiles, on peut assister à une course poursuite de « speeder » entre des cheminées d'usine. On suppose que le véhicule suit une trajectoire sinusoïdale de slalom entre les cheminées alignées selon l'axe Ox. Elles sont espacées d'une distance $L = 200 \text{ m}$.

1. Le véhicule conserve une vitesse v_0 constante selon Ox. Il met un temps $t_t = 12 \text{ s}$ pour revenir sur l'axe après la sixième cheminée. En déduire la vitesse v_0 . Effectuer l'application numérique.
2. Déterminer l'amplitude de la sinusoïde pour que l'accélération reste inférieure à $10g$ en valeur absolue, avec $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Que penser des valeurs obtenues ?

Exercice 8

Deux modèles réduits de voitures radio-commandées ont des performances différentes : le premier a une accélération de $4,0 \text{ m.s}^{-1}$, le second de $5,0 \text{ m.s}^{-1}$.

Cependant l'utilisateur de la première voiture a plus de réflexes que celui de la seconde, ce qui lui permet de la faire démarrer 1,0 s avant le second.

1. Déterminer le temps nécessaire au véhicule à plus grande accélération pour rattraper l'autre.
2. Les deux modèles réduits participent à des courses de 100 m et 200 m. Est-il possible que le perdant du 100 m prenne sa revanche au 200 m ?
3. Calculer pour les deux courses la vitesse finale de chacun des véhicules.

Chapitre III : Dynamique

3-1 Généralité

3-1-1 La Force

La dynamique en physique est la science qui explique la relation entre le corps en mouvement et les causes qui excitent ce mouvement. Elle prévoit aussi le mouvement du corps situé dans un milieu déterminé. La dynamique, plus précisément, est l'analyse de la relation entre la force appliquée et les changements du mouvement du corps.

La dynamique s'intéresse aux causes pour lesquelles les objets se déplacent comme ils le font. Pourquoi un objet immobile se met-il en mouvement ? Qu'est-ce qui amène un mobile à accélérer ou à ralentir ? Dans ces deux cas, c'est une action extérieure à l'objet, qui a une direction et un sens, et que l'on appelle force, qui modifie l'état de mouvement de l'objet. La force qui modifie le mouvement d'un mobile est nécessairement exercée sur ce mobile par un autre objet, soit directement par contact, comme la force de poussée de quelqu'un qui pousse un wagonnet ou la force de traction exercée par un enfant qui tire un traîneau, soit indirectement, à distance, c'est le cas de la force d'attraction de la terre sur la lune ou de la force de répulsion qui existe entre deux charges électriques de même signe.

La force est une grandeur caractérisée par une intensité, une direction et un sens. Mais pour pouvoir dire qu'il s'agit d'un vecteur, il faut vérifier qu'elle obéit à la loi de l'addition vectorielle. On peut vérifier expérimentalement à l'aide de dynamomètres, qu'il en est bien ainsi.

Par exemple, la figure ci-dessus représente une force horizontale de quatre unités, F_1 , et une force verticale de 3 unités, F_2 .

L'expérience montre que l'effet combiné de ces deux forces est le même que celui d'une force unique de 5 unités, faisant un angle de 37° avec l'horizontale.

$$\text{Donc } \vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Une force est toute cause capable de déformer ou de modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps.

L'ensemble des données physiques et chimiques étudiés sont basés sur la notion d'interaction, au cours de laquelle un échange d'énergie, de matière ou de quantité de mouvement a lieu entre deux entités physique différentes. Il existe 4 interactions fondamentales de nature différentes : l'interaction gravitationnelle, l'interaction faible, l'interaction forte et l'interaction électromagnétique. En mécanique classique, les interactions entre points matériels peuvent être décrites par des grandeurs vectorielles appelées « forces ». L'ensemble des forces observées dans la nature ne sont que la manifestation macroscopique des 4 interactions décrites ci-dessus. La force résultant de plusieurs actions mécaniques est égale à la somme vectorielle des forces dues à chacune de ces actions.

L'unité de force est le Newton (N) on a $1N = 1kg.ms^{-2}$. Sa dimension est $[M][L][T]^{-2}$.

Les différents types de forces :

a- La force de gravitation :

La force gravitationnelle est une force toujours attractive qui agit entre deux corps massifs. L'expression de la force exercée par un corps B de masse m_B sur un corps A de masse m_A se note :

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = G \cdot \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{e}_{AB}$$

Où r est la distance entre les corps A et B, $\vec{e}_{AB}$ est un vecteur unitaire dirigé selon $\overline{AB}$ et $G = 6.67.10^{-11} m^3.Kg^{-1}.s^{-2}$ est la constante universelle de gravitation. L'intensité de la force gravitationnelle est extrêmement faible. Ainsi, ses effets ne sont impressionnables que lorsque des objets très lourds sont en jeu.

b-La force électrique

La force électrique traduit l'interaction entre deux corps ponctuels A et B portant respectivement les charges q_A et q_B . S'ils sont séparés d'une distance r , la force exercée par le cor B sur le corps A est :

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = -k. \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{e}_{AB}$$

Où $k \approx 9.10^9 kg.m^3.A^{-2}.s^{-4}$ est la constante de Coulomb et $\vec{e}_{AB}$ est un vecteur unitaire dirigé selon $\overline{AB}$. Si les charges sont de même signe, elles ont tendance à se repousser. Si elles sont de signes différents, elles ont tendance à s'attirer.

c- La force de rappel d'un ressort :

La force de rappel d'un ressort s'exprime par :

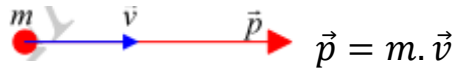
$\vec{F} = -k(l - l_0).\vec{i}$ Ou $k(Nm^{-1})$ est une constante caractéristique du ressort appelée « raideur du ressort », l_0 est la longueur à vide du ressort et l est la longueur à un instant t du ressort. $\vec{i}$ est un vecteur unitaire dirigé dans l'axe du ressort et orienté depuis son point d'attache jusqu'un son extrémité. La force de rappel change en amplitude et en sens selon la longueur du ressort.

d- Les forces de frottement :

Les forces de frottements sont dues à l'interaction entre les molécules de deux corps. Le phénomène microscopique est très compliqué et dépend de nombreux facteurs tels que l'état, la nature et la vitesse des surfaces en glissement l'une par rapport à l'autre.

3.1.1 La Quantité De Mouvement

Définition : la quantité de mouvement d'une particule est le produit de sa masse par son vecteur vitesse instantanée.



La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle. Cette une notion très importante car elle introduit deux éléments qui caractérisent l'état de mouvement de la particule : sa masse et sa vitesse.

Nous pouvons à présent donner un nouvel énoncé du principe d'inertie : « une particule libre se déplace toujours avec une quantité de mouvement constante ».

Conservation de la quantité de mouvement

S'il y a changement de la vitesse ou de la quantité de mouvement cela déduit que la particule n'est pas libre. Présumons l'existence de deux particules libres qui ne sont soumises qu'aux influences mutuelles entre elles ; elles sont donc isolées du reste de l'univers

$$\text{Au temps } t : \vec{P} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\text{Au temps } t' : \vec{P}' = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2'$$

Les expériences ont prouvé que $\vec{P} = \vec{P}'$ c'est-à-dire que toute la quantité de mouvement d'un système composé de deux particules, soumises à leurs seules influences mutuelles, reste constante.

