COLLECTION ODYSSÉE

MATHÉMATIQUES 1re S

Livre du professeur

Nouveau programme

Sous la direction de

Éric SIGWARD

IA-IPR de mathématiques de l'académie de Strasbourg

Auteurs

François BRISOUX

Professeur de mathématiques au lycée Frédéric Kirschleger de Munster

Christian BRUCKER

Professeur de mathématiques au lycée Théodore Deck de Guebwiller

Isabelle SANCHEZ

Professeur de mathématiques au lycée Bartholdi de Colmar

Pierre SCHWARTZ

Professeur de mathématiques au lycée international de Strasbourg

PAPIER RECYCLÉ

Hatier

Suivi éditorial : Dominique Colombani

Maquette : Nicolas Balbo

Mise en page : Pierre Florette (Domino)

Infographies : Domino

HATIER, PARIS, 2011
ISBN 978-2-218-95348-4

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Le manuel reprend les trois parties du programme de la classe de première : les fonctions, la géométrie et les statistiques et probabilités. Dans chacune de ces parties, il s'agit de former les élèves à la démarche scientifique afin de les rendre capables de conduire un raisonnement. Le programme de la première peut être abordé selon plusieurs angles, mais il ne faudrait surtout pas le concevoir comme une succession de chapitres cloisonnés. Il conviendra donc de concevoir, dès le début de l'année, une progression alternant les différentes notions à traiter, de telle sorte que les concepts abordés soient repris tout au long de l'année. Vous retrouverez d'ailleurs dans le manuel notre volonté de varier au maximum les situations problèmes au sein de chaque chapitre, afin de réinvestir les différents thèmes, ainsi que les notions du collège comme le calcul algébrique et la géométrie plane.

Chaque chapitre de ce manuel propose des travaux pratiques que nous avons choisis les plus diversifiés possibles. Ils sont classés en trois catégories :

• les activités utilisant l'outil informatique ou la calculatrice ;

• les activités qui mettent en œuvre une démarche algorithmique ;

• les problèmes plus ouverts qui exigent davantage d'initiative de la part des élèves. Certains d'entre eux nécessitent l'utilisation de logiciels pour conjecturer.

Dans chacun de ces problèmes, les élèves auront l'occasion de chercher, d'appliquer des techniques, d'effectuer des essais, de conjecturer avec les TICE puis d'élaborer des démonstrations.

L'utilisation des TICE est tout à fait adaptée à l'acquisition de nombreuses notions du programme de première. Il s'agit d'exploiter toutes les possibilités offertes afin d'enrichir l'apprentissage et les méthodes d'investigation. L'outil informatique permet en effet d'obtenir rapidement une représentation concrète du problème étudié. Des modifications des configurations en jeu peuvent mettre en évidence les propriétés à démontrer et toute l'attention peut alors se porter sur la démonstration elle-même. Les problèmes ouverts proposés dans ce manuel ne font pas appel directement aux TICE. Nous proposons cependant dans certains cas soit une illustration, soit une vérification du résultat obtenu à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel adapté à la situation étudiée.

Il importe que la diversité de ces activités se retrouve aussi dans la nature des travaux proposés aux élèves : des travaux dirigés en groupe, des travaux en autonomie, des activités en salle informatique ou des devoirs personnels réalisés à la maison. Des commentaires dans ce sens aideront les professeurs dans leur choix.

Nous avons essayé de proposer, au sein de chaque chapitre, des problèmes de difficultés progressives, en particulier dans le domaine de l'algorithmique. À l'issue de la classe de seconde, les élèves ont déjà acquis une certaine expérience avec les logiciels usuels : tableur et un logiciel de géométrie dynamique. L'algorithmique, et plus particulièrement la programmation dans un certain langage, est quant à elle une activité nouvelle depuis la classe de seconde et doit se poursuivre dans les classes du cycle terminal.

Nous n'avons privilégié aucune syntaxe particulière, ce qui vous permet d'utiliser ce guide avec ses fichiers quel que soit le matériel et les logiciels utilisés dans votre établissement. La plupart des travaux pratiques peuvent cependant être réalisées assez simplement à l'aide d'une calculatrice. Ce qui permet une très large utilisation de ce guide.

Vous trouverez dans ce livre du professeur, des éléments de correction pour les activités, les exercices et problèmes, ainsi que des indications sur la mise en œuvre des travaux pratiques avec les élèves. Un nombre important de ces activités peut être réalisé avec l'outil informatique. En complément, vous trouverez sur le CD d'accompagnement, des fichiers sous de nombreuses versions :

• Excel et OpenOffice pour les fichiers tableurs ;

• Casio et Texas pour les tracés et la programmation à l'aide de la calculatrice ;

• GeoGebra, TI Nspire pour les exercices de géométrie plane ;

• Cabri3D et Geospace pour les exercices de géométrie dans l'espace ;

• AlgoBox, Python, Scilab et Xcas pour les programmes qui illustrent les algorithmes ;

• Xcas, TI Nspire pour le calcul formel.

Ces fichiers vous permettront d'une part de visualiser les résultats demandés, de tester les algorithmes ou les figures dynamiques, mais également d'illustrer vos explications lors de synthèses collectives avec les élèves. Certains de ces fichiers sont à la disposition des élèves sur le site compagnon, intégralement ou partiellement complétés, plus particulièrement lorsque le problème consiste, soit à modifier, compléter ou corriger un algorithme, soit à réaliser des conjectures sur une configuration géométrique relativement complexe, ou bien encore à effectuer des simulations sur une feuille de calcul d'un tableur. Ils serviront ainsi de base de travail pour une activité en autonomie ou pour un devoir à réaliser à la maison.

Nous espérons que ce livre répondra à vos attentes et qu'il vous apportera des pistes intéressantes pour une présentation efficace du programme de première S.

Les auteurs.

PARTIE A

ANALYSE

1. Second degré

Objectifs et pré-requis

Le programme de première s'inscrit, comme celui de la classe de seconde, dans le cadre de la résolution de problèmes. Les situations proposées ici répondent à des problématiques d'origine mathématique ou en lien avec d'autres sciences.
Un des objectifs de ce chapitre est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter de problèmes du second degré.

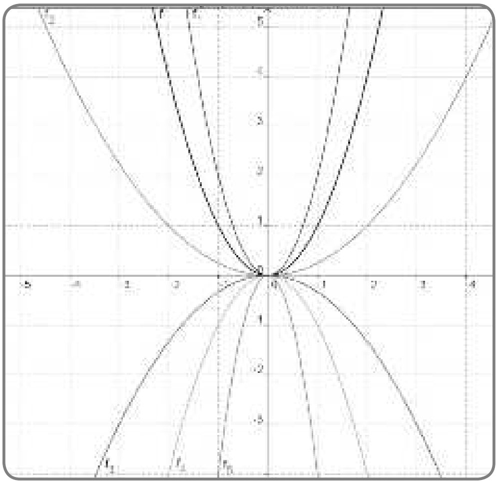
Extrait du programme (Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010)

Contenus	Capacités attendues
Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	• Déterminer et utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.

Corrigés des activités

1 Représentation graphique d'un trinôme

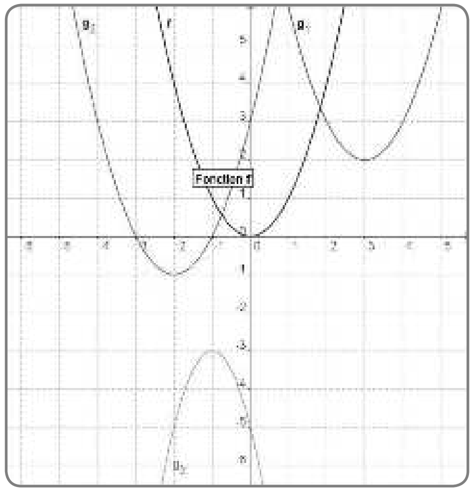
1 **a.** Voici une copie d'un écran obtenu avec *GeoGebra*.



b. Pour tout réel x, $f_3(-x) = -\frac{1}{3}(-x)^2 = -\frac{1}{3}x^2 = f_3(x)$. Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_3$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Par un raisonnement analogue, on montre que les courbes $\mathscr{P}$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_5$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
c. La courbe $\mathscr{C}_4$ est la symétrique de la courbe $\mathscr{P}$ par rapport à l'axe des abscisses.
d. On passe de la parabole $\mathscr{P}$ à la parabole représentant la fonction $x \to ax^2$ par une « dilatation » suivant l'axe des ordonnées dont le réel a est le coefficient.

Si a est strictement positif, la parabole obtenue est « tournée vers le haut » ; si a est strictement négatif, elle est « tournée vers le bas ».

2 **a.** Voici une copie d'un écran obtenu avec *GeoGebra.*



b. La courbe $\mathscr{C}_1$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 3$.
c. On peut obtenir $\mathscr{C}_1$ à partir de $\mathscr{P}$ par une translation de vecteur $3\vec{i} + 2\vec{j}$. La courbe $\mathscr{C}_1$ a la même nature que la courbe $\mathscr{P}$: c'est une parabole. Son sommet est le point de coordonnées (3 ; 2), image du point O(0 ; 0) par la translation de vecteur $3\vec{i} + 2\vec{j}$.
d. La courbe $\mathscr{C}_2$ est l'image de la parabole $\mathscr{P}$ par la translation de vecteur $-2\vec{i} - \vec{j}$.
e. Une fois le changement de courbure effectué, la translation permettant d'obtenir $\mathscr{C}_3$ est la translation de vecteur $-\vec{i} - 3\vec{j}$. Les coordonnées du sommet de $\mathscr{C}_3$ sont (–1 ; –3).
f. Le sommet de la parabole représentant la fonction g_4 est de coordonnées (2 ; –1), donc $g_4(x)$ peut s'écrire sous la forme : $g_4(x) = a(x - 2)^2 - 1$. De plus, $g_4(3) = 3$.
On en déduit : $g_4(x) = 4(x - 2)^2 - 1$. ($a = 4$; $\alpha = 2$; $\beta = -1$).

3 **a.** Pour tout réel x, $h(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ ($a = 3$; $\alpha = 1$; $\beta = 2$). Les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{C}_h$ représentant h sont donc (1 ; 2) et une équation de son axe de symétrie est $x = 1$.
Construction à partir de la parabole $\mathscr{P}$: on procède à un changement de courbure (les ordonnées des points de $\mathscr{P}$ sont multipliées par 3), puis on effectue une translation de vecteur $\vec{i} + 2\vec{j}$.
b. En posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient :
pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
Le sommet de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est de coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a} ; -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.
Son axe de symétrie a pour équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

2 Forme canonique d'un trinôme

Partie A : Étude d'un exemple « historique»

1 (E') $(x + 5)^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow (x + 5 - 8)(x + 5 + 8) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 13) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -13$.
Les solutions de (E) sont –13 et 3.

2 **a.** L'aire du carré ABCD additionnée à celle des deux rectangles le bordant vaut $x^2 + 2 \times 5x$, c'est–à–dire $x^2 + 10x$. Elle est aussi égale à l'aire du grand carré AEIH diminuée de celle du carré CFIG. On a donc : $(x + 5)^2 - 25 = 39$.
b. Le mathématicien Al Khwarizmi retrouve ainsi la solution 3 (seule valeur positive).
c. Cette méthode permet de résoudre des équations du type « $x^2 + ax = b$ » .

3 $x^2 + 12x = 85 \Leftrightarrow (x + 6)^2 - 36 = 85 \Leftrightarrow (x + 6)^2 - 121 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 17) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -17$.
Les solutions de $x^2 + 12x = 85$ sont –17 et 5.

