Rédaction en mathématiques.

---

0. Principe général. Un texte mathématique doit être rédigé comme on rédigerait n'importe quel autre texte. Les phrases sont donc rédigées en suivant les règles de grammaire française. Chaque phrase doit être constituée d'au moins un sujet et un verbe, et éventuellement d'un complément. Lorsque des formules doivent être intégrées au texte, elles sont apposées à un mot du texte.

1. On ne commence jamais une phrase par un symbole et la première lettre d'une phrase est obligatoirement une majuscule.

— Commencer par « $X^n - 1$ possède n racines » est mauvais, on écrira « Le polynôme $X^n - 1$ possède n racines. »

— Commencer par « f est dérivable... » est mauvais, on écrira « La fonction f est dérivable... »

Lorsqu'ils viennent en début de phrase, les quantificateurs doivent être rédigés en toutes lettres.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$...

— Quels que soient les réels x et y...

2. On n'emploie jamais les symboles $\forall, \exists, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ dans du texte, excepté les signes $\in, =, \geq, >, \leq, <$ qui sont tolérés. Dans ce cas, les formules mathématiques doivent former des phrases correctes lorsque les symboles sont lus.

— On n'écrira pas « D'après le théorème des valeurs intemédiaires, $\exists x \in [a,b]$ tel que $f(x) = \theta$ » mais « D'après le théorème des valeurs intemédiaires, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = \theta$ »

— On n'écrira pas « On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1$ » mais « On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1$. »

— On n'écrira pas « Soit $k > 0$ un entier » mais « Soit un entier $k > 0$. »

— On n'écrira pas « Soit $u \in \mathbb{R}^2$ un vecteur » mais « Soit un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ » ou encore mieux « Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^2$. »

— On se souviendra que le symbole $\Longrightarrow$ n'a pas le sens de « donc », on écrira « donc »si on pense « donc ».

Une suite de plusieurs déductions introduites toutes par « donc » n'est pas gênant pour la compréhension du raisonnement. Mais pour exprimer une déduction ou une conséquence, on peut aussi utiliser (à souhait) les expressions : « donc, ainsi, par conséquent, il s'ensuit, il en découle, etc. »

3. On ne commence jamais une phrase par une formule : les formules sont toujours introduites par du texte.

— Commencer par « $f(x) = 0$ admet deux solutions... » est mauvais, on écrira « L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions... »

— Commencer par « $y = \tan x$ avec $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ donc $x = \pi + \mathrm{Arctan} y$ » est mauvais, on écrira « La relation $y = \tan x$ avec $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ implique $x = \pi + \mathrm{Arctan} y$. »

4. Une formule doit tenir sur une seule ligne sauf si elle est exceptionellement longue.

— D'après la formule de Leibniz, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}((1+t^2)\mathrm{e}^{2t}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(1+t^2) \times \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}t^{n-k}}(\mathrm{e}^{2t}).$$

— D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t.$$

5. Il est préférable de passer à la ligne pour écrire une formule (cf. le point 4.).

— La fonction cos est indéfiniement dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

— L'espace vectoriel E est de dimension finie, donc d'après le théorème du rang,

$$\dim \ker(f - \lambda I_E) + \mathrm{rg}(f - \lambda I_E) = \dim E.$$

— Comme le polynôme $X^n - 1$ est unitaire, de degré n et a pour racines les nombres complexes $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

6. Les abréviations mathématiques ne doivent pas figurer dans le texte.

Les abréviations — Mq. (Montrons que), Odq. (On dit que), dc (donc), apcr. (à partir d'un certain rang), jacr. (jusqu'à un certain rang), pcq. (parce que), pr tt (pour tout), qq st (quel que soit), cv (converge), cva (converge absolument), dv. (diverge), thm (théorème), etc. — ne sont pas universelles et sont destinées à vos notes seulement (éventuellement au tableau pour aller vite).

Pour les abréviations désignant des résultats importants — TAF (théorème des acroissements finis), FTRI (formule de Taylor avec reste intégral), CCSTP (critère de comparaison des séries à termes positifs), etc. — il faut les écrire en toutes lettres, la première fois, en indiquant entre parenthèses l'abréviation utilisée. S'il y a besoin de citer un résultat par la suite, on pourra utiliser l'abréviation introduite.

Les abréviations mathématiques (les vraies) — ssi, tq., ev., ron, rond, bon, bond, cns — sont tolérées mais il est préférable de ne pas les employer dans les phrases en français.

En revanche, les abréviations latines — *ie.*, *id.*, cf., etc — sont autorisées.

7. Il est préférable que la cause précède la conséquence. L'utilisation de la conjonction de coordination "car" doit être réservé aux arguments tenant sur une ligne.

— Croissante et majorée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

— L'endomorphisme u est involutif donc il est bijectif.

— Par surjectivité de f, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = h$.

— L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ existe car la fonction f est continue sur $[a, b]$.

8. Les formules consécutives sont séparés par des mots.

— « Considérons $f(x) - f(y), x \leq y$ » est mauvais, on écrira « Considérons $f(x) - f(y)$ avec $x \leq y$ ».

— « Soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ » est mauvais, on écrira « Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. »

9. Ne pas faire apparaître un objet qui n'est pas introduit.

La lettre $\mathscr{S}$ (ou $\mathcal{S}$) n'est pas reconnue (universellement) pour désigner un ensemble de solutions.