3-1-2 La masse

La masse est une grandeur physique comptant la capacité du corps à résister au mouvement qu'on désire lui imposer. La masse d'un corps est relative à la quantité de matière qui le compose, en résultat elle est d'autant plus élevée que l'inertie de celui-ci est plus grande. Ainsi, on peut examiner la masse comme une mesure de l'inertie. C'est-à-dire que plus un objet aura une masse importante et plus il sera difficile de le faire accélérer, ralentir ou changer de direction.

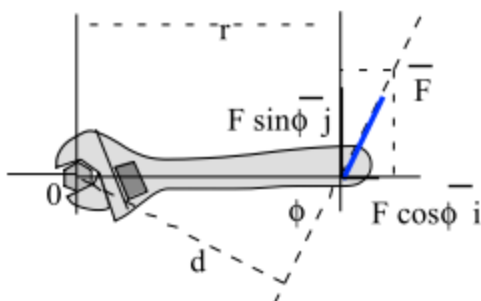
3-1-3 Moment D'une Force

Lorsqu'on exerce une force sur un solide pouvant pivoter, celui-ci a tendance à décrire une rotation autour de l'axe de son pivot. Pour mesurer la capacité qu'a la force d'imprimer un mouvement de rotation à un corps, on utilise une quantité nommée moment d'une force (τ N.m).

Dans le cas de la clef pivotant autour de l'axe qui passe par 0, la force F peut généralement être exercée sous un angle ϕ par rapport à la clef.

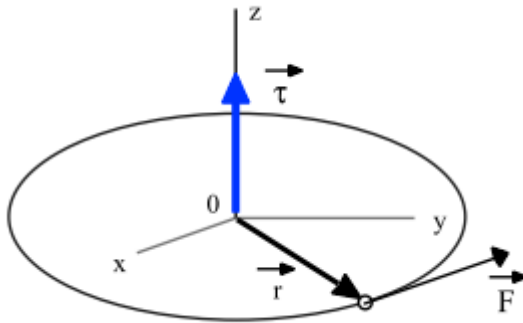
Le moment τ est alors défini par :

$$\tau = r.F.\sin \phi = F.d$$



De manière générale, on écrira sous une forme vectorielle le moment de la force :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$



3-1-3 Référentiels d'inertie ou galiléen

On appelle référentiel d'inertie, un système de référence (ou repère) dans lequel la première loi de Newton est applicable. D'après cette définition, un référentiel d'inertie n'existe pas ; on ne dispose que de référentiels approximatifs.

Pour la plupart des expériences que l'on peut réaliser sur terre, le repère au sol constitue un bon repère d'inertie, alors que pour le mouvement d'un point ce repère lié au sol n'est pas un repère d'inertie.

Si l'on choisit un système d'axes liés au Soleil et dirigés vers certaines étoiles, le mouvement d'une planète du système solaire devient simple (référentiel de COPERNIC). Pour ce mouvement le repère lié au Soleil est un bon repère d'inertie.

Le Référentiel de Copernic: Le référentiel de Copernic a pour centre le centre du système solaire et ses axes sont donnés par les directions de trois étoiles très éloignées (supposées fixes par rapport au soleil).

Référentiel géocentrique : Le référentiel géocentrique a pour centre le centre de la terre et ses axes ont des directions fixes qui sont celles du référentiel de Copernic.

Référentiel terrestre: Un référentiel terrestre est un référentiel lié à la terre. Son origine est donc un point de la planète et ses axes sont fixes par rapport à elle.

3-2 Les Lois De Newton

Lois de Newton = fondements de la mécanique (classique). Lois d'application dans la vie de tous les jours.

- Lois à modifier si
 - ✓ Phénomènes à l'échelle atomique (10^{-10} m) =>
 - ✓ Vitesse des corps proche de celle de la lumière ($3 \cdot 10^8$ ms⁻¹) =>
- Lois parfaitement appliquées pour décrire des phénomènes relatifs à :
 - ✓ L'astronomie
 - ✓ La biomécanique
 - ✓ La géologie
 - ✓ L'ingénierie

3-2-1 La première loi de Newton (le principe de l'inertie)

Enoncé

En l'absence de forces externes, un objet au repos reste au repos et un objet en mouvement continue de se déplacer en mouvement rectiligne uniforme.

L'absence de forces externes signifie que la somme vectorielle des forces appliquées est nulle.

Autre forme du 1^{er} principe

Le principe d'inertie (ou la première loi de Newton) est énoncé de la façon suivante :

Si un objet n'est soumis à aucune force,

- soit il continue à se déplacer en ligne droite avec la même vitesse,
- soit il reste au repos, s'il était déjà.

Corollaire : cette propriété de tous les corps à résister au changement de vitesse est appelée inertie. Tout corps possédant cette propriété a une accélération nulle. On dit que ce corps est doué d'inertie.

Remarque : un grand nombre de faits courants sont des manifestations de l'inertie. Les mouvements des voyageurs provoqués par les véhicules aux démarrages, aux freinages et à l'exécution des virages en sont des exemples.

En l'absence de forces externes, le corps est dit libre ou isolé mécaniquement. On appelle système un ensemble de corps identifiés du reste de l'univers. Un système est isolé lorsque la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.

Un référentiel d'inertie (ou galiléen) est un référentiel dans lequel un corps qui n'est soumis à aucune force ou qui subit des forces dont la résultante est nulle, sera au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

3-2-2 La deuxième loi de Newton (Principe Fondamental de la Dynamique (PFD))

La deuxième loi de Newton (principe d'action, principe fondamental de la dynamique), d'écrit comment les forces qui agissent sur un corps modifient sa vitesse, de ce fait, on peut dire que la variation de quantité de mouvement d'un corps est proportionnelle aux forces qui s'y exercent.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}$$

Si la masse du corps est constante : $\vec{F} = m\vec{a}$

Cette relation, acceptable uniquement dans un repère Galiléen, établit le lien entre dynamique et cinématique, entre force et accélération. Il s'agit d'une relation vectorielle. A travers cette relation, la masse d'un corps prend désormais un sens

physique simple : elle conditionne la réponse d'un système (son accélération) lorsque ce dernier est soumis à des forces (les causes du mouvement). Elle exprime mathématiquement le principe d'inertie.

Dans le cas où la masse du système évolue au cours du temps, il convient d'utiliser l'expression

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m\vec{V}) = \frac{dm}{dt} \vec{V} + m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{V} + m\vec{a}$$

Où $\vec{p}$ est la quantité de mouvement de la particule et $\vec{F}$ la résultante des forces qu'elle subit.

Cette égalité, appelée « relation fondamentale de la dynamique », est valable tant que la vitesse est très inférieure à celle de la lumière. Remarquons qu'elle associe un terme cinétique, la dérivée du vecteur quantité de mouvement, à un terme dynamique, la somme des forces appliquées sur le point matériel. Elle permet donc de prédire le mouvement si on connaît les forces et de déterminer leur résultante pour un mouvement donné.

Toute cause capable de modifier, dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est appelée FORCE.