Partie B : Autres exemples d'utilisation de la forme canonique

1 **a.** $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ et $g(x) = (x-3)^2 + 4$. Les minimums sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g sont $-\frac{1}{4}$ et 4.

b. On a : $f(x) = (x-3)(x-2)$; ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : 2 et 3.

c. $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = -4$, or un carré est toujours positif. L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

2 **a.** Pour tout réel x : $h(x) = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) - 10 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{81}{8}$ et $i(x) = -3\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 7$

$$= -3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}$$

Le minimum sur $\mathbb{R}$ de h est $-\frac{81}{8}$ et le maximum sur $\mathbb{R}$ de i est $\frac{31}{4}$.

b. $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ ou $x = -2$

$i(x) = 0 \Leftrightarrow -3\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{12}}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{12}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{93}}{6}$ ($\approx 1{,}11$) ou $x = \frac{-3-\sqrt{93}}{6}$ ($\approx -2{,}11$).

3 Les résultats sont confirmés par les représentations graphiques des fonctions f, g, h et i à l'aide d'une calculatrice graphique.

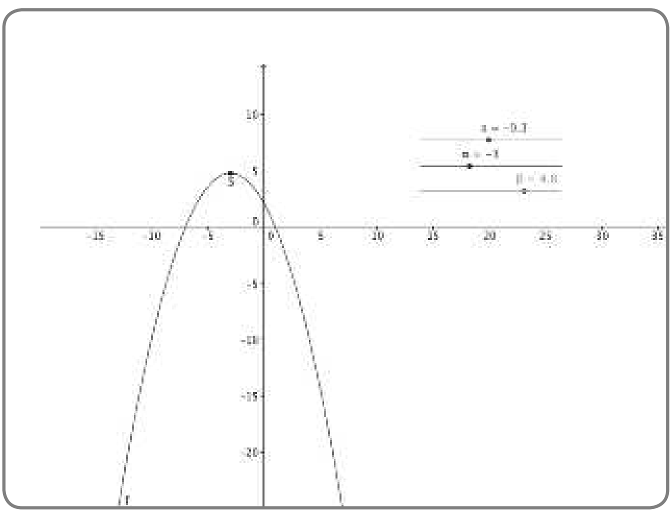
Corrigés des Travaux pratiques

TICE 1 Paraboles et équations

On munit le plan d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Forme canonique

1



2 • Lorsque l'on modifie uniquement le paramètre a, seule la « courbure » de la parabole est modifiée. Le sommet S reste inchangé.

• Lorsque l'on modifie uniquement le paramètre α, la parabole subit une translation de vecteur colinéaire à $\vec{i}$.

• Lorsque l'on modifie uniquement le paramètre β, la parabole subit une translation de vecteur colinéaire à $\vec{j}$.

3 En manipulant les paramètres a, α et β, on conjecture que :

• l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions si, et seulement si, les réels a et β sont strictement de signes contraires (c'est–à–dire ($a > 0$ et $\beta < 0$) ou ($a < 0$ et $\beta > 0$)).

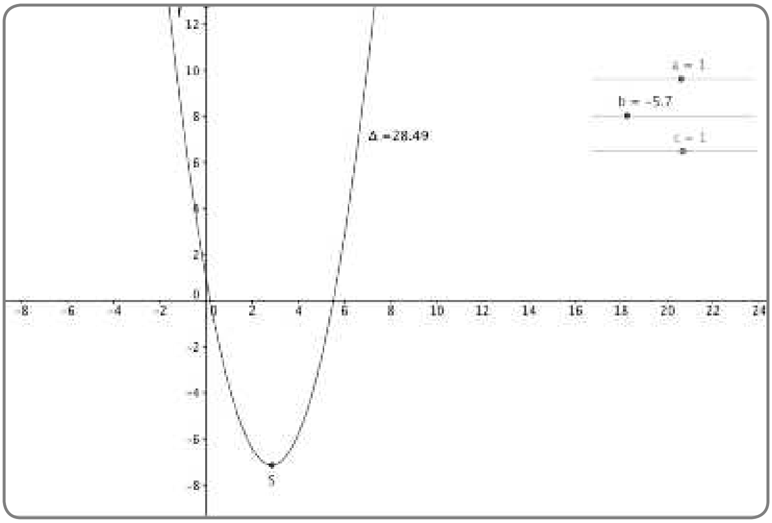
• l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution si, et seulement si, le réel β est nul.

• l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution si, et seulement si, les réels a et β sont strictement de même signe (c'est–à–dire ($a > 0$ et $\beta > 0$) ou ($a < 0$ et $\beta < 0$)). Le signe de $f(x)$ est alors celui du réel a.

On remarque que le réel α n'a aucune influence sur le nombre de racines du trinôme.

Partie B : Forme développée

1



2 **a.** En manipulant le paramètre a, on conjecture que :

• l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions si, et seulement si, le réel non nul a est strictement inférieur à 1.

• l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution si, et seulement si, $a = 1$.

L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution si, et seulement si, le réel a est strictement supérieur à 1.

b. $\Delta = 4 - 4a = 4(1 - a)$. L'étude du signe de Δ donne bien les résultats conjecturés en **2.a.**

3 **a.** En manipulant le paramètre c, on conjecture que :

• l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions si, et seulement si, le réel non nul c est strictement inférieur à 4.

• l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution si, et seulement si, $c = 4$.

• l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution si, et seulement si, le réel c est strictement supérieur à 4.

b. $\Delta = 16 - 4c = 4(4 - c)$. L'étude du signe de Δ donne bien les résultats conjecturés en **3.a.**

4 **a.** En manipulant les paramètres a et c pour plusieurs valeurs de b, on conjecture que, si a et c sont de signes strictement différents, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

b. Si a et c sont de signes strictement différents, alors $ac < 0$, puis $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, d'où la conjecture.

5 **a.** En manipulant le paramètre b, on conjecture que :

• l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions si, et seulement si, le réel non nul b appartient à $]-\infty\ ; -2[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

• l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution si, et seulement si, $b = -2$ ou $b = 2$.

• l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution si, et seulement si, le réel b appartient à $]-2\ ; 2[$.

L'étude du signe de $\Delta = b^2 - 4 = (b - 2)(b + 2)$ mène au résultat conjecturé ci–dessus.

b. et **c.** Le sommet S semble se déplacer sur une parabole.

Le point S a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2}\ ; f\left(-\dfrac{b}{2}\right)\right) = \left(-\dfrac{b}{2}\ ; 1 - \dfrac{b^2}{4}\right)$.

On constate que $y_S = 1 - x_S{}^2$; ainsi, le point S est sur la parabole d'équation $y = 1 - x^2$.

TICE 2 Deux disques dans un carré

1 **a.** On considère la diagonale [AC] du carré ABCD. En utilisant le théorème de Pythagore ou la trigonométrie, on obtient :

$$AC = \sqrt{2} = AE + EI + IG + GC = r_1\sqrt{2} + r_1 + r_2 + r_2\sqrt{2} \text{ d'où } r_1 + r_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$$

b. Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont entièrement inclus dans le carré, donc leur rayon maximal est $\frac{1}{2}$.
D'après **1.a**, si le rayon d'un des cercles est maximal, l'autre est minimal et vaut alors :

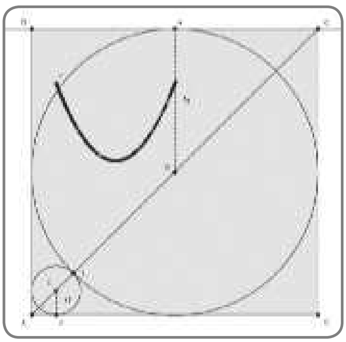
$$2-\sqrt{2}-\frac{1}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

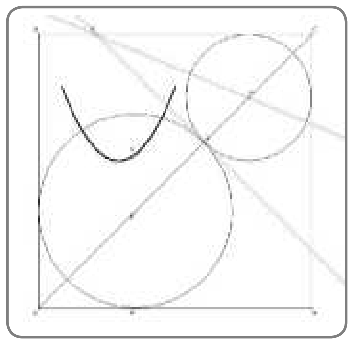
2 **a. b.** Pour construire le cercle $\mathscr{C}_1$, on peut commencer par tracer le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par E. Il est intéressant de laisser les élèves analyser la figure et les outils disponibles avant d'opter pour une solution.

c. Le centre de $\mathscr{C}_2$ est à la même distance de la droite (IK) et de la droite (CK). Il appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{IKC}$.

D'autres méthodes de construction sont possibles. Si les élèves connaissent les propriétés géométriques de la parabole, on peut aussi définir le centre de $\mathscr{C}_2$ comme le point d'intersection de la droite (AC) avec la parabole de foyer I et de directrice (CD). Une autre possibilité est d'utiliser la relation $r_1 + r_2 = 2-\sqrt{2}$ pour déterminer la distance IG.

d. Voici les affichages obtenus sur *GeoGebra* et sur *Geoplan* :





Le point T semble se déplacer sur une parabole, ce qui laisse penser que l'aire totale, exprimée en fonction de r_1 est un polynôme du second degré. L'aire totale maximale semble être atteinte lorsque le point E ou le point G est au centre du carré, c'est–à–dire quand le rayon d'un des cercles est maximal ; l'aire minimale semble atteinte lorsque les rayons des deux cercles sont égaux (AF ≈ 0,293).

3 L'aire totale est donnée par $a = f(x) = \pi\left(r_1^2 + r_2^2\right) = 2\pi\left(x^2 - \left(2-\sqrt{2}\right)x + 3 - \sqrt{2}\right)$, f étant définie sur l'intervalle $\left[\frac{3-2\sqrt{2}}{2} ; \frac{1}{2}\right]$.

La fonction f est un trinôme du second degré, le coefficient de x^2 étant strictement positif, donc elle atteint son minimum en $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ (la relation $r_1 + r_2 = 2-\sqrt{2}$ donne alors $r_1 = r_2$). On obtient le tableau de variations :

x	$\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$
$f(x)$	$f\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$

où $f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(3-2\sqrt{2}\right)\pi \approx 0{,}539$ et $f\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi}{2} \approx 0{,}809$.

Les conjectures sont bien établies.

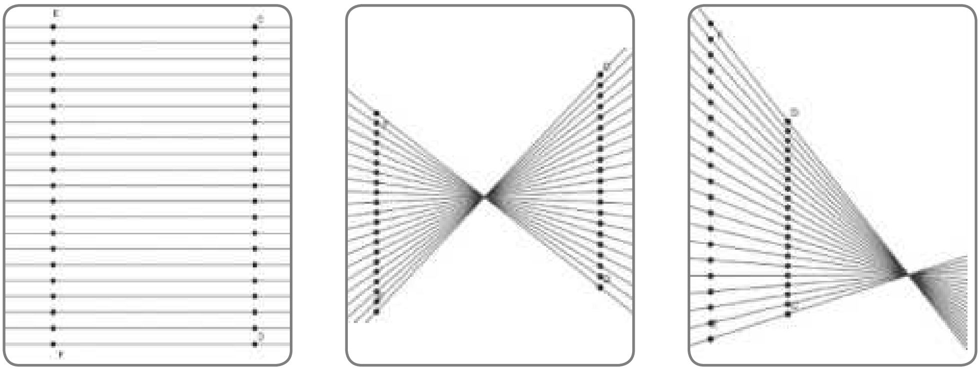
TICE 3 Une famille de droites bien connues

1 **a.** La construction des familles de points A et B à l'aide de l'instruction **Séquence** peut être expliquée à l'aide de translations.