Pour l'utiliser, il faut l'introduire « Désignons par $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation.... »

De même, les symboles $\mathscr{D}_f$ ou $\mathcal{D}_f$ ne sont pas reconnus (universellement) pour désigner l'ensemble de définition d'une fonction.

Pour l'utiliser, il faut l'introduire « Désignons par $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f. »

On évitera tout recours à des notations inutiles qui alourdissent le texte. On préfèrera écrire « la fonction f est définie sur ... par $f(x) = \ldots$ » plutôt que d'introduire $\mathscr{D}_f$ ou « l'ensemble des solutions de l'équation est ... » plutôt que d'introduire un symbole $\mathscr{S}$.

10. De l'importance de quantifier ses variables

Lorsque vous faites un calcul avec des expressions algébriques faisant intervenir des variables, vous devez préciser le domaine de validité de ce calcul en quantifiant les variables qui y figurent. Sans cette précision, le calcul n'est pas rigoureux.

Pour montrer qu'une propriété est vraie, quelle que soit la variable t de l'ensemble T, on commencera au choix par

— Quel que soit $t \in T$,

— Pour tout $t \in T$,

— Soit $t \in T$.

C'est le cas par exemple, lorsqu'on mène une étude de monotonie, lorsqu'on établit une égalité entre fonctions, etc.

11. Rédaction d'un raisonnement par récurrence

Quatre étapes doivent apparaître sur la copie.

— *La définition de la propriété*, qui se fait par la phrase :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on note } \mathscr{P}_n \text{ la propriété « ...... »}}$$

On prendra garde à ne pas placer la quantification « pour tout $n \in \mathbb{N}$ » ou « $\forall n \in \mathbb{N}$ » dans la définition entre guillemets de $\mathscr{P}_n$ et qui aurait pour effet de rendre la propriété indépendante de n !

— *L'initialisation*, qui consiste à vérifier que la propriété est vraie pour le ou les premiers rangs : $n = 0, 1, 2$.

Pour les raisonnements par récurrence portant sur des relations de récurrence à un pas du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ », une initialisation suffit.

Pour les raisonnements par récurrence portant sur des relations de récurrence à deux pas du type « $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$ », deux initialisations sont nécessaires.

De manière générale, autant d'initialisations sont nécessaires qu'il y a de pas dans la relation de récurrence.

— *La preuve de l'hérédité* : elle consiste à établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}_n$ est vraie alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

On fait donc l'hypothèse (dite de récurrence) que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang n au moins égal au dernier rang d'initialisation et on cherche à établir que la propriété est vraie aussi au rang $n+1$, c'est à dire que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Cette étape peut débuter par l'un des encadrés [1] ci-dessous suivant qu'on envisage une récurrence faible ou une récurrence forte :

$$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathscr{P}_n \text{ est vraie. Montrons que } \mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie.}}$$

ou

$$\boxed{\text{Supposons que } \mathscr{P}_n \text{ est vraie à un certain rang } n \geq 0. \text{ Montrons que } \mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie.}}$$

ou

$$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_n \text{ sont vraies. Montrons que } \mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie.}}$$

ou

$$\boxed{\text{Supposons que la propriété est vraie jusqu' à un certain rang } n \geq 0. \text{ Montrons qu'elle est vraie au rang } n+1.}$$

Pour éviter de rater une « marche » dans la récurrence, on s'assurera toujours que l'hypothèse de récurrence est faite au moins au dernier rang d'initialisation.

— *La conclusion* qui doit faire appel au principe de récurrence sur $\mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{D'après le principe de récurrence sur } \mathbb{N}, \text{ la propriété } \mathscr{P}_n \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

Exemple de raisonnement par récurrence.

Montrons que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{q} \binom{p+j}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$.

— Définition de la propriété :

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_q$ la propriété « $\displaystyle\sum_{j=0}^{q} \binom{p+j}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$ »

— Initialisation :

Pour $q = 0$, on a

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{p+j}{p} = \binom{p}{p} = 1 \text{ et } \binom{p+1}{p+1} = 1$$

donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Pour $q = 1$, on a

$$\sum_{j=0}^{1} \binom{p+j}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} = 1 + p + 1 = p + 2 \text{ et } \binom{p+2}{p+1} = p + 2$$

donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

— Hérédité :

Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_q$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{q+1}$ est vraie.

$$\sum_{j=0}^{q+1} \binom{p+j}{p} = \sum_{j=0}^{q} \binom{p+j}{p} + \binom{p+q+1}{p}$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{j=0}^{q} \binom{p+j}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$$

1. le rang de l'hypothèse de récurrence est à adapter en fonction du dernier rang d'initialisation.

donc

$$\sum_{j=0}^{q+1} \binom{p+j}{p} = \binom{p+q+1}{p+1} + \binom{p+q+1}{p}$$

et d'après la formule de Pascal :

$$\binom{p+q+1}{p+1} + \binom{p+q+1}{p} = \binom{p+q+2}{p+1}$$

donc

$$\sum_{j=0}^{q+1} \binom{p+j}{p} = \binom{p+q+2}{p+1}$$

donc $\mathscr{P}_{q+1}$ est vraie.

— Conclusion :

D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_q$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.