Différentes types de forces existent :

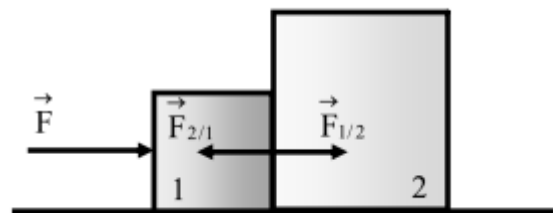
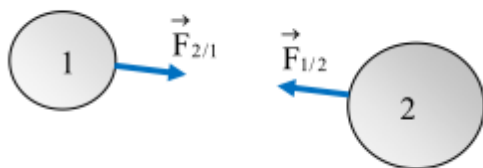
- Forces d'interaction à distance (Forces de gravitation) ;
- Forces électromagnétiques ;
- Forces nucléaires ;
- Forces de contact (Forces de frottement) ;

3-2-3 La troisième loi de Newton Principe d'action et de réaction

Dans tout les cas où on étudie le mouvement d'un corps à l'aide de la deuxième loi de Newton , Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), on considère les forces appliquées par un autre corps sur cet objet : la personne qui pousse un panier à provisions pour le panier à provisions, le marteau qui enfonce un clou pour le clou. Mais s'il est vrai que le marteau exerce une force sur un clou, de toute certitude le clou exerce lui aussi une force sur le marteau puisque la vitesse de ce dernier devient rapidement nulle lorsque les deux objets entrent en contact. Seule une force intense peut causer une décélération aussi rapide et qui d'autre que le clou peut l'avoir exercée ?

Deux corps exercent l'un sur l'autre des forces d'égales intensités et de sens opposés, action = réaction.

Dans les exemples les figures suivants, la force $\vec{F}_{1/2}$, exercée par 1 sur 2, est égale en module et est opposée en sens à la force $\vec{F}_{2/1}$, exercée par 2 sur 1.



$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$$

Propriétés :

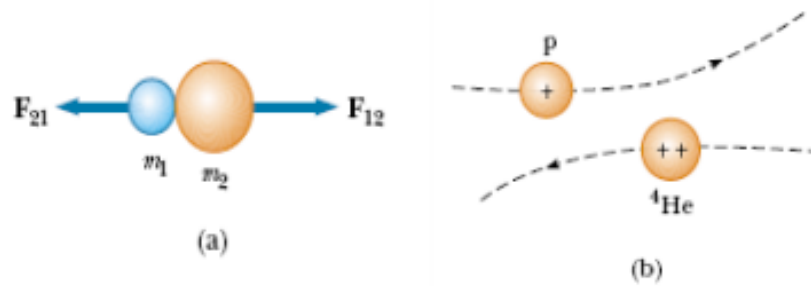
- ❖ les deux forces agissent suivant la droite, appelée ligne d'action, joignant les deux corps.

- ❖ nous nommons action la force exercée par l'un des deux corps et réaction celle qui est exercée par l'autre. Cependant, on peut considérer indistinctement que l'une ou l'autre des deux forces est l'action, l'autre devenant alors la réaction.
- ❖ les deux forces sont de même nature et n'agissent pas sur le même corps. Ainsi, la force appelée communément réaction (au poids) du sol sur un corps qu'il supporte ne l'est pas au sens de la troisième loi de Newton. En effet, ces forces ne sont pas de même nature et s'appliquent toutes les deux sur le corps posé sur le sol.
- ❖ il est impossible de trouver une force qui agit de façon isolée ; toute force est associée à une réaction.
- ❖ Les forces $F_{1/2}$ et $F_{2/1}$ qui apparaissent dans la troisième loi de Newton ne sont pas appliquées au même objet et seule l'une d'entre elle doit être prise en considération si on désire étudier le mouvement de l'un de ces objets avec la 2ème loi de Newton. Si on désire étudier le mouvement de la particule 1, il faut faire intervenir dans la loi ($F=m.a$)

3-3 Principe de Conservation de la quantité de mouvement

Les collisions et les chocs sont des interactions au cours desquelles des corps exercent les uns sur les autres, pendant un intervalle de temps court, des forces d'interaction. Ces dernières sont relativement élevées par rapport à celles provenant de l'environnement extérieur au système formé par les particules entrant en interaction.

La collision entre deux particules a lieu lorsqu'elles se dirigent l'une vers l'autre pour se percuter. Une collision peut se produire avec un contact physique (figure. a), comme elle peut se produire par interaction à distance (cas de la figure .b). Dans ce dernier cas l'interaction a lieu avec une force de très courte portée.



3-3-1 Collisions élastiques

Considérons deux particules de masses m_1 et m_2 qui se déplacent initialement à des vitesses v_1 et v_2 . On suppose que ces particules exercent une force l'une sur l'autre, mais que cette force a une portée très courte, de sorte qu'elles se meuvent librement la plupart du temps, sauf quand elles entrent en collision, c'est-à-dire quand elles s'approchent très près l'une de l'autre. Ce qui nous intéresse ici est la relation entre les vitesses de ces particules après la collision et avant la collision et non le mouvement détaillé des particules pendant la collision.

On supposera que le processus de collision est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique des particules est la même avant et après la collision.

Considérons le cas où les deux objets qui entrent en collision ne se déplacent que dans une seule direction.

On suppose que le premier objet se déplace initialement à une vitesse $v_1 = v_{1i}$ et que le second objet est au repos ($v_2 = 0$). Après la collision, les deux objets ont respectivement des vitesses $v_1' = v_{1f}$ et $v_2' = v_{2f}$. Le problème est de déterminer précisément v_1' et v_2' en fonction de v_1 et des masses des deux objets.



Fig Collision unidimensionnelle de deux particules. Dans le référentiel du laboratoire, la particule 2 est au repos avant la collision

On applique les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Et

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Il s'agit de deux équations, pour deux inconnues (v_1' et v_2'). On élimine v_2' à l'aide de la première équation, pour obtenir

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1'^2 + \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v_1')^2)$$

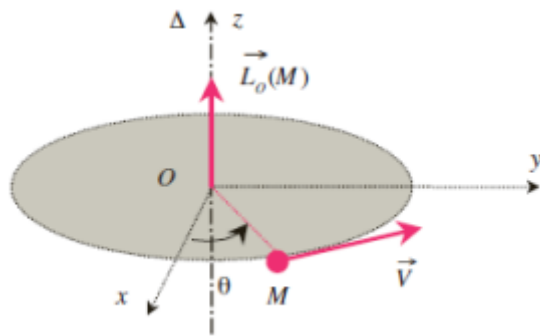
Il s'agit d'une équation quadratique pour v_1' qui peut être résolue par la formule standard. On peut la récrire comme suit :

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

3-4 Moment cinétique

Un mouvement curviligne d'une masse dépend en plus d'une force, de son rayon de courbure. Cette force est maximale si elle est appliquée perpendiculairement au rayon de courbure. On introduit une grandeur mathématique qui prend en considération ces informations qu'on nomme Moment cinétique.



Le moment cinétique au point O du point matériel M dans le référentiel R est :

$$\vec{L}_O(M)_R = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

3-4-1 Théorème du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen R, le théorème du moment cinétique peut être appliqué :

On dérive L

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_O &= \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma} \end{aligned}$$

Avec $\vec{\gamma}$ vecteur accélération de M.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au point M :

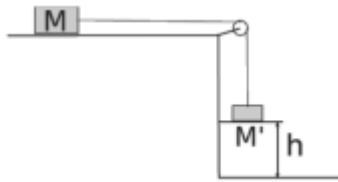
$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

La dérivée du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point fixe O dans un référentiel galiléen est égale à la somme des moments par rapport au même point O des forces extérieures appliquées au point M.