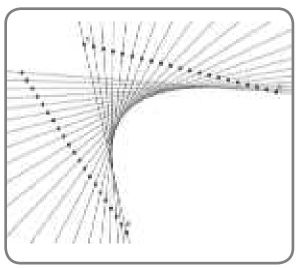
Par exemple, dans l'instruction **A = Séquence[C + *i*/20*u, *i*, 0, 20]**, les 21 points de la famille A sont les images du point C par les translations de vecteurs $\left(\frac{i}{20}\right)\vec{u}$, où les nombres i sont les entiers compris entre 0 et 20.

Il est à noter que la famille A est alors indexée de 1 à 21 : Elément[A, 1] est le point C et Elément[A, 21] est le point D.

b. c. • Lorsque les droites (CD) et (EF) sont parallèles, les droites sont soit parallèles, soit concourantes.

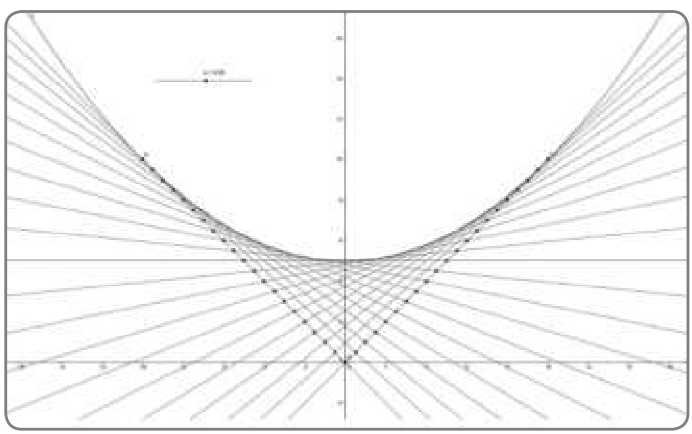


• Lorsque les droites (CD) et (EF) ne sont pas parallèles, il apparaît une courbe ressemblant à une portion de parabole.



2 **a. b.** La parabole étant de sommet S(0 ; 5), la forme canonique de $f(x)$ est du type $f(x) = ax^2 + 5$, où a est un réel strictement positif, la parabole étant « tournée vers le haut ».

c. On trouve $a = 0{,}05$.



Remarque : de manière générale, une parabole est l'enveloppe d'une droite passant par deux points ayant des mouvements rectilignes uniformes non parallèles.

TICE 4 Parabole passant par trois points

1 **a.** Les points A, B et C ne sont pas alignés, donc ils sont distincts deux à deux. Deux points distincts de même abscisse ne peuvent pas appartenir à la représentation graphique d'une même fonction. Le problème posé n'a donc pas de solution.
On justifie ainsi le fait que les quotients qui interviennent dans la méthode des différences divisées sont bien définis.
b. et c. Voici les copies d'écran obtenues sur Xcas et Excel.

Xcas

	A	B	C	D
0	"Abscisses des points"	-1	2	5
1	"Ordonnées des points"	14	2	44
2	"Différences divisées d'ordre 1"	-4	14	0
3	"Différences divisées d'ordre 2"	3	0	0
4	""	0	0	0
5	""	0	0	0
6	""	0	0	0
7	"Polynôme obtenu"	3*x^2-7*x+4	0	0
8	"Vérification"	14	2	44

Excel

	A	B	C	D
1	Abscisses des points	-1	2	5
2	Ordonnées des points	14	2	44
3	Différences divisées d'ordre 1	-4	14	
4	Différences divisées d'ordre 2	3		
5				
6	Vérification	14	2	44

On constate que les valeurs prises par f en x_A, x_B et x_C sont les valeurs attendues. La fonction f répond donc au problème d'interpolation.
Il est intéressant de demander aux élèves si f est nécessairement un trinôme, et de les amener à constater :
f est un trinôme $\Leftrightarrow e_1 \neq 0 \Leftrightarrow d_1 \neq d_2 \Leftrightarrow$ (AB) non parallèle (BC).

2 **a.** Voici la copie d'écran obtenue sur Xcas.

	A	B	C	D
0	"Abscisses des points"	-2	1	4/3
1	"Ordonnées des points"	(-29)/6	5/12	4/9
2	"Différences divisées d'ordre 1"	7/4	1/12	0
3	"Différences divisées d'ordre 2"	(-1)/2	0	0
4	""	0	0	0
5	""	0	0	0
6	""	0	0	0
7	"Polynôme obtenu"	(-6*x^2+15*x-4)/12	0	0
8	"Vérification"	(-29)/6	5/12	4/9

On obtient donc $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{4}x - \dfrac{1}{3}$.

b. En utilisant $S(1) = 1$, $S(2) = 3$ et $S(3) = 6$, on obtient :

	A	B	C	D
0	"Abscisses des points"	1	2	3
1	"Ordonnées des points"	1	3	6
2	"Différences divisées d'ordre 1"	2	3	0
3	"Différences divisées d'ordre 2"	1/2	0	0
4	""	0	0	0
5	""	0	0	0
6	""	0	0	0
7	"Polynôme obtenu"	(x^2+x)/2	0	0
8	"Vérification"	1	3	6

Ainsi $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, formule que l'on vérifie pour quelques exemples simples.

3 On obtient successivement : $d_1 = y_B - y_A$, $d_2 = y_C - y_B$ et $e_1 = \dfrac{d_2 - d_1}{2} = \dfrac{y_C + y_A}{2} - y_B$.

Puis $f(x) = y_A + d_1x + e_1x(x-1) = y_A + (y_B - y_A)x + \left(\dfrac{y_C + y_A}{2} - y_B\right)x(x-1)$.

On en déduit : $f(0) = y_A$, $f(1) = y_B$ et $f(2) = y_A + 2(y_B - y_A) + (y_C + y_A - 2y_B) = y_C$.
La représentation graphique de f passe bien par les points A, B et C.

Algorithmique 1 — Résoudre une équation du second degré

1 Voici une traduction de l'algorithme en langage naturel :

Entrée : Saisir **a**, **b** et **c**

Traitement :

Affecter à la variable d la valeur $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}$
Afficher **d**
Si **d** < 0 afficher « Pas de solution »
Si **d** = 0 afficher « Une solution : », $\dfrac{-\mathbf{b}}{2\mathbf{a}}$
Si **d** > 0 faire
   Affecter à la variable **e** la valeur $\dfrac{-\mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{d}}}{2\mathbf{a}}$
   Affecter à la variable **f** la valeur $\dfrac{-\mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{d}}}{2\mathbf{a}}$
   Afficher « Deux solutions : », **e**, **f**
Fin_du_Si

2 L'algorithme programmé sur la calculatrice donne les résultats suivants (sur **TI 82**) :

Équation	$6x^2 - x - 1 = 0$	$16x^2 - 8x + 13 = 0$	$2x^2 - 10x + \dfrac{25}{2} = 0$
Écran	C=?-1 DELTA= 25 DEUX SOLUTIONS: -.3333333333 .5 Fait	B=?-8 C=?13 DELTA= -768 PAS DE SOLUTION Fait	B=?-10 C=?25/2 DELTA= 0 UNE SOLUTION: 2.5 Fait

Les résultats obtenus sont ceux qui étaient attendus.

3 En testant cet algorithme avec les valeurs $a = 0$, $b = 2$ et $c = 1$, on obtient un **message d'erreur**. En effet, le réel d calculé étant strictement positif ($d = 4$), l'algorithme effectue un calcul où apparaît une division par 0 (on divise par $2a$ qui est nul).

On insère donc, après la saisie du réel a, une ligne permettant de tester la nullité éventuelle de a et d'interrompre éventuellement le programme (voir la modification dans les programmes reproduits ci–dessous).

4 En langage naturel, on obtient l'algorithme suivant :

Entrée : Saisir **a**, **b** et **c**

Traitement :

Si **a** = 0 interrompre le programme
Affecter à la variable **d** la valeur $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}$
Afficher **d**
Si **d** < 0
   Alors afficher « Pas de solution »
   Sinon Si **d** = 0
      Alors afficher « Une solution : », $\dfrac{-\mathbf{b}}{2\mathbf{a}}$
      Sinon faire
         Affecter à la variable **e** la valeur $\dfrac{-\mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{d}}}{2\mathbf{a}}$
         Affecter à la variable **f** la valeur $\dfrac{-\mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{d}}}{2\mathbf{a}}$
         Afficher « Deux solutions : », **e**, **f**
Fin_du_Si

En langage machine, on obtient :

<table>
<tr><th>TI82</th><th>CASIO 35</th></tr>
<tr><td><pre>
PROGRAM:TRINOME
:Prompt A,B,C
:If A=0
:Stop
:B²-4AC→D
:Disp "DELTA=",D
:If D<0
:Then
:Disp "PAS DE SO
LUTION"
:Else
:If D=0
:Then
:Disp "UNE SOLUT
ION:",-B/(2A)
:Else
:(-B-√(D))/(2A)→
E
:(-B+√(D))/(2A)→
F
:Disp "DEUX SOLU
TIONS:",E,F
:End
</pre></td><td><pre>
======TRINOME ======
"A"?→A:"B"?→B:"C"?→C↵
If A=0↵
Then Stop↵
IfEnd↵
B²-4AC→D↵
"DELTA=":D◢
If D<0↵
Then "PAS DE SOLUTION
"↵
Else If D=0↵
Then "UNE SOLUTION:"↵
-B÷(2A)◢
Else "DEUX SOLUTIONS:
"↵
(-B-√D)÷(2A)→E↵
(-B+√D)÷(2A)→F↵
E◢
F◢
IfEnd
</pre></td></tr>
</table>

5 Les solutions trouvées par une TI 82 ou une Casio 35 à l'équation $x^2 - (10^{16} + 1)x + 10^{16} = 0$ sont 0 et 10^{16}, le discriminant calculé étant 10^{32}.
La solution 0 est évidemment fausse, puisque le terme constant du trinôme n'est pas nul.

Une résolution algébrique donne successivement $\Delta = \left(1+10^{16}\right)^2 - 4\times 10^{16} = \left(10^{16}-1\right)^2 < 10^{32}$ puis les deux solutions $x_1 = \dfrac{\left(10^{16}+1\right)-\left(10^{16}-1\right)}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{\left(10^{16}+1\right)+\left(10^{16}-1\right)}{2} = 10^{16}$.

L'« erreur » de la calculatrice est liée à l'arrondi réalisé lors des calculs intermédiaires.

Algorithmique 2 — Algorithme de Horner

1 L'algorithme 1 correspond au calcul « naturel » utilisant la forme développée ; l'algorithme 2 correspond à l'algorithme de Horner.
Cette analyse est l'occasion de rappeler aux élèves que beaucoup de méthodes calculatoires ou algébriques sont de nature algorithmique.

2 **a.** Le résultat obtenu est –5 127,4.
b. À chacun des 5 passages dans la boucle, on effectue une multiplication et une addition. En tout, on a donc 5 additions et 5 multiplications.

3 **a.** Cette programmation est sans grande difficulté, la structure du programme étant proche de celle vue à la question **2**.

<table>
<tr><th>TI 82</th><th>CASIO 35</th></tr>
<tr><td><pre>
PROGRAM:CLASSIC
:Prompt N,L₁,X
:L₁(1)→R
:For(I,2,N+1)
:R+X^(I-1)*L₁(I)
→R
:End
:Disp "RESULTAT=
",R
</pre></td><td><pre>
======CLASSIC ======
"N"?→N:"COEFF"?→List
1:"X"?→X↵
List 1[1]→R↵
For 2→I To N+1↵
R+X^(I-1)×List 1[I]→R
↵
Next↵
"RESULTAT="↵
R◢
</pre></td></tr>
</table>

b. Le test est identique à celui du **2. a.** afin de permettre une vérification autonome du programme saisi.
c. Les calculs nécessitent 15 multiplications et 5 additions. La différence avec l'algorithme 1 est déjà sensible.

