

Exercice 1 : Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible telle que $A_{i,i} \neq 0$ pour tous $i = 1, \dots, n$. On note $A = D - E - F$ où D est la partie diagonale de A , $-E$ sa partie triangulaire inférieure stricte, et $-F$ sa partie triangulaire supérieure stricte. Précisément, on a pour tous $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$

$$D_{i,j} = \begin{cases} A_{i,i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad E_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j < i, \\ 0 & \text{si } j \geq i, \end{cases} \quad F_{i,j} = \begin{cases} -A_{i,j} & \text{si } j > i, \\ 0 & \text{si } j \leq i. \end{cases}$$

On considère le système linéaire

$$Ax = b,$$

avec $b \in \mathbb{R}^n$ donné et on note $\bar{x} = A^{-1}b$ la solution.

On considère la méthode itérative suivante pour résoudre le système $Ax = b : x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et pour tous $k \in \mathbb{N}$

$$A_{i,i}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n A_{i,j}x_j^{(k+1)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

(1) Montrer que la matrice $D - F$ est inversible.

(2) Montrer que

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (D - F)^{-1}(b - Ax^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

(3) On pose $e^{(k)} = \bar{x} - x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)},$$

avec $B = (I - (D - F)^{-1}A)$ puis donner la condition nécessaire et suffisante du cours pour que la suite $x^{(k)}$ converge vers $\bar{x}$ quel que soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(4) On pose $n = 2$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

et $b \in \mathbb{R}^2$ donné. Calculer la matrice d'itération $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de l'algorithme itératif et calculer les valeurs propre de B . En déduire si l'algorithme itératif converge ou non pour cette matrice A .

(5) Montrer que quel que soit la norme matricielle induite $\|B\|$ par une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, on a pour tous $k \in \mathbb{N}$:

$$\|e^{(k)}\| \leq \|B\|^k \|e^{(0)}\|.$$

Calculer $\|B\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |B_{i,j}|$ pour la matrice A précédente puis donner une condition suffisante sur le nombre d'itérations k de l'algorithme itératif pour que

$$\frac{\|e^{(k)}\|_\infty}{\|e^{(0)}\|_\infty} \leq \epsilon$$

pour une précision $\epsilon > 0$ donnée.

Exercice 2 :

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

On considère l'algorithme suivant pour résoudre l'équation $g(x) = x$:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}, \\ x^{(k+1)} = \frac{g(x^{(k)}) + \alpha x^{(k)}}{\alpha + 1}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie

$$\left| \frac{g'(\bar{x}) + \alpha}{\alpha + 1} \right| < 1.$$

(1) On rappelle que d'après le théorème des accroissements finis il existe $\theta_k \in]\bar{x}, x^{(k)}[$ tel que

$$g(x^{(k)}) - g(\bar{x}) = g'(\theta_k)(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Calculer $\gamma^{(k)}$ tel que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \gamma^{(k)}(x^{(k)} - \bar{x}).$$

(2) Montrer que

$$\lim_{x^{(k)} \rightarrow \bar{x}} \gamma^{(k)} = \frac{g'(\bar{x}) + \alpha}{\alpha + 1}.$$

En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta < 1$ tels que si $x^{(k)} \in I_\alpha =]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[$ alors

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \beta |x^{(k)} - \bar{x}|.$$

(3) Montrer par récurrence que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ alors $x^{(k)} \in I_\alpha$ pour tous $k \in \mathbb{N}$. Démontrer ensuite que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = \bar{x}.$$

(4) Montrer que la convergence est au moins linéaire au sens où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \bar{x}|}{|x^{(k)} - \bar{x}|} = \left| \frac{g'(\bar{x}) + \alpha}{\alpha + 1} \right|,$$

en supposant que $x^{(k)} \neq \bar{x}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$.

(5) Donner une condition nécessaire sur α pour obtenir la convergence quadratique de l'algorithme.

(6) On suppose dans la suite de l'exercice que $g'(\bar{x}) \neq 1$ et que $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour le choix de α de la question précédente, montrer qu'il existe $\xi_k \in]\bar{x}, x^{(k)}[$ tel que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = \frac{1}{2} \frac{g''(\xi_k)}{(1 - g'(\bar{x}))} (x^{(k)} - \bar{x})^2.$$

(7) Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta < 1$ et $\gamma > 0$ tels que $\alpha\gamma \leq \beta$ et tels que si $x^{(0)} \in I_\alpha$ on ait

$$|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \beta^{(2^k - 1)} |x^{(0)} - \bar{x}|,$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$.