Exercices

Exercice 1

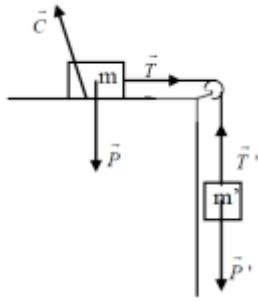
Deux corps M et M' de masse m et m' respectivement, sont reliés par un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. Initialement le corps M' se trouve à une hauteur h du sol, il est lâché sans vitesse initiale. Le contact entre le corps M et le plan horizontal est caractérisé par des coefficients de frottement statique μ_s et glissement μ_g , $\mu_s=0.6$, $\mu_g=0.4$, $m=6\text{ Kg}$, $h=1.5\text{m}$, $g=10\text{m/s}^2$



1. Donner l'expression de la masse m' min pour que le système se mette en mouvement, en fonction de m et μ_s .
2. On prend maintenant un masse m' = 4 kg, le système se met en mouvement. En considérant les deux phases du mouvement de la masse M jusqu'à son arrêt:
 - a) Quelle est la nature du mouvement de la masse M.
 - b) Calculer l'accélération dans la première phase.
 - c) Déduire la vitesse à la fin de cette phase.
 - d) Calculer l'accélération dans la deuxième phase
 - e) Déduire la distance totale D parcourue par la masse M.

Solution

1. A l'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$



Les forces sur la masse M' :

$$\begin{aligned}\vec{P}' + \vec{T}' &= \vec{0} \\ P' - T' &= 0\end{aligned}$$

Sur la masse M :

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{T} + \vec{C} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \begin{cases} T - C_x = 0 \\ C_y - P = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Comme $T = T'$

Alors $P' = C_x$ et $C_x = \mu_s C_y = \mu_s mg \Rightarrow m' = \mu_s m = 3.6 \text{ kg}$

2.

a) On a deux étapes

- Durant la première étape les forces sont constantes, l'accélération est constante et la vitesse augmente, il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré.

On applique le principe fondamental de la dynamique.

b) Sur la masse M' $\vec{P}' + \vec{T}' = m' \vec{\gamma} \Rightarrow P' - T' = m' \gamma$

Sur la masse M $\vec{P} + \vec{T} + \vec{C} = m \vec{\gamma} \Rightarrow \begin{cases} T - C_x = m \gamma \\ C_y - P = 0 \end{cases}$

$$P' - C_x = (m + m') \gamma$$

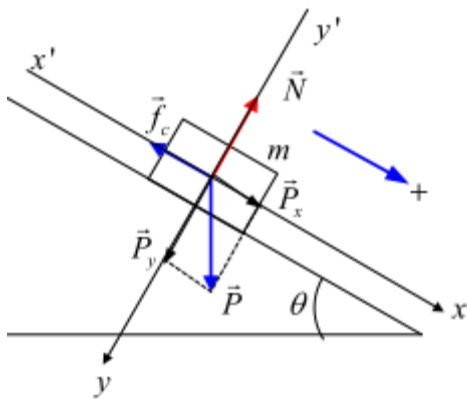
$$\gamma = \frac{(m' - \mu_g m)}{m + m'} g = 1.6 \text{ m/s}^2$$

$$c) v_1^2 - v_0^2 = 2\gamma h \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = 2.2 \text{ m/s}$$

Exercice 2

La figure ci-dessous représente un corps dont le poids est 5N et qui repose sur un plan incliné de $\theta = 35^\circ$. Le coefficient de frottement statique est 0.80. On prend $g=10 \text{ ms}^{-2}$.

1. Trouver l'angle d'inclinaison pour que le corps décolle ?
2. Trouver la force de frottement statique maximale?
3. Trouver la force normale pour 35° ?
4. Quelle est la force de frottement statique pour une inclinaison de 35° ?



Solution

1. Angle d'inclinaison nécessaire pour que le corps décolle. Quand la force de frottement statique atteint sa valeur maximale pour un angle de décollage θ_0 , appelé angle de frottement et qui est un angle limite, elle s'équilibre avec la composante du poids P_x , à ce moment là, le corps décolle :

$$\begin{cases} fs_{\max} = P_x = mg \sin \theta \\ fs_{\max} = \mu N \\ N = P_y = mg \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \mu \Rightarrow \tan \theta = 0.8 \Rightarrow \theta = 38.66$$

2. Intensité de la force de frottement maximale :

$$fs_{\max} = \mu N = 3.13 N$$

3. La force normale pour l'angle 35° :

$$N = P_y = mg \cos \theta \Rightarrow N = 4.1 N$$

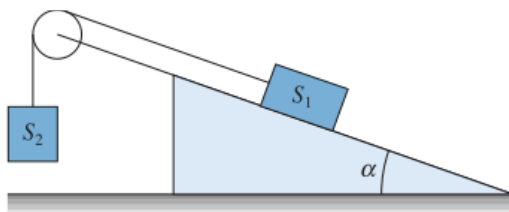
4. Force de frottement pour l'angle 35° :

$$fs_{\max} = P_x = mg \sin \theta = 2.87 N$$

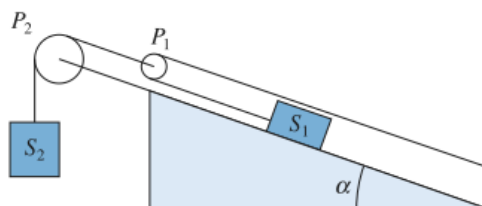
Exercice 3

Le solide S_1 , de masse m_1 , glisse sans frottements sur le plan incliné. Le solide S_2 , de masse m_2 , se déplace verticalement. Les solides en translation sont considérés comme des points matériels. Les poulies sont idéales, les fils sont inextensibles et sans masse. Données : $m_1 = 400 \text{ g}$, $m_2 = 200 \text{ g}$ et $\alpha = 30^\circ$.

1. On considère le dispositif ci-après, Déterminer l'accélération du solide S_2 et la tension du fil.

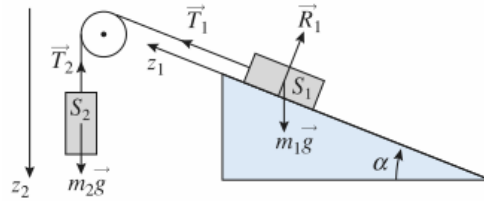


2. On rajoute une poulie. La poulie P_2 est fixe, la poulie P_1 se déplace parallèlement au plan incliné. Le fil est attaché en A. Déterminer l'accélération du solide S_2 et les tensions des fils.



Solution

1. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, en projection sur z_1 ou z_2 pour chaque mobile, il vient (en notant T_1 et T_2 les tensions du fil, les normes de T_1 et T_2) :



$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g \sin \alpha + T_1$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - T_2$$

Le fil étant inextensible, on a : $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$

Le fil étant de masse négligeable, et la poulie idéale : $T_1 = T_2$.

Finalement, il vient :

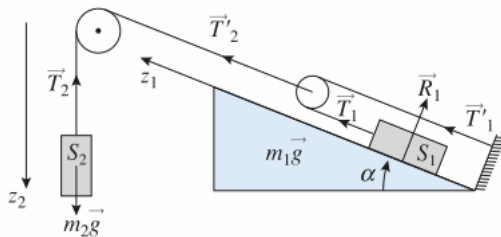
$$\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{(m_1 + m_2)} g$$

$$T_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \alpha)$$

$$\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = 0 \text{ il y a donc équilibre si la vitesse initiale est nulle}$$

$$T_2 = 1.96 \text{ N}$$

2.