4 **a.** Sur une **TI 82**, l'exécution du calcul à l'aide de l'algorithme de Horner se fait en un peu plus de 2 secondes, alors que la méthode « naturelle » requiert près de 5 secondes. Il est plus difficile de mettre en évidence cette différence d'efficacité sur un ordinateur. On pourrait, par exemple, calculer les valeurs prises par le polynôme P pour un grand nombre de points de l'intervalle [0 ; 2].

b. L'algorithme de Horner nécessite 100 additions et 100 multiplications. La méthode classique utilise 100 additions et $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$ multiplications (s'il n'y a pas mémorisation des calculs successifs des puissances de x).

Remarque : Si n est le degré du polynôme P, le nombre d'opérations est de $2n$ pour Horner contre $\frac{n(n+3)}{2}$ pour la méthode classique sans mémorisation (avec mémorisation : $3n$ opérations). On pourra comparer avec les élèves l'évolution de ces coûts en fonction de n.

Algorithmique 3 Aire sous la parabole

PARTIE A : la méthode de Monte–Carlo

1 **a.** Ici $a = 1$, ainsi le domaine $\mathscr{D}$ est délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe. On a bien $M(x\,;y) \in \mathscr{D}$ si et seulement si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 0{,}5x^2$.

b. Pour alléger l'activité ou pour s'adapter au langage utilisé, on peut ne pas effectuer les constructions des points et se contenter du dénombrement des points sous la courbe.

```
Entrée           Saisir n
Initialisation   Affecter à la variable s la valeur 0
Traitement       Tracer le rectangle OA'AA''
Sortie           Tracer la courbe représentative de f sur [0 ; 1]
                 Pour j allant de 1 jusqu'à n
                     Affecter à la variable a un nombre aléatoire entre 0 et 1
                     Affecter à la variable b un nombre aléatoire entre 0 et 1
                     Si b < 0,5a² alors
                         Tracer le point de coordonnées (a ; b) en vert
                         Affecter à la variable s la valeur s + 1
                         Sinon Tracer le point de coordonnées (a ; b) en rouge
                     Fin_du_Si
                 Fin_du_Pour
                 Afficher n/s
```

c. Dans l'algorithme proposé, la variable n représente le nombre de points choisis au hasard dans le rectangle $OA'AA''$, et, parmi ces derniers, la variable s compte ceux qui sont dans le domaine $\mathscr{D}$.

d. On constate que le rapport $\frac{n}{s}$, quand n est grand, est proche de 3.

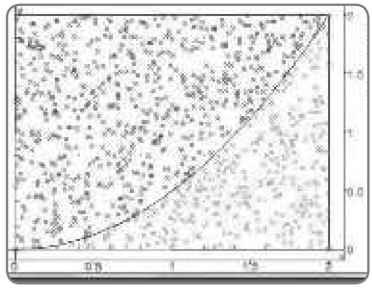
Programmé sur un logiciel « rapide », l'algorithme peut être testé pour de bien plus grandes valeurs. La probabilité d'obtenir un point dans le domaine $\mathscr{D}$ est donc proche de $\frac{1}{3}$.

e. On peut conjecturer que l'aire du rectangle est le triple de celle du domaine $\mathscr{D}$ dans le cas où $a = 1$.

2 **a.** Voici l'algorithme modifié :

```
MonteCarlogene(n,borne):={
  local i,a,b,s;
  s:=0;
  erase
  rectangle(point(0,0),point(borne,0),0.5*borne);
  plotfunc(0.5*x^2,x=0..borne,couleur=noir);
  pour i de 1 jusque n faire
    a:=alea(0,borne);
    b:=alea(0,0.5*borne^2);
    si b<0.5*a^2 alors
      point(a,b,couleur=vert);
      s:=s+1;
      sinon
      point(a,b,couleur=rouge);
      fsi;
  fpour;
  afficher("aire du rectangle / aire sous la parabole =",n/s);
return evalf(n/s);
}
:;
```

Et une copie de l'écran graphique :



b. À nouveau, on constate que le rapport $\dfrac{n}{s}$ est proche de 3 ; on peut donc conjecturer que l'aire du rectangle est le triple de celle du domaine $\mathcal{D}$ dans le cas où $a > 0$.

c. Par symétrie de la parabole par rapport à l'axe des ordonnées, on déduit que cette conjecture est encore valable lorsque $a < 0$.

Remarque : la méthode de Monte-Carlo, qui doit son nom aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, est particulièrement utilisée pour calculer des aires et des volumes, mais aussi dans de nombreux domaines comme la physique des particules ou la finance (voir l'article de l'encyclopédie en ligne *Wikipédia*).

Partie B : la méthode des trapèzes

1 **a.** $\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\left(0{,}5\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+0{,}5\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)+0{,}5\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right)+0{,}5\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1^2\right)\right)=\dfrac{11}{64}$.

b. Aire $(T_i) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n}\left(0{,}5\left(\dfrac{i}{n}\right)^2+0{,}5\left(\dfrac{i+1}{n}\right)^2\right)$ (T_0 est considéré comme un trapèze de *petite base* nulle ; on pourra montrer aux élèves que la formule d'aire d'un trapèze convient dans ce cas.)

c. Dans l'algorithme Xcas présenté, la variable s représente la somme des aires des trapèzes T_0, T_1, T_2, … , T_{n-1}.

En reprenant la formule de l'aire établie à la question **b.**, on voit qu'on peut mettre $\dfrac{1}{2n}$ en facteur dans la somme s, d'où l'algorithme tel qu'il est écrit.

Il est intéressant de demander aux élèves quelle « économie » de calculs peut encore être faite, et d'améliorer ensuite l'algorithme présenté. Cela peut être un premier pas vers une démonstration de la propriété à l'aide de la formule donnant la somme des premiers carrés, dans le cadre du chapitre des suites par exemple.

d. On retrouve bien une aire égale à $\dfrac{11}{64}$.

e. On constate que le rapport q, quand n prend de grandes valeurs, est proche de 3.

f. On peut conjecturer que l'aire du rectangle est le triple de celle du domaine $\mathcal{D}$ dans le cas où $a = 1$.

2 **a.** L'algorithme modifié est le suivant :

```
Trapèzesgéné(n,borne):={
  local s,t,i;
  t:=0;
  pour i de 0 jusque n-1 faire
    t:=t+(1/2*(i*borne/n)^2+1/2*((i+1)*borne/n)^2);
  fpour;
  s:=borne/(2n)*t
afficher("aire des trapèzes =",s);
q:=1/2*borne^3/s;
afficher("aire du rectangle / aire des trapèzes =",q);
return evalf(q);
}:;
```

Il est à noter que le signe de la borne a ne joue pas de rôle ici.

b. À nouveau, on constate que le rapport q est proche de 3 ; on peut donc conjecturer que l'aire du rectangle est le triple de celle du domaine $\mathcal{D}$ dans le cas où a est un réel non nul.

Problème ouvert 1 Aire maximale

Considérons le secteur circulaire de rayon R et d'angle α (exprimé en degré).
L'aire $\mathcal{A}$ du secteur et la longueur ℓ de l'arc de cercle qui le délimite sont proportionnelles à son angle α. On a donc les tableaux de proportionnalité suivants :

Angle	360	α
Aire	πR^2	$\mathcal{A}$

Angle	360	α
Longueur	$2\pi R$	ℓ

On en déduit : $A = \pi R^2 \dfrac{\alpha}{360}$ (1) et $\ell = 2\pi R \dfrac{\alpha}{360}$ (2).
Appelons p le périmètre du secteur. On a $p = 2R + \ell = 2R + 2\pi R \dfrac{\alpha}{360}$.
On en déduit : $\alpha = 360 \dfrac{p-2R}{2\pi R}$.
Ainsi, en remplaçant α par son expression en fonction de R et p dans (1), on obtient :

$$A = \pi R^2 \frac{360\frac{p-2R}{2\pi R}}{360} = \frac{1}{2}R(p-2R) = \frac{1}{2}\left(-2R^2 + pR\right).$$

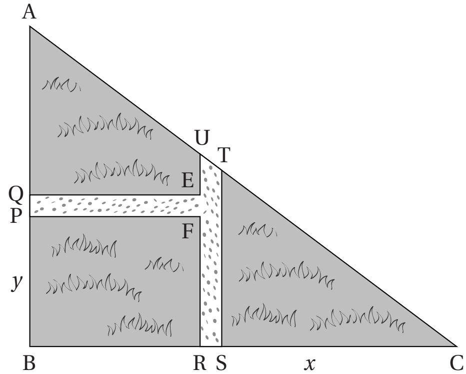
Le trinôme $-2R^2 + pR$, de même que l'aire $\mathcal{A}$, prend son maximum en $R = \dfrac{-p}{2(-2)} = \dfrac{p}{4}$.
D'après l'énoncé, $p = 20$. L'aire $\mathcal{A}$ est ainsi maximale pour $R = \dfrac{20}{4} = 5$.
L'angle α vaut alors : $\alpha = 360\dfrac{20 - 2\times 5}{2\pi \times 5} = \dfrac{360}{\pi} \approx 114{,}6°$ ($\alpha = 2$ rad).

Problème ouvert 2 En peignant le mur

On choisit d'exprimer les durées en minutes.
Soit s le temps mis par Simon pour repeindre seul le mur et j le temps nécessaire à Juliette pour le faire.
Ainsi, la portion du mur repeinte par Simon en une minute est $\dfrac{1}{s}$, et celle repeinte par Juliette est $\dfrac{1}{j}$.
Ensemble, ils repeignent $\left(\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{j}\right)$ du mur en une minute. Il leur faut 36 minutes pour repeindre tout le mur ensemble ; on en déduit : $36\left(\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{j}\right) = 1$ (1).

En travaillant seul, Simon aurait besoin d'une demi–heure de plus que Juliette pour ce travail, donc on a l'égalité : $s = j + 30$ (2).
En remplaçant s par $j + 30$ dans (1), on obtient :
$\dfrac{1}{j} + \dfrac{1}{j+30} = \dfrac{1}{36}$, c'est–à–dire $\dfrac{j+30}{j(j+30)} + \dfrac{j}{j(j+30)} = \dfrac{1}{36}$ puis $\dfrac{2j+30}{j(j+30)} = \dfrac{1}{36}$.
Le réel j étant strictement positif, $j(j + 30)$ est non nul ; on a donc :
$36(2j+30) = j(j+30)$, c'est–à–dire $j^2 - 42j - 1080 = 0$ (E).
Le discriminant Δ de $j^2 - 42j - 1080$ est :
$\Delta = (-42)^2 - 4 \times 1 \times (-1080) = 6084 = 78^2$.
Les solutions de l'équation (E) sont donc $j_1 = \dfrac{42+78}{2} = 60$ et $j_2 = \dfrac{42-78}{2} = -18$.
On exclut la solution négative j_2. On a donc $j = 60$.
De (2), on déduit : $s = j + 30 = 90$.
Il faut 90 minutes, soit une heure et demie, à Simon pour repeindre le mur en travaillant seul.

Problème ouvert 3 **Jardin triangulaire**



Les distances sont exprimées en mètres. On pose : $x = SC$ et $y = BP$.

On en déduit : $BR = 38 - x$ et $QA = 28 - y$.

Cherchons à exprimer l'aire des parties grisées en fonction de x et y.

• Comme BC = 40 et BA = 30, on a, d'après le théorème de Pythagore, AC = 50.

• Les droites (TS) et (AB) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès, on a l'égalité :

$\dfrac{CS}{CB} = \dfrac{TS}{BA}$, c'est–à–dire $\dfrac{x}{40} = \dfrac{TS}{30}$ puis $TS = \dfrac{3}{4}x$.

• Les droites (UR) et (AB) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès, on a l'égalité :

$\dfrac{CR}{CB} = \dfrac{UR}{BA}$, c'est–à–dire $\dfrac{x+2}{40} = \dfrac{UE+2+y}{30}$ puis $UE = \dfrac{3}{4}x - y - \dfrac{1}{2}$.

• L'aire du rectangle BRFP est égale à celle du trapèze AQEU, donc on a :

$\dfrac{1}{2}(38-x)\left(28 - y + \dfrac{3}{4}x - y - \dfrac{1}{2}\right) = (38-x)y$, c'est–à–dire $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{55}{2} - 2y + \dfrac{3}{4}x\right) = y$

d'où $y = \dfrac{3x+110}{16}$ (1).

• L'aire du triangle SCT est égale à celle du rectangle BRFP. On a donc $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4}x^2 = (38-x)y$.

D'après (1), cette égalité devient $6x^2 = (38-x)(3x+110)$.

On obtient l'équation du second degré : $9x^2 - 4x - 4\,180 = 0$ dont les solutions sont $x_1 = \dfrac{4+4\sqrt{9406}}{18} = \dfrac{2+2\sqrt{9406}}{9}$ et $x_2 = \dfrac{2-2\sqrt{9406}}{9}$.

On exclut la solution négative x_2. On a donc $x = \dfrac{2+2\sqrt{9406}}{9} \approx 21{,}77$.

On en déduit : $TS = \dfrac{3}{4}x = \dfrac{1+\sqrt{9406}}{6} \approx 16{,}33$ et $BR = 38 - x = \dfrac{340-2\sqrt{9406}}{9} \approx 16{,}23$.

D'après (1), on obtient $BP = y = \dfrac{166+\sqrt{9406}}{24} \approx 10{,}96$,

puis $AQ = \dfrac{506-\sqrt{9406}}{24} \approx 17{,}04$ et $UE = \dfrac{3}{4}x - y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-58+\sqrt{9406}}{8} \approx 4{,}87$.

Corrigés des exercices et problèmes

QCM Pour bien commencer

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 342.

Exercices d'application

1 Les trinômes du second degré sont :

a. $6x^2 - 2x + 7$ (coefficients : $a = 6$; $b = -2$; $c = 7$);

c. $3x^2 - 2x$ (coefficients : $a = 3$; $b = -2$; $c = 0$);

d. $\dfrac{x^2 + 7x - 2}{3}$ (coefficients : $a = \dfrac{1}{3}$; $b = \dfrac{7}{3}$; $c = -\dfrac{2}{3}$).

2 Les trinômes du second degré sont :

b. $2\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 - 5 = 2x^2 - \dfrac{8}{3}x - \dfrac{37}{9}$

(coefficients : $a = 2$; $b = -\dfrac{8}{3}$; $c = -\dfrac{37}{9}$);

c. $x(x+1)(x+2) - x^3 = 3x^2 + 2x$ (coefficients : $a = 3$; $b = 2$; $c = 0$).

3 Le seul trinôme du second degré est :

b. $x^2 - x\sqrt{5} - 3$ (coefficients : $a = 1$; $b = \sqrt{5}$; $c = -3$).

4 **1.**

$(x+3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (3a + b)x^2 + (3b + c)x + 3c$.

2. Les réels $a = 3$, $b = -13$ et $c = 14$ conviennent.

5 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 342.

6 **a.** $(x-3)^2$; **b.** $2\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8}$;

c. $-3\left(x - \dfrac{1}{6}\right)^2 + \dfrac{1}{12}$; **d.** $2\left(x - \sqrt{2}\right)^2 - 11$.

7 $f(x) = -(x-2)^2 = -x^2 + 4x - 4$; $g(x) = 2(x+3)^2 - 2 = 2x^2 + 12x + 16$; $h(x) = -\dfrac{1}{4}(x-4)^2 + 4 = \dfrac{1}{4}x^2 + 2x$.

8 **a.** Le trinôme f défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6.$$

b. Le trinôme g défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$$

9 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 342.

10 **1.** $f(x) = -\dfrac{1}{16000}x^2 + x$

2. $f(x) = \dfrac{1}{16000}x\left(16000 - x\right)$ (forme factorisée)

et $f(x) = -\dfrac{1}{16000}\left(x - 8000\right)^2 + 4000$ (forme canonique).

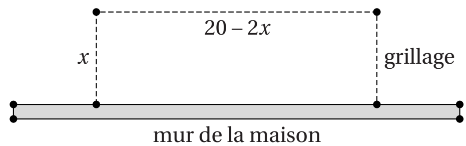
3. La hauteur maximale atteinte par le projectile est 4000 m.

4. Le projectile retombe sur le sol à 16000 m du canon.

11 En appelant x la longueur d'un segment de grillage touchant le mur, et $f(x)$ l'aire du rectangle délimité par le mur et le grillage, on obtient :

$f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2 = -(x-10)^2 + 100$.

La fonction f atteint son maximum lorsque x vaut 10 : l'aire maximale est 100m².



12 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 342

13 **1.** **a.** Forme A : $g(x) = x^2 - 5x + 7$

b. Forme B : $g(x) = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$. On ne peut pas factoriser $g(x)$.

2. **a.** $g(0) = 7$ (A) ; $g(3) = 1$ (A) ;

$g(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{6} - 5\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 12$ (A).

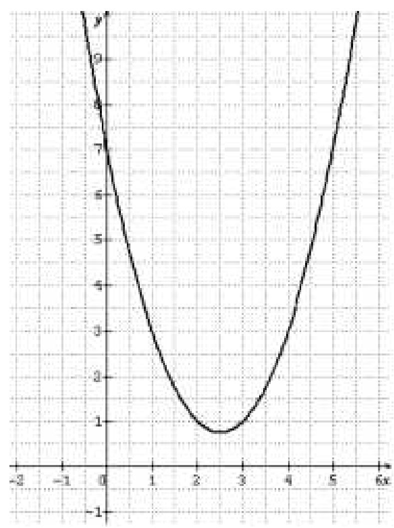
b. Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{3}{4}$ (B) .

c. L'équation $g(x) = 0$ est équivalente à :

$\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = 0$. Elle n'a donc pas de solution.

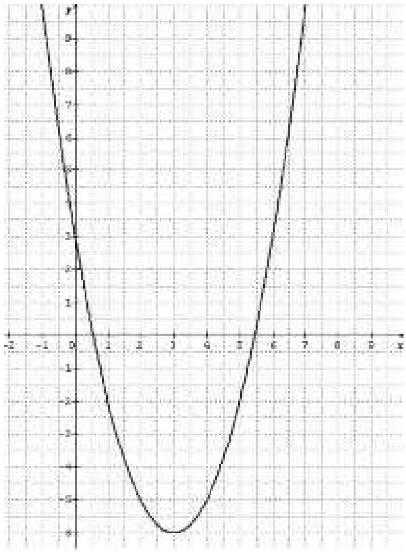
d. Pour tout réel x, $g(x) \geqslant 0$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \geqslant 0$ est $\mathbb{R}$.

e.

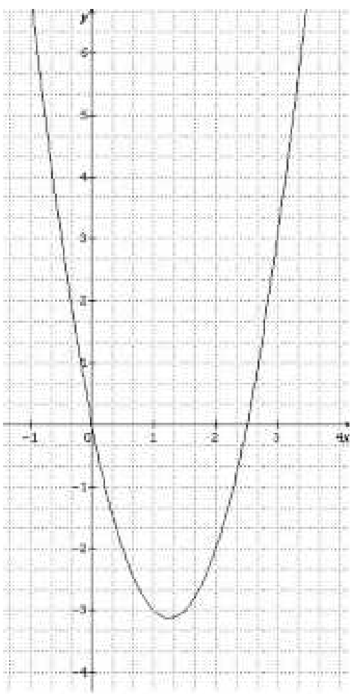


14 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 342.

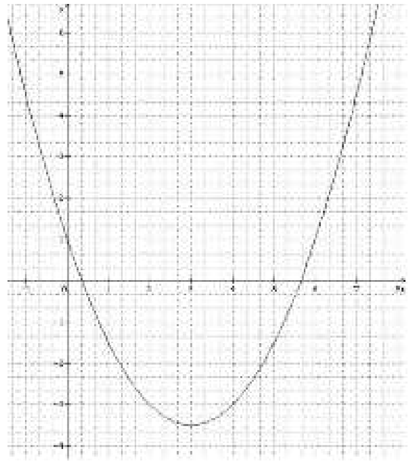
15 **a.** Courbe représentative de f :



b. Courbe représentative de g :



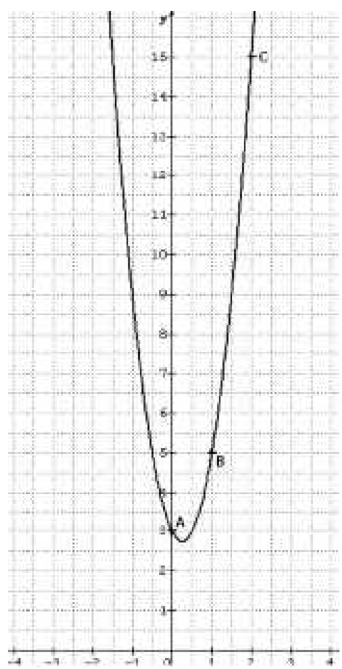
c. Courbe représentative de h :



16 **a.** La parabole $\mathscr{P}$ a pour équation : $y = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c réels ($a \neq 0$). L'appartenance des points A, B et C à la parabole $\mathscr{P}$ se traduit par le système (S) $\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 15 \end{cases}$.

b. (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b = 2 \\ 2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$. L'unique solution du système (S) est $(4 ; -2 ; 3)$.

c. La parabole $\mathscr{P}$ a pour équation $y = 4x^2 - 2x + 3$. Voici sa représentation.



17 **a.** La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation :
$y = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c réels ($a \neq 0$).On obtient le système :

$$(S)\ \begin{cases} a+b+c=-\dfrac{3}{2} \\ 4a+2b+c=-6 \\ 9a+3b+c=-\dfrac{25}{2} \end{cases}$$

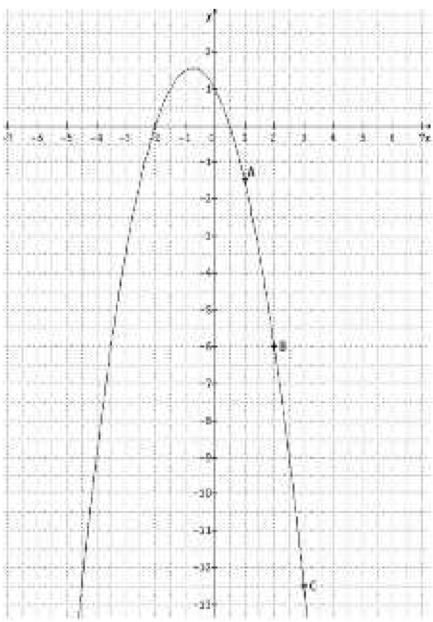
b. $$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-\dfrac{3}{2} \\ 3a+b=-\dfrac{9}{2} \\ 8a+2b=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-\dfrac{3}{2} \\ 3a+b=-\dfrac{9}{2} \\ 2a=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-\dfrac{3}{2} \\ a=-1 \end{cases}.$$

L'unique solution du système (S) est $\left(-1\,;-\dfrac{3}{2}\,;1\right)$.

c. La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = -x^2 - \dfrac{3}{2}x + 1$.

Voici sa représentation.



18 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 342.