En reprenant les écritures précédentes

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g \sin \alpha + T_1$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - T_2$$

On a. $T_2 = T'_2$ et $T'_2 = T'_1 + T_1$ et $T_1 = T'_1$, soit : $T_2 = 2T_1$.

$$2m_1 \ddot{z}_2 = -m_1 g \sin \alpha + T_1 \quad \text{et} \quad m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - 2T_1$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{m_2 - 2m_1 \sin \alpha}{m_2 + 4m_1} g$$

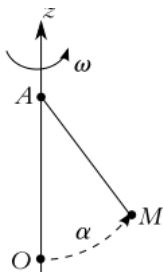
$$\ddot{z}_2 = \frac{m_2 - 2m_1 \sin \alpha}{m_2 + 4m_1} g$$

$$T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_2 + 4m_1} (2 + \sin \alpha) g$$

$$\ddot{z}_2 = -1,1 \text{ m.s}^{-2} \text{ et } T_2 = 2,2 \text{ N}$$

Exercice 4

On examine un fil sans masse de longueur l , avec l'une des extrémités est reliée à l'axe vertical Oz au point A et l'autre à un point M de masse m . L'axe Oz est en rotation à la vitesse angulaire constante ω . Déterminer l'angle α , la vitesse de M et la tension du fil en fonction de ω , m et g l'accélération de la pesanteur.



Exercice 5

Le personnage saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec le sol. On note g_l l'accélération de la pesanteur à la surface de la lune. En l'absence d'atmosphère, on peut considérer qu'il n'y a aucune force de frottement.

1. Déterminer l'expression de la distance parcourue au cours du saut en fonction de v_0 , α et g_l .

2. La gravité sur la Lune est environ six fois moins forte que sur la Terre. Quelle sera la distance parcourue par le sauteur sur la Lune, si elle est de $d = 1,50$ m sur la Terre ?

Chapitre IV Travail et énergie

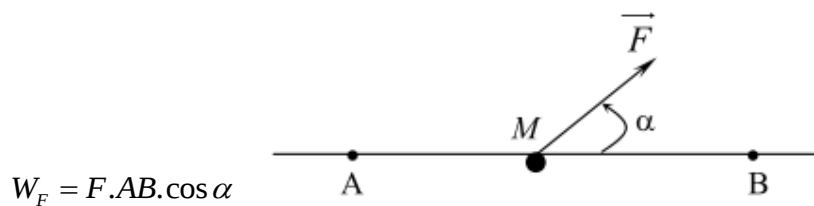
4-1 Travail d'une force

4-1-1 Force constante sur un déplacement rectiligne

Soit un point M animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel R et soumis à une force $\vec{f}(M)$, dépendant éventuellement des coordonnées du point M. À l'instant t, le point M se trouve en M_t et à l'instant $t+dt$ il est en M_{t+dt} , cet état étant infiniment proche de M_t si dt est suffisamment faible. On notera $d(\overrightarrow{OM})$ le déplacement $M_t M_{t+dt}$

Soit une force constante agissant sur un point matériel M. Sous l'effet de $\vec{F}$, M se déplace entre les points A et B.

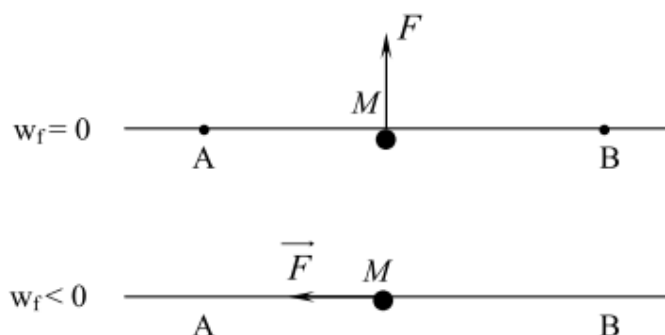
Par définition, le travail de la force $\vec{F}$ sur le déplacement rectiligne AB est donné par :



α est l'angle que fait $\vec{F}$ avec $\overrightarrow{AB}$

Ce travail peut être positif, négatif ou nul, ça dépend du signe de $\cos \alpha$:

- ✓ $\cos \alpha > 0$ c'est un travail moteur.
- ✓ $\cos \alpha < 0$ travail résistant
- ✓ $\cos \alpha = 0$ travail nul



Un travail peut être positif auquel cas, on parlera de travail moteur, car un moteur peut très bien effectuer cet effort de déplacement. À l'opposé, un travail peut être négatif, on parle de travail résistant car il s'oppose au déplacement, c'est le cas des forces de frottements.

Au cours d'un déplacement le long d'un chemin Γ_{AB} , le travail de la force correspond à la somme des travaux élémentaires, ce qui se traduit par l'intégrale du travail élémentaire :

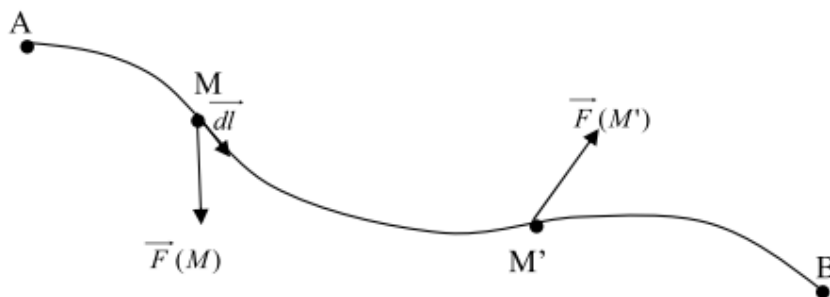
$$w_{AB} = \int dw_{AB} = \int \vec{f} \cdot d\vec{OM} = \int p(t).dt$$

4-1-2 Travail élémentaire

Dans le cas où la force F est variable et un déplacement quelconque. On calcule le travail de cette force pour un déplacement infinitésimal dr rectiligne,

On décompose le trajet AB en une succession de déplacements élémentaires $dl = MM'$.

Sur MM' , la force F peut être considérée comme constante ; alors on définit le travail élémentaire donné par :



$$dW = F \cdot dl$$

Pour trouver le travail total entre le premier point et le deuxième, on intègre cette dernière équation.

$$dW = \int_M^{M'} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

L'équation aux dimensions relative au travail est :

$$[W] = [F][L] = ML^2T^{-2}$$

Utilisation des coordonnées cartésiennes

En exprimant le produit scalaire en fonction des composantes de $\vec{F}$ et $d\vec{l}$ soit :

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

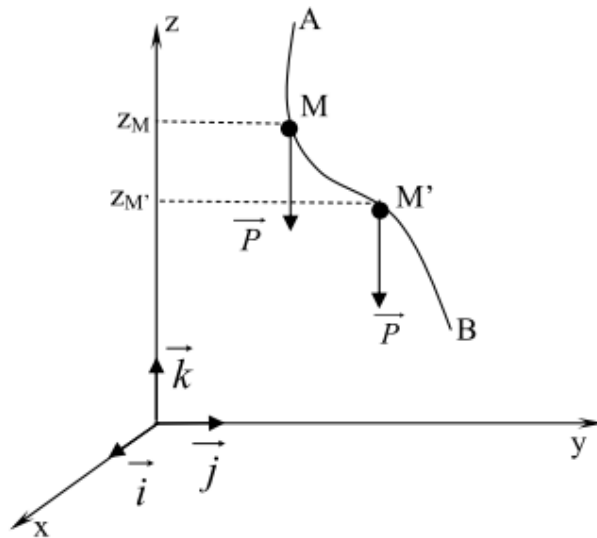
$$W(\vec{F})_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

Si la force $\vec{F}$ est constante en grandeur et en direction l'expression de $W(\vec{F})_A^B$ prend une forme plus simple:

$$\begin{aligned} W(\vec{F})_A^B &= F_x \int_{x_A}^{x_B} dx + F_y \int_{y_A}^{y_B} dy + F_z \int_{z_A}^{z_B} dz \\ &= F_x (x_B - x_A) + F_y (y_B - y_A) + F_z (z_B - z_A) \end{aligned}$$

Ce résultat montre que le travail ne dépend alors que des positions initiale et finale et non pas du chemin suivi.