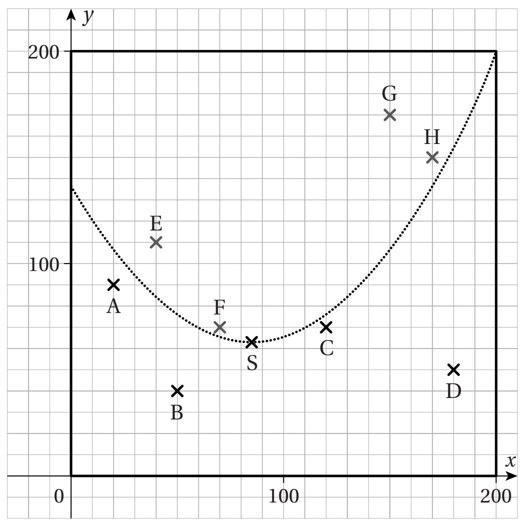
19 **a.** $g(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$
et $h(x) = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1$.
b. Le minimum de la fonction g est 1 or, pour tout réel x, on a $g(x) \leqslant f(x)$ donc, pour tout réel x, on a :
$$f(x) \geqslant 1.$$
De plus : $g(1) = h(1) = 1$. On en déduit : $f(1) = 1$.

c. « Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1 ; il est atteint en 1.
Ainsi $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$f(x) = a(x-1)^2 + 1$, où a est une constante réelle strictement positive.

d. $f(11) = 181 \Leftrightarrow 100a + 1 = 181 \Leftrightarrow a = \dfrac{9}{5}$ (= 1,8).

Ainsi, on a :
pour tout réel x,
$$f(x) = \frac{9x^2 - 18x + 14}{5} = 1{,}8x^2 - 3{,}6x + 2{,}8\,.$$

20 L'idée est de chercher une parabole représentant un trinôme du second degré satisfaisant aux conditions de l'énoncé. En choisissant par exemple le sommet S de coordonnées (84 ; 63), on obtient une solution avec l'expression $f(x) = 0{,}01(x-84)^2 + 63 = 0{,}01 \times (x-84) \times (x-84) + 63$.



21 **a.** En choisissant un repère adapté d'origine le milieu du tablier, l'équation de la parabole $\mathcal{P}$ est de la forme $y = ax^2$. Comme $f = \dfrac{L}{9} = 40$, le point A de coordonnées (180 ; 40) appartient à la parabole. On en déduit : $a = \dfrac{40}{180^2} = \dfrac{1}{810}$. Une équation de $\mathcal{P}$ est donc : $y = \dfrac{x^2}{810}$.

b. Le programme permet d'obtenir une valeur approchée de la longueur du câble supérieur du pont. On subdivise l'intervalle $[-180\,;\,180]$ en n intervalles, et sur chacun de ces intervalles, on approche la longueur de la parabole par celle du segment de mêmes extrémités.

c. Voici un programme en langage Python donnant une valeur approchée de la longueur des suspentes.

```
def f(x):
    return 1/810.0*x**2
def lgueursustentes ():
   longueur=0.0
   pas=20
   x1=-180
   while x1<=180 :
     longueur=longueur+f(x1)
     x1=x1+pas
   return longueur
```

(La valeur exacte de la somme des longueurs des suspentes est $\frac{7600}{27}$ m ; une valeur approchée en est 281,48 m.)

22 **a.** L'équation $x^2 + 5x - 6 = 0$ a pour solutions -6 et 1 ($\Delta = 49 > 0$).
b. L'équation $x^2 + x + 2 = 0$ n'a pas de solution ($\Delta = -7 < 0$).
c. L'équation $-2x^2 + 3x + 4 = 0$ a pour solutions $-\frac{1}{4}\left(-3+\sqrt{41}\right)$ et $-\frac{1}{4}\left(-3-\sqrt{41}\right)$ ($\Delta = 41 > 0$).
d. L'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$ a pour solution : $\frac{3}{2}$ ($\Delta = 0$).

23 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 342.

24 Les racines des trinômes sont :
a. $\frac{2}{3}$ et $\frac{9}{4}$; **b.** 5 ; **c.** -2 et 4;
d. Pas de racines réelles.

25 **a.** L'équation $2x^2 - 2x\sqrt{5} + 3 = 0$ n'a pas de solution.
b. L'équation $3x^2 + 2x\sqrt{6} - 1 = 0$ a deux solutions : $\frac{-3-\sqrt{6}}{3}$ et $\frac{3-\sqrt{6}}{3}$.
c. L'équation $4x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = 0$ n'a pas de solution.
d. L'équation $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$ a deux solutions : $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

26 **a.** Le discriminant du trinôme est :
$\Delta = (2\sqrt{5} - 1)^2 + 8\sqrt{5} = 21 + 4\sqrt{5}$. Les solutions de l'équation (E) sont donc $x_1 = \frac{-1+2\sqrt{5}+\sqrt{21+4\sqrt{5}}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1+2\sqrt{5}-\sqrt{21+4\sqrt{5}}}{4}$.
b. $(1 + 2\sqrt{5})^2 = 1 + 4\sqrt{5} + 20 = 21 + 4\sqrt{5}$.
On en déduit : $x_1 = \frac{-1+2\sqrt{5}+1+2\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$
et $x_2 = \frac{-1+2\sqrt{5}-\left(1+2\sqrt{5}\right)}{4} = -\frac{1}{2}$.

27 **a.** L'équation $x^2 - 6x + 8 = 0$ a pour solutions 2 et 4. La parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en A(2 ; 0) et B(4 ; 0).
L'équation $\frac{1}{3}(-x^2 + 2x + 8) = 0$ a pour solutions 4 et -2. La parabole $\mathcal{P}$' coupe l'axe des abscisses en B et C(-2 ; 0).
b. $x^2 - 6x + 8 = \frac{1}{3}(-x^2 + 2x + 8) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$. Les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$' se coupent en B et D(1 ; 3).

28 **a.** La parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en $A\left(\frac{-4-\sqrt{6}}{2}\ ;0\right)$ et $B\left(\frac{-4+\sqrt{6}}{2}\ ;0\right)$.
La parabole $\mathcal{P}$' « coupe » l'axe des abscisses en $C\left(-\frac{1}{2}\ ;0\right)$.
b. $-2x^2 - 8x - 5 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$. Les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$' se coupent en D(-1 ; 1).

29 **a.** La parabole $\mathcal{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
La parabole $\mathcal{P}$' coupe l'axe des abscisses en $A\left(\frac{9-\sqrt{3}}{2}\ ;0\right)$ et $B\left(\frac{9+\sqrt{3}}{2}\ ;0\right)$.
b. $x^2 - 6x + 10 = -2x^2 + 18x - 39 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 49 = 0$.
Cette équation n'a pas de solution. Les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$' n'ont pas de point d'intersection.

30 Les ensembles de solutions sont :
a. $\left\{-14\ ;\frac{5}{3}\right\}$; **b.** $\{-2\ ;2\}$; **c.** $\{-7\ ;6\}$;
d. $\left\{-3\ ;\frac{2}{7}\right\}$; **e.** $\left\{\frac{-3-\sqrt{15}}{2}\ ;\frac{-3+\sqrt{15}}{2}\right\}$;
f. $\left\{0\ ;\frac{5-\sqrt{13}}{2}\ ;\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$.
g. $\left\{\frac{3}{2}\ ;\frac{17}{5}\right\}$; **h.** $\left\{\frac{5}{4}\ ;8\right\}$.

31 Le trinôme $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3)$ a une racine double si et seulement si son discriminant Δ est nul.
$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(3m + 1)^2 - 4(m + 3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (3m + 1 - (m + 3))\ (3m + 1 + (m + 3)) = 0$
$\Leftrightarrow (2m - 2)(4m + 4) = 0$.
Les valeurs de m cherchées sont donc -1 et 1.
Pour $m = -1$, la racine double est 1 ; pour $m = 1$, la racine double est -1.

32 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 342.

33 Si $m = -\frac{1}{4}$, l'équation n'admet qu'une solution.

Si $m \neq -\dfrac{1}{4}$, l'équation $(4m + 1)x^2 - 4mx + m - 3 = 0$ admet des solutions distinctes si et seulement si son discriminant Δ est strictement positif.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-4m)^2 - 4(m-3)(4m+1) > 0$

$\Leftrightarrow 44m + 12 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{11}$.

Les valeurs de m cherchées sont donc les réels de $\left]-\dfrac{3}{11};-\dfrac{1}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$.

34 **a.** Le réel 3 est solution de l'équation si et seulement si $2 \times 3^2 - 3(m+2) + m - 2 = 0$, c'est–à–dire $m = 5$.

b. L'équation $2x^2 - 7x + 3 = 0$ équivaut à : $(x-3)(2x-1) = 0$. La seconde solution est donc $\dfrac{1}{2}$.

35 Le réel a est strictement positif si la parabole est « tournée vers le haut », et strictement négatif si elle est « tournée vers la bas ».

Le réel c est l'image de 0 par la fonction f.

Le sommet de la parabole a pour abscisse $\dfrac{-b}{2a}$. Si son abscisse est strictement positive alors b et a sont de signes contraires ; si son abscisse est strictement négative alors b et a sont de même signe.

Signe de …	a	c	b
a.	–	–	0
b.	–	–	–
c.	+	+	+
d.	+	–	+
e.	–	–	+
f.	+	0	+
g.	–	–	+
h.	+	+	–

36 En appelant x un côté de l'angle droit du triangle rectangle isocèle, on obtient l'équation $x^2 + (x+12)^2 = 5^2 \times 2x^2$, c'est–à–dire

$48x^2 - 24x - 144 = 0$, soit $2x^2 - x - 6 = 0$.

Cette équation a deux solutions : $-\dfrac{3}{2}$ et 2. Seule cette dernière est positive. Les dimensions du triangle initial sont donc 2 ; 2 et $2\sqrt{2}$.

37 On résout l'équation $4a + \dfrac{a}{2} + a^2 = 100$,

c'est–à–dire $2a^2 + 9a - 200 = 0$.

Cette équation a deux solutions : $\dfrac{-25}{2}$ et 8. Les valeurs possibles pour a sont $\dfrac{-25}{2}$ et 8.

38 Soit n le plus petit des six entiers consécutifs. On doit résoudre l'équation :

$n(n+1) = 3(n+2+n+3+n+4+n+5)$, c'est–à–dire $n^2 - 11n - 42 = 0$.

Cette équation a deux solutions : -3 et 14. L'entier n étant positif, les six entiers naturels cherchés sont donc 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 et 19.

39 En appelant x le petit côté du premier champ, l'égalité des aires conduit à l'équation $x(350+x) = 200(x+350-225)$, c'est–à–dire :

$x^2 + 150x - 25000 = 0$.

Cette équation a deux solutions : -250 et 100. Les dimensions du premier champ sont donc 100 m et 450 m ; celles du second champ sont 200 m et 225 m.

40 En appelant v la vitesse de l'automobiliste lors de l'aller, on obtient l'équation $\dfrac{150}{v} + \dfrac{150}{v+25} = 5$

c'est–à–dire $\dfrac{2v+25}{v(v+25)} = \dfrac{5}{150}$,

soit $30(2v+25) = v(v+25)$ $(v > 0)$ ou encore :

$v^2 - 35v - 750 = 0$.

Cette équation a deux solutions : -15 et 50.

A l'aller, l'automobiliste roule à 50 km.h^{-1} ; au retour, il roule à 75 km.h^{-1}.

41 **a.** $x + \dfrac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$ et $x \neq 0$.

Les solutions sont $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

b. $\dfrac{4}{x-1} - \dfrac{3}{x-2} = -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{4(x-2) - 3(x-1) + (x-1)(x-2)}{x-1} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ et $x \neq 1$.

Les solutions sont -1 et 3.

c. $\dfrac{2x+m}{x} - \dfrac{2x}{x+m} = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+m)(x+m) - 2x^2 - 2x(x+m)}{x(x+m)} = 0$

$\Leftrightarrow -2x^2 + mx + m^2 = 0$ et $x \neq 0$ et $x \neq -m$.

Si $m = 0$, l'équation n'a pas de solution.

Si $m \neq 0$, l'équation a deux solutions : $-\dfrac{m}{2}$ et m.

42 **a.** $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 2} = \dfrac{x+4}{x+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x^2 - x + 1)(x+2) - (x+4)(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 - 2x + 2)(x+2)} = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0$ et $x \neq -2$.

Les solutions sont 3 et 2.

b. $\dfrac{1}{x^2 - 9} + \dfrac{14}{x-3} = -3 \Leftrightarrow \dfrac{1 + 14(x+3) + 3(x^2 - 9)}{x^2 - 9} = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 14x + 16 = 0$ et $x \neq 3$ et $x \neq -3$.

Les solutions sont $-\dfrac{8}{3}$ et -2.

43 **a.** $X^2 - 16X + 39 = 0$ a pour solutions 3 et 13, donc $x^4 - 16x^2 + 39 = 0$ a pour solutions $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{13}$ et $\sqrt{13}$.

b. $3X^2 - 4X - 4 = 0$ a pour solutions $-\dfrac{2}{3}$ et 2, donc $3x^4 - 4x^2 - 4 = 0$ a pour solutions $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

c. $16X^2 - 24X + 9 = 0$ a pour solution $\dfrac{3}{4}$, donc $16x^4 - 24x^2 + 9 = 0$ a pour solutions $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

44 **a.** On pose $X = \cos x$. L'équation $2X^2 - 7X + 3 = 0$ a deux solutions : $\dfrac{1}{2}$ et 3. Ainsi, l'équation $2(\cos x)^2 - 7\cos x + 3 = 0$ équivaut à $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Si on considère des angles géométriques, on obtient $x = 60°$; sinon, on obtient, en radians, $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b. On pose $X = \dfrac{1}{x-2}$. L'équation $6X^2 - 11X - 7 = 0$ a deux solutions : $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{7}{3}$. Ainsi, l'équation $\dfrac{6}{(x-2)^2} - \dfrac{11}{x-2} - 7 = 0$ équivaut à $\left(\dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{2}\right.$ ou $\left.\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{7}{3}\right)$, c'est–à–dire $x = 0$ ou $x = \dfrac{17}{7}$.

c. On pose $X = \sqrt{x}$. L'équation $5X^2 + 7X - 6 = 0$ a deux solutions : -2 et $\dfrac{3}{5}$. Ainsi, l'équation $5x + 7\sqrt{x} - 6 = 0$ a pour unique solution $\dfrac{9}{25}$.

45 **a.** Le réel x est non nul. Ainsi :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{70}{x} = 3 \\ y = -\dfrac{70}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 70}{x} = 0 \\ y = -\dfrac{70}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \text{ ou } x = 10 \\ y = -\dfrac{70}{x} \end{cases}.$$

Les solutions du système sont les couples $(-7 ; 10)$ et $(10 ; -7)$.

b. La solution du système est le couple $(6 ; 6)$.

c. Le système n'a pas de solution.

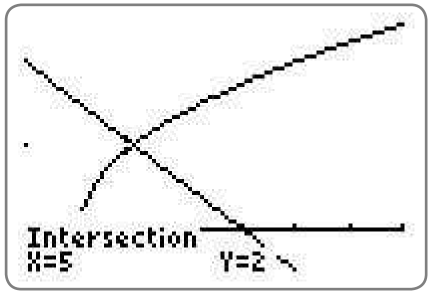
d. Les solutions du système sont les couples $(83 ; 43)$ et $(43 ; 83)$.

46 On nomme x et y la largeur et la longueur du champ, en mètres. On obtient le système d'équations :

(S) $\begin{cases} 2(x + y) = 338 \\ xy = 6328 \end{cases}$. On trouve $x = 56$ et $y = 113$.

Le champ est un rectangle de dimensions 56 m et 113 m.

47 **a.**



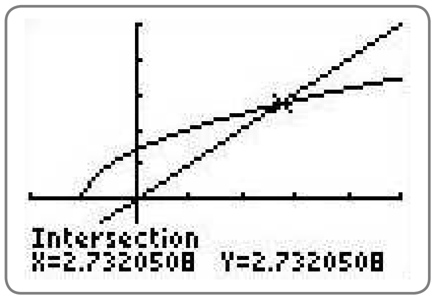
b. Graphiquement, l'unique solution de l'équation $7 - x = 2\sqrt{x-4}$ est $x_0 \approx 2{,}73$.

c. $7 - x = 2\sqrt{x-4} \Rightarrow (7 - x)^2 = (2\sqrt{x-4})^2$
$\Rightarrow x^2 - 18x + 65 = 0$.

Cette dernière équation a deux solutions : 5 et 13. Seul 5 vérifie $7 - x = 2\sqrt{x-4}$.

L'unique solution est donc 5.

48 **a.**



b. Graphiquement, l'unique solution de l'équation $x = \sqrt{2x+2}$ est $x_0 \approx 5$.

c. $x = \sqrt{2x+2} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{2x+2})^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$.

Cette dernière équation a deux solutions : $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$. Seul $1 + \sqrt{3}$ vérifie $x = \sqrt{2x+2}$.

L'unique solution est donc $1 + \sqrt{3}$.

49 $x + \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$. Cette équation a deux solutions : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Seule la première vérifie $x + \sqrt{x+1} = 0$.

Pour $x \neq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{x - \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x+1}} = \dfrac{11}{5}$

$\Leftrightarrow 5\left(x - \sqrt{x+1}\right) = 11\left(x + \sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow -3x = 8\sqrt{x+1}$.

Or $-3x = 8\sqrt{x+1} \Rightarrow 9x^2 - 64x - 64 = 0$. Cette équation a deux solutions : $-\dfrac{8}{9}$ et 8. Seule la seconde vérifie $-3x = 8\sqrt{x+1}$.

L'unique solution de l'équation $\dfrac{x - \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x+1}} = \dfrac{11}{5}$ est $-\dfrac{8}{9}$.

50 **a.** $2x^2 - 10x + 12 = 2(x-3)(x-2)$
b. $3x^2 + 7x + 2 = (x+2)(3x+1)$
c. $4x^2 + 4x - 8 = 4(x-1)(x+2)$
d. $3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 = (1 - x\sqrt{3})^2$

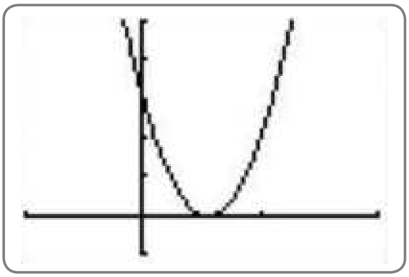
51 **a.** $25x^2 - 70x + 49 = (5x-7)^2$
b. Pas de factorisation.
c. $x^2 - x - 1 = \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$
d. $x^2 + \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x + \sqrt{6} = \left(x+\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$

52 $f(x) = x(x-1)(x-2)$

53 **a.**
$(x+2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (2a+b)x^2 + (2b+c)x + 2c$.
b. $a = 4$, $b = 1$ et $c = -18$ conviennent.
c. $f(x) = (x+2)(4x^2+x-18) = (x+2)(x-2)(4x+9)$.

54 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 342.

55 **a.**



b. La fonction f semble positive sur $\mathbb{R}$.
c. Le discriminant du trinôme est :
$\Delta = (-11)^2 - 4 \times 10 \times 3 = 1 > 0$.
Le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes, ce qui contredit la conjecture faite à la question **b.**
d. Les racines du trinôme sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{5}$. On obtient le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

56 **a.**

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-2x^2+8x-6$		−	0	+	0	+	

b.

x	$-\infty$		$\frac{7}{12}$		$+\infty$
$\frac{8}{49}x^2 - \frac{4}{21}x + \frac{1}{18}$		+	0	+	

c.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2+3x-5$		−	

d.

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{17}}{4}$		$\frac{5+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$2x^2-5x+1$		+	0	−	0	+	

57 **a.**

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		2		$+\infty$
$(5x-3)(2-x)$		−	0	+	0	−	

b.
$(x+1)^2 - 4(x+2)^2 = ((x+1) - 2(x+2))\,((x+1) + 2(x+2))$
$= (-x-3)(3x+5)$.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$(x+1)^2 - 4(x+2)^2$		−	0	+	0	−	

c. $(2x+1)(x-3) - (6x^2+3x) = (2x+1)(x-3-3x)$
$= (2x+1)(-2x-3)$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(2x+1)(x-3) - (6x^2+3x)$		−	0	+	0	−	

d.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-(x+2)^2-3$		−	

58 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 342.

59 Les ensembles de solutions sont :
a. $\left]-\infty\,;-\frac{7}{2}\right[\cup \left]\frac{8}{3}\,;+\infty\right[$ **b.** $[-\infty\,;-3] \cup \left]-\frac{5}{3}\,;0\right[$
c. $\left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

60 Les ensembles de solutions sont :

a. $]-\infty\,;-2] \cup [1\,;2] \cup [3\,;+\infty[$

b. $]-\infty\,;-3[\cup \left]\frac{1}{4}\,;2\right[\cup]5\,;+\infty[$

c. $\left]-\infty\,;-\frac{2}{7}\right] \cup \left]\frac{3}{2}\,;\frac{17}{5}\right[\cup [5\,;+\infty[$

61 Les ensembles de solutions sont :

a. $]-\infty\,;-4]\cup\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$

b. $]-3\,;0[\cup]1\,;3[\cup]9\,;+\infty[$

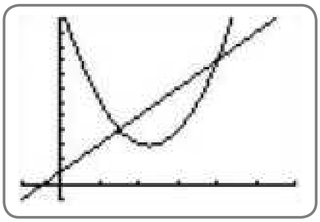
c. $\left]-7\,;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{22}{29}\,;1\right[\cup]5\,;+\infty[$

62 **a.** Pour tout réel x,
$2x^2 - 9x + 13 - (2x + 1) = 2x^2 - 11x + 12$.

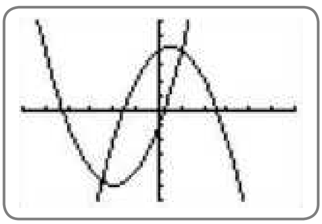
Ce trinôme a pour racines $\dfrac{3}{2}$ et 4. Il est positif sur $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right]$ et sur $[4\,;+\infty[$. Sur ces intervalles, la parabole $\mathscr{P}$ est au–dessus de la droite d.

Sur $\left]\dfrac{3}{2}\,;4\right]$, $\mathscr{P}$ est au–dessous de d.

b.



63 **a.**



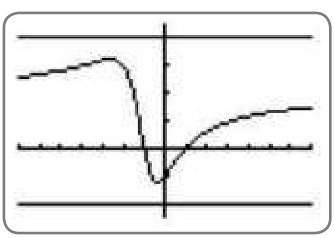
b. et c.

Pour tout réel x, $x^2 + 4x - 1 - (-x^2 + x + 4) = 2x^2 + 3x - 5$.

Ce trinôme a pour racines $-\dfrac{5}{2}$ et 1. Il est positif sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}\right]$ et sur $[1\,;+\infty\,[$. Sur ces intervalles, la parabole $\mathscr{P}$ est au–dessus de la parabole $\mathscr{P}$'. Sur $\left[-\dfrac{5}{2}\,;1\right]$, $\mathscr{P}$ est au–dessous de $\mathscr{P}$'.