Travail de la force de pesanteur



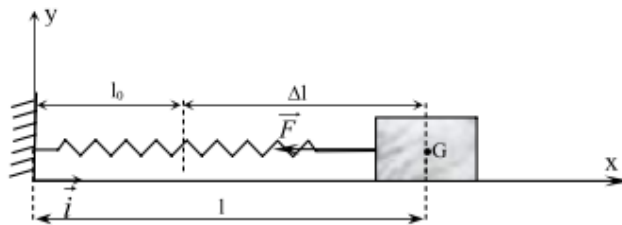
$$h = Z_M - Z_{M'}$$

$$W_{\vec{P}} = \int_{M'}^M \vec{P} \cdot d\vec{l} \quad \text{avec } \vec{P} = -p\vec{k}, \text{ et } d\vec{l} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}$$

$$\vec{P} \cdot d\vec{l} = -Pdz$$

$$\begin{aligned} W_{\vec{P}} &= \int_{M'}^M \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int_{M'}^M -Pdz = -P(Z_{M'} - Z_M) \\ &= P(Z_M - Z_{M'}) \\ &= P.h = m.g.h \end{aligned}$$

Travail d'une force élastique



$$\begin{aligned} F &= -k\Delta l \vec{i} \\ &= -k(l - l_0)\vec{i} = -kx\vec{i} \end{aligned}$$

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -kx\vec{i} \cdot dx\vec{i} = -kxdx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

Lorsque F passe d'une position x_1 à x_2 , on a :

$$w_F = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

4-1-3 Puissance d'une force

La puissance d'une force F est le travail élémentaire effectué par cette force

par unité de temps : $P = \frac{dW}{dt}$

La puissance caractérise la vitesse avec laquelle le travail de $\vec{F}$ est effectué.

L'équation aux dimensions relative à la puissance

$$[P] = \frac{[W]}{[T]} = ML^2T^{-3}$$

On distingue trois types de puissance :

- la puissance motrice si $P > 0$, cela correspond au cas où la force et la projection de la vitesse sur l'axe de la force sont de même sens,
- la puissance résistante si $P < 0$, cela correspond au cas où la force et la projection de la vitesse sur l'axe de la force sont de sens opposé,
- la puissance nulle si $P = 0$, cela correspond soit au cas où le point M est immobile (sa vitesse est nulle) soit au cas où le mouvement est perpendiculaire à l'axe de la force (ce sera le cas par exemple de la force magnétique).

4-2 Energie cinétique

4-2-1 Définition

Soit une particule qui se déplace sous l'action d'une force résultante $\vec{F}$ entre deux points A et B. La deuxième loi de Newton étant adéquat le long du chemin $A \rightarrow B$, on pourra l'utiliser dans l'expression du travail. En effet,

$$W(\vec{F})_A^B = \int_{A_1}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} \\ d\vec{l} = \vec{V}dt \end{cases}$$

$$W(\vec{F})_A^B = m \int_A^B \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} dt = m \int_{V_A}^{V_B} \vec{V} \cdot d\vec{V} = \frac{1}{2} m(V_B^2 - V_A^2)$$

$$W(\vec{F})_A^B = \Delta\left(\frac{1}{2} mV^2\right)$$

Par définition, la quantité :

$$E_C = \frac{1}{2} mV^2$$

Est appelée énergie cinétique ; elle se mesure en Joules.

Avec m la masse du point matériel M et v sa vitesse.

4-2-2 Théorème de l'énergie cinétique

Ce théorème s'énonce de la façon suivante :

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés.

La variation de l'énergie cinétique dans un référentiel R :

$$dT = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = m\vec{V}d\vec{V} = m\vec{V}d\vec{a}dt = m\vec{a}d\vec{r}$$

$$dT = m\vec{a}d\vec{r} \quad \stackrel{\substack{\equiv \\ \text{2eme loi de Newton}}}{=} \quad \vec{F}.d\vec{r} = \delta W$$

$$dT = dW$$

En intégrant cette équation on aura

$$\int_A^B dT = W_{A-B} \left(\sum \vec{F} = T_B - T_A = \sum W_{A-B}(F) \right)$$

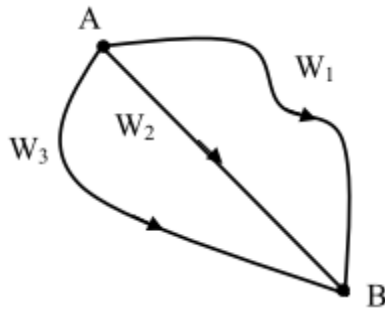
Théorème : dans un référentiel d'inertie, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale au travail de la force qui s'exerce sur le point.

4-3 Energie potentielle

4-3-1 Forces conservatives

Une force $\vec{F}$ est dite conservative si elle vérifie une de ces deux conditions qui sont équivalentes :

- Première condition : le travail de la force $\vec{F}$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi. Cette indépendance par rapport au chemin suivi implique que pour la figure suivante



$$W_1(\vec{F})_A^B = W_2(\vec{F})_A^B = W_3(\vec{F})_A^B$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_3$$

- Deuxième condition: le travail total sur un chemin fermé (soit un aller et retour) est nul.

D'après l'indépendance du travail par rapport au chemin suivi :

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 \Rightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = 0$$

Ce qui s'écrit

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = 0$$

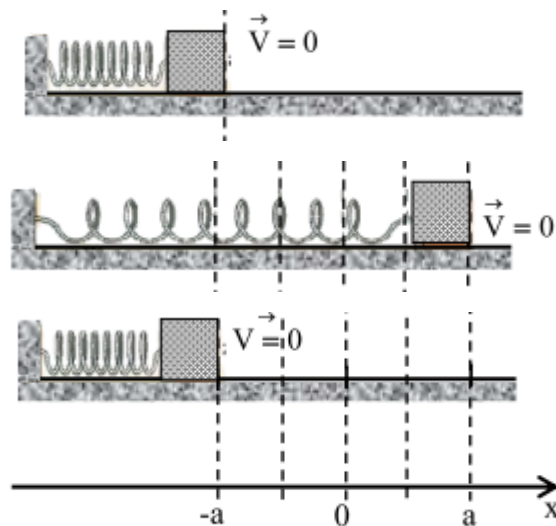
4-3-2 Notion d'énergie potentielle

4-3-2-1 Energie potentiel élastique

Examinons le système masse-ressort de la figure , en l'absence de frottements avec le sol. On bouge la masse de façon à compresser le ressort d'une longueur a , puis on laisse le système à lui-même. La masse réalise alors des oscillations, d'amplitude a , centrées en O. quand $x = \pm a$ la masse n'a pas d'énergie cinétique parce que sa vitesse est nulle. Néanmoins elle se remet en mouvement vers la position d'équilibre $x = 0$ avec une vitesse progressive. Cela veut dire qu'elle procure de l'énergie cinétique. Comme l'énergie ne se crée pas, elle provient de la transformation d'une

forme d'énergie due à l'état (de compression ou d'étirement) du système masse-ressort. Cette énergie est appelée énergie potentielle (symbole E_p).

Au-delà du point d'équilibre, la masse subit un ralentissement jusqu'au point extrême suivant, au cours duquel elle perd toute son énergie cinétique. En fait le système récupère de l'énergie potentielle qu'il réutilise pour renvoyer la masse vers la position d'équilibre. Ce mouvement est alors entretenu par une succession de transformations d'énergie potentielle en énergie cinétique et d'énergie cinétique en énergie potentielle. Ceci est vrai lorsque les frottements sont absents.

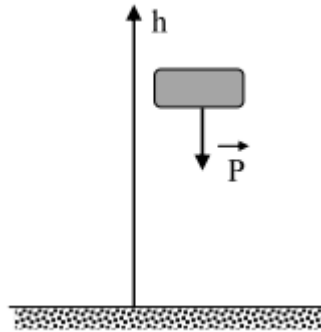


Si on modifie l'amplitude « a » l'énergie potentielle va varier quantitativement. Cela veut dire qu'elle dépend du position occupé par la masse.

4-3-2-2 Energie potentiel gravitationnelle

Examinons la chute libre d'un corps lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h par rapport au sol, L'objet se met en mouvement sous l'action de son poids. A $t = 0$ l'objet n'a pas d'énergie cinétique puisque sa vitesse est nulle.

Par conséquent, l'état du système terre-objet fait que ce dernier possède une énergie potentielle dite gravitationnelle qu'il peut transformer en énergie cinétique. En changeant la hauteur de la chute et en étudiant l'énergie cinétique obtenue il apparaît que cette énergie potentielle dépend de la position de l'objet.



Par définition, le travail des forces conservatrices ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Le travail de ces forces peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelée énergie potentielle E_p

$$E_p(B) - E_p(A) = -W_{(A-B)}(\vec{F}_c)$$

Avec $\vec{F}_c$: force conservatrice.

$$\Delta E_p = -W_{(A-B)}(\vec{F}_c)$$

4-3-3 Energie mécanique totale

Définition : L'énergie mécanique d'un point matériel à un instant donné est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$E_M = E_c + E_p$$

Exemple

- L'énergie potentielle d'un système composé d'un ressort de constante de raideur k , dont l'allongement est $l - l_0 = x$ au temps t , sous l'action d'une particule de masse m et de vitesse instantanée v , est :

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

- Dans le cas de la chute libre d'une particule de masse m

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatrices et non conservatrices. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a

$$E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A-B}(\overrightarrow{F_C}) + \sum W_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

Avec : $\overrightarrow{F_C}$ Force conservatrice

$\overrightarrow{F_{NC}}$: Force non conservatrice.

$$E_C(B) - E_C(A) = -(E_P(B) - E_P(A)) + \sum W_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

$$\text{Car } \sum W_{A-B}(\overrightarrow{F_C}) = (E_P(A) - E_P(B))$$

$$E_C(B) + E_P(B) - (E_C(A) + E_P(A)) = \sum W_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

On introduit une nouvelle quantité qu'on va l'appeler Energie Total (Energie mécanique totale) du système Symbolisée par (E), telle que,

$$E = E_C + E_P$$

Energie Cinétique + Energie Potentielle

Alors, entre les deux points A et B

$$E(B) - E(A) = \sum W_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

Théorème de l'énergie mécanique totale

La variation de l'énergie mécanique totale d'un système, en mouvement entre deux points A et B, est égal à la somme des travaux des forces extérieures non conservatrices appliquées à ce système,

$$E(B) - E(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

Cependant, lorsque le système est isolé (c'est dire, il ne subit aucune force extérieure non conservatrice) l'énergie totale se conserve.

Autre forme du principe de la conservation de l'énergie mécanique :

Dans le champ de force conservatrice (ou dérivant d'un potentiel) l'énergie mécanique se conserve au cours du temps.

$$E_M = E_C + E_P = C^{te}$$

Cela veut dire que la variation de l'énergie mécanique est nulle $\Delta E_M = 0$ cela veut dire aussi que la variation de l'énergie cinétique est égale à la variation de l'énergie potentielle. En d'autres termes, si le système est isolé mécaniquement l'énergie mécanique est conservée.

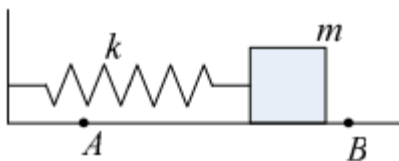
Dans le cas de l'existence de frottements, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces de frottement $\sum W_{frott}$

$$\Delta E_M = \sum W_{frott}$$

Exemples

Cas d'une particule dans un champ de force élastique

La figure suivante représente un système mécanique isolée composé d'un corps de masse m associé à un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0



A chaque instant le corps est soumis à une force de rappel $\overrightarrow{F} = -kx\vec{u}$ et $x = l - l_0$, où l est la longueur du ressort à un instant t donné au cours du déplacement du corps.

Quand le corps se déplace du point A au point B, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\Delta E_C &= E_{CB} - E_{CA} \\ &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B F_x \cdot dx = -k \int_A^B x dx \\ &= \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2 = \Delta E_P\end{aligned}$$

D'après le principe de la conservation de l'énergie mécanique on écrit :

$$E_{MA} = E_{MB} \Leftrightarrow \frac{1}{2} kx_A^2 + \frac{1}{2} mv_A^2 = \frac{1}{2} kx_B^2 + \frac{1}{2} mv_B^2 = c^{st}$$

On comprime le ressort d'une longueur ($x = -a$) à partir de sa position d'équilibre ($x = 0$) par l'intermédiaire du corps, puis on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale. Le corps est animé alors d'un mouvement rectiligne sinusoïdal entre deux positions extrêmes $x = -a$ et $x = +a$.

Oscillateur harmonique simple : L'oscillateur harmonique simple est tout système qui effectue un mouvement périodique autour d'une position d'équilibre stable et n'étant soumis à aucun amortissement (comme par exemple les frottements) ni aucune excitation.

Le mouvement est régi par l'équation différentielle linéaire : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

La solution générale d'une telle équation qui est de la forme : $x = a \cos(\omega t + \varphi)$

Exercices

Exercice 1

Soit un point matériel M soumis à un champ de force $\vec{F}$
 $\vec{F} = (x - ay) \vec{i} + (3y - 2x) \vec{j}$

1. Calculer le travail de la force $\vec{F}$ pour le déplacement de M du point O(0,0) au point A(2,4) en passant par le point C(0,4).
2. Trouver la valeur de a pour que $\vec{F}$ soit conservatrice, en déduire l'énergie potentielle E_p résultante de ce champ de force.

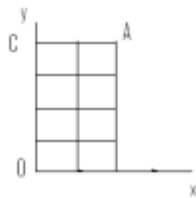
3. -Déterminer le travail de $\vec{F}$ pour le déplacement de M suivant une trajectoire circulaire de rayon R et de centre O(0,0).

Solution

$$1. \vec{F} = (x - ay) \vec{i} + (3y - 2x) \vec{j}$$

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy = (x - ay)dx + (3y - 2x)dy$$

$$w_{OCA} = w_{OC} + w_{CA}$$



Le chemin de O à C ($x=0$ $dx=0$, y varie de 0 à 4)

$$w_{OC} = \int_0^4 3y dy = \left[\frac{1}{2} 3y^2 \right]_0^4 = 24$$

Le chemin de C à A (x varie de 0 à 2, $y=4$ $dy=0$)

$$w_{CA} = \int_0^2 (x - 4a) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4ax \right]_0^2 = (2 - 8a)$$

$$w_{OCA} = (26 - 8a)$$

2. Pour que la force soit conservatrice elle doit vérifier $\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x-4a) & (3y-2x) & 0 \end{vmatrix} = (-2+a)\vec{k}$$

$$a = 2$$

$$3. \vec{F} = (x - 2y) \vec{i} + (3y - 2x) \vec{j}$$

Qui est une force conservatrice. Donc c'est une fonction qui dérive d'un potentiel

Ep

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}Ep}(x, y) = -\frac{\partial Ep}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial Ep}{\partial y}\vec{j}$$

$$\frac{\partial Ep}{\partial x} = -(x - 2y)(*) \quad \text{et} \quad \frac{\partial Ep}{\partial y} = -(3y - 2x)(**)$$

$$\text{De } (*) \quad Ep = \int -(x - 2y)dx = -\frac{x^2}{2} + 2yx + C(y)$$

$$\text{De } (**) \quad \frac{\partial Ep}{\partial y} = 2x + \frac{\partial C(y)}{\partial y} = -(3y - 2x) \Rightarrow C(y) = -\frac{3y^2}{2} + c$$

$$E_p(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + 2yx + c$$

Exercice 2

Une masse $M = 100\text{g}$ est attachée à l'extrémité d'un ressort disposé horizontalement, comme indiqué sur la figure ci-dessous, et dont la constante de raideur est $k = 20\text{NM}^{-1}$. Une masse $m = 50\text{g}$ se déplaçant à la vitesse $v_0 = 0.5\text{ms}^{-1}$ vient heurter la masse M initialement au repos. On suppose le système isolé.

1. Calculer la vitesse v et le déplacement maximal $0x$ de la masse M après le choc, en considérant le choc comme étant élastique, et en supposant que les vitesses de M et m sont parallèles après le choc.
2. Calculer la vitesse v' du système $(M + m)$ et la compression maximale subie par le ressort dans le cas du choc mou.
3. Calculer le travail dépensé pour la compression maximale du ressort toujours dans le cas du choc mou.

Solution

1. Pour calculer la vitesse, on applique au système $(M + m)$ isolé les principes de la conservation de la quantité de mouvement et de

l'énergie. Puisque le choc est élastique, la vitesse de la masse m diffère de la vitesse de la masse M.

$$P_1 = P_2 \Rightarrow mv_0 = mv_1 + Mv \Rightarrow mv_1 = mv_0 - Mv \rightarrow (1)$$

$$E_{c1} = E_{c2}, \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow mv_1^2 = mv_0^2 - Mv^2 \rightarrow (2)$$

On élève au carré l'équation (1) et on multiplie l'équation (2) par la masse m, puis on procède à une soustraction des équations obtenues et enfin déduire la vitesse v :

$$v = \frac{2mv_0}{M + m} = 0.33ms^{-1}$$

Pour calculer la compression maximale on applique le principe de la transformation mutuelle de l'énergie. La masse M s'arrête après avoir parcouru la distance maximale x_0 , et le ressort se comprime de la même valeur. Toute l'énergie cinétique acquise par la collision avec m s'est transformée totalement en énergie potentielle élastique que le ressort emmagasinée.

$$E_c = E_p, \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow x_0 = v\sqrt{\frac{M}{k}} = 2.33cm$$

2. Puisque le choc est mou la vitesse de la masse m est égale à la vitesse de la masse M. Pour calculer la vitesse on applique le principe de la conservation de la quantité de mouvement au système (M+m)

$$P_1' = P_2' \Rightarrow mv_0 = (M + m)v' \Rightarrow v' = \frac{m}{(M + m)}v_0 = 0.17m/s$$

3. Le choc est mou. L'énergie cinétique dépensée est égale à l'énergie potentielle emmagasinée :

$$E_c = E_p \Rightarrow \frac{1}{2}(M + m)v'^2 = \frac{1}{2}kx_0'^2 \Rightarrow x_0' = v'\sqrt{\frac{M + m}{k}} = \frac{mv_0}{\sqrt{k(m + M)}} = 2.33cm$$

Pour obtenir le travail demandé on applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta E_c = \sum w \\ \Delta E_c = \Delta E_p \end{array} \right\} \Rightarrow w = \frac{1}{2} k x_0^2 = 2.17 \text{ J}$$

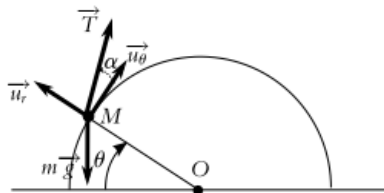
Exercice 3

Un homme tire un traîneau de bas en haut d'une colline dont la forme est assimilée à un demi-cercle de rayon R , de centre O . Il exerce une force de traction $\vec{T}$ constante en norme et faisant un angle α constant avec le sol.

1. Déterminer le travail de la force $\vec{T}$ sur le trajet.
2.
 - a) Sachant que l'homme se déplace à vitesse constante v , déterminer la réaction normale $\vec{R}_n$ exercée sur le traîneau en fonction de m , g , θ (l'angle polaire), T , α , R et v .
 - b) La loi de Coulomb donne la norme de la force de frottement du traîneau sur le sol $\|\vec{F}_f\| = f \|\vec{R}_n\|$, f étant une constante. Déterminer le travail de la force de frottement sur le trajet.

Solution

1. On examine le référentiel lié au sol galiléen. Le système est le personnage M . On choisit pour l'étude, une base polaire



$$\partial w = T \cdot dl = T \cos \alpha dl$$

Or en coordonnées polaires, le déplacement dl s'écrit $dl = R d\theta$. On en déduit l'expression du travail sur toute la trajectoire :

$$w = \int_0^{\frac{\pi}{2}} T \cos \alpha R d\theta = \frac{\pi}{2} RT \cos \alpha$$

2.

a) Les forces s'appliquant à M sont :

- le poids ;
- la réaction du support $\vec{R}_n$ (colinéaire à $\vec{u}_r$ et de même sens) ;
- le frottement du sol $\vec{F}_f$ (colinéaire à $\vec{u}_\theta$ et de sens opposé)
- la force de traction $\vec{T}$

La relation fondamentale donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R}_n + \vec{F}_f \text{ en projection sur } \vec{u}_r :$$

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta + \vec{R}_n + T \sin \alpha \quad v = r\dot{\theta}$$

$$R_n = -m \frac{v^2}{R} + mg \sin \theta - T \sin \alpha$$

b) Le travail élémentaire de la force de frottement est :

$$\delta w = \vec{F}_f \cdot d\vec{l}$$

$$= -\|\vec{F}_f\| R d\theta$$

$$\|\vec{F}_f\| = f \|\vec{R}_n\|$$

$$w = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f \left(-m \frac{v^2}{R} + mg \sin \theta - T \sin \alpha \right) R d\theta$$

$$= Rf \left(m \frac{\pi}{2} \frac{v^2}{R} + \frac{\pi}{2} T \sin \alpha - mg \right)$$