64 **a.** Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 2$ est strictement négatif ($\Delta = -4$), donc le trinôme ne s'annule pas (il est strictement positif). La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b.



La courbe $\mathscr{C}_f$ semble entièrement comprise entre les droites d'équations $y = -2$ et $y = 4$.

c. Pour tout réel x, $f(x) + 2 = 2\dfrac{2x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$. Le numérateur est un trinôme de discriminant strictement négatif (–4) ; le numérateur est donc strictement positif. On en déduit :
pour tout réel x, $-2 < f(x)$.

Pour tout réel x, $f(x) - 4 = -2\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+2x+2}$.

De même que ci–dessus, on montre :
pour tout réel x, $f(x) < 4$.
Ainsi : pour tout réel x, $-2 < f(x) < 4$.
La conjecture faite à la question **b.** est bien établie.

d. $f\left(\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right) = 1-\sqrt{5}$.

Pour tout réel x,

$$f(x)-\left(1-\sqrt{5}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)x^2+2\left(\sqrt{5}-1\right)x+2\left(\sqrt{5}-2\right)}{x^2+2x+2}.$$

Le trinôme $\left(1+\sqrt{5}\right)x^2+2\left(\sqrt{5}-1\right)x+2\left(\sqrt{5}-2\right)$ a un discriminant nul. On en déduit :

pour tout réel x, $f(x)-\left(1-\sqrt{5}\right)\geqslant 0$.
Le minimum de la fonction f est donc :
$1-\sqrt{5}\approx -1{,}24$. Il est atteint en $\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\approx -0{,}38$.

Raisonnement logique

65 **a.** Faux. Contre–exemple : pour tout réel x, $f(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \leqslant 0$ et $\Delta = 0$.
b. Vrai. Si $\Delta \geqslant 0$, le trinôme f admet au moins une racine, donc f ne peut être strictement inférieur à 0 sur $\mathbb{R}$.
c. Faux. Contre–exemple : pour tout réel x, $f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geqslant 0$ et $\Delta = -4 < 0$.
d. Vrai. On peut prouver (*cf. exercice 70*) que b est le produit de $-a$ par la somme des racines (ici 0).
e. Vrai. $f(1) = a + b + c$.
f. Faux. Contre–exemple :
soit $f : x \to x^2 + x + 2$. $f(-1) = 2 \neq 0$.
g. Vrai. $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + 0 = 0$.
h. Vrai. On peut procéder par disjonction de cas ($a < 0$ puis $a > 0$) en utilisant le tableau récapitulatif du cours. On peut aussi écrire : il existe un réel α tel que $af(\alpha)$ est strictement négatif, c'est–à–dire :
$(a\alpha)^2 + ab\alpha + ac < 0$. On en déduit :
$\Delta = b^2 - 4ac > b^2 + 4(a\alpha)^2 + 4ab\alpha = (2a\alpha + b)^2 \geqslant 0$. Le trinôme f a deux racines distinctes.

66 **a.** Faux. Contre–exemple : $x \to x^2 + 1$
et $x \to -x^2 + 2x$.

b. Faux. Evident si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées. Si l'équation de la droite est de la forme $y = mx + p$, alors x est solution de l'équation $ax^2 + (b - m)x + (c - p) = 0$ qui admet au plus deux solutions.

c. Vrai. On a : $x^4 - (m+1)x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$ ou $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -\sqrt{m}$ ou $x = \sqrt{m}$ ou $x = -1$ ou $x = 1$ (car $m \geqslant 0$). Les réels -1 ; 1 ; $-\sqrt{m}$ et $\sqrt{m}$ sont tous distincts car $m > 1$.

67 **1. a.** (P_2) : « Si $\Delta \leqslant 0$, alors, pour tous réels x_1 et x_2, on a : $f(x_1)f(x_2) \geqslant 0$. »

b. D'après le cours, si Δ est négatif, le signe du trinôme f est constant. On a bien : pour tous réels x_1 et x_2, $f(x_1)f(x_2) \geqslant 0$. La proposition (P_2) est vraie.

c. Sa contraposée étant vraie, la proposition (P_1) est vraie.

2. a. (P_3) : « Si $\Delta > 0$, alors il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1)f(x_2) < 0$.

b. La proposition (P_3) est vraie. Le tableau de signe du trinôme dans le cas où $\Delta > 0$ le prouve.

68 1. Soit Δ le discriminant du trinôme f. On a : $\Delta = b^2 - 4ac > b^2 \geqslant 0$. La proposition (P_1) est vraie.

2. a. (P_2) : « Si l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas deux solutions distinctes, alors $ac \geqslant 0$.»

b. (P_2) est la contraposée d'une proposition vraie, donc elle est vraie.

3. a. (P_3) : « Si l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes, alors $ac < 0$.»

b. La proposition (P_3) est fausse. Contre–exemple : $f : x \rightarrow x^2 - 3x + 2$ a deux racines (1 et 2) et $ac > 0$.

69 **a.** D'après le cours, un polynôme de degré 2 admet au plus deux racines, donc f ne peut pas être un polynôme de degré 2.

b. Si g est une fonction polynôme de degré 2, alors $f : x \rightarrow g(x) - 3$ l'est aussi. On a alors :
$f(1) = f(4) = f(5) = 0$ ce qui est impossible d'après la question **a.** La fonction g ne peut pas être un polynôme de degré 2.

Restitution des connaissances

70 **1.** Pour tout réel x,

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$
$$= ax^2 - aSx + aP = ax^2 + bx + c.$$

On montre, en considérant $f(0)$ et $f(1)$ par exemple, que $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$.

2. a. On utilise l'égalité $x_2 = \dfrac{c}{ax_1}$.

i) $x_2 = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.

ii) $x_2 = \dfrac{6}{(-21)} = -\dfrac{2}{7}$.

iii) $x_2 = \dfrac{2}{(-2m)} = -\dfrac{1}{m}$.

b. **i)** $x_1 = 1$ donc $x_2 = -\dfrac{13}{2}$.

ii) $x_1 = -2$ donc $x_2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

iii) $x_1 = -1$ donc $x_2 = \dfrac{-\sqrt{5}}{-1} = \sqrt{5}$.

Se tester sur...

QCM : Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 342.

Prêt pour le contrôle ?

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 342

Problèmes

86 **a.** Le format du rectangle ABCD est $\dfrac{L}{\ell}$. Le format du rectangle EBCF est $\dfrac{\ell}{L - \ell}$. Ainsi, si ABCD est un rectangle d'or alors on a l'égalité $\dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\ell}{L - \ell}$.

On en déduit $L(L - \ell) = \ell^2$ puis $\dfrac{L}{\ell}\left(\dfrac{L}{\ell} - 1\right) = 1$ c'est–à–dire $\Phi^2 - \Phi = 1$. On a bien : $\Phi^2 = \Phi + 1$.

b. Les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ sont $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Seule la seconde est positive. On en déduit : $\Phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ($\approx 1{,}618$).

87 **1** et **2.** Construction sur *GeoGebra*.

3. La droite d_m et la parabole $\mathcal{P}$ ont :

a. deux points d'intersection pour $m > 2$;

b. exactement un point d'intersection (le point E de coordonnées $(-2\,;-2)$) pour $m = 2$;

c. aucun point d'intersection pour $m < 2$.

4. Les abscisses des points d'intersection de la droite d_m et de la parabole $\mathcal{P}$ sont les solutions de l'équation $x^2 + 6x + 6 = 2x + m$, c'est–à–dire :
$x^2 + 4x + (6 - m) = 0$. Le discriminant de cette dernière est $\Delta = 4(m - 2)$. L'étude du signe de Δ redonne les résultats trouvés à la question **3.**

5. a. Le point C semble se déplacer sur la droite passant par E, parallèle à l'axe des ordonnées.

b. Le point C est défini lorsque $m > 2$. Les solutions de l'équation $x^2 + 4x + (6 - m) = 0$ sont alors
$\dfrac{-4 - 2\sqrt{m - 2}}{2} = -2 - \sqrt{m - 2}$ et $-2 + \sqrt{m - 2}$. On a :
$A(-2 - \sqrt{m - 2}\ ;\ 2(-2 - \sqrt{m - 2}) + m)$
et $B(-2 + \sqrt{m - 2}\ ;\ 2(-2 + \sqrt{m - 2}) + m)$.
On en déduit : $C(-2\,;\, m - 4)$. De plus, $m > 2$ équivaut

à $m-4>-2$. Lorsque m décrit l'intervalle $]2\,;+\infty[$, le point C décrit la demi–droite d'origine E, définie par $x=-2$ et $y>-2$ (E est exclu).

88 ***Traduction***

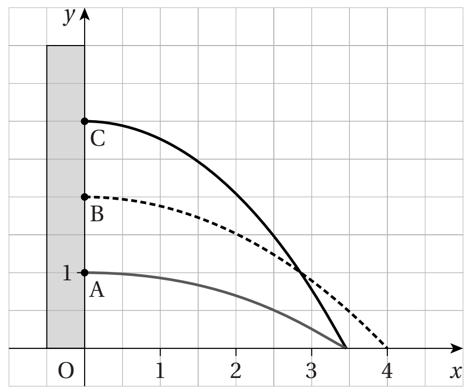
Lors d'une partie de golf on peut assimiler la trajectoire en l'air de la balle à une parabole. La figure suivante représente une telle parabole.
(sur l'axe des x : distance depuis le départ de la balle (en mètres) ; sur l'axe des y : hauteur (en mètres))
a. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ? A quelle distance du départ atteint–elle à nouveau le sol ?
b. Une des équations suivantes est celle de la parabole représentée :
[A] $y=-0{,}008x^2+45$ [B] $y=-0{,}008x^2+1{,}2x$
[C] $y=0{,}008x^2-1{,}2x$.
Quels sont les critères permettant d'éliminer les deux équations qui ne décrivent pas la parabole ?
c. Une autre trajectoire est donnée par l'équation $y=x(0{,}6-0{,}005x)$. Répondre à chacune des questions suivantes en justifiant la réponse.
• À quelle distance du point de départ la balle atterrit–elle ?
• À quelle hauteur se situe la balle lorsqu'elle passe à la verticale du poteau des 50 m ?
• À la verticale de quel poteau passe–t–elle lorsqu'elle atteint la seconde fois cette hauteur ?

a. Par lecture graphique, on trouve que la hauteur maximale atteinte par la balle est 45 m ; elle atterrit à 150 m du point de départ.
b. L'origine O du repère est sur la trajectoire (c'est le point de départ), mais ses coordonnées (0 ; 0) ne vérifient pas la première équation : on peut exclure [A].
La parabole étant « tournée vers le bas », on sait que le coefficient de x^2 est négatif : on peut exclure l'équation [C].
c. Les réponses aux trois questions sont les suivantes.
• La balle atteint le sol lorsque y vaut 0. On résout l'équation $x(0{,}6-0{,}005x)=0$, qui équivaut à $x=0$ ou $x=\dfrac{0{,}6}{0{,}005}=120$. La première valeur correspond au point de départ de la balle. On en déduit qu'elle atterrit à 120 m de ce point.
Quand x vaut 50, on a : $y=50(0{,}6-0{,}005\times 50)=17{,}5$.
• La balle est à 17,5 m d'altitude lorsqu'elle passe à la verticale du poteau des 50 m.
• Par symétrie de la parabole, on sait que la balle repassera à l'altitude 17,5 m lorsqu'elle aura parcouru 120 – 50 mètres. Elle passe alors au–dessus du poteau marqué 70 m.

89 Le point T(x ; 0) appartient au cercle de diamètre [RS] si et seulement si $TR^2+TS^2=RS^2$, c'est–à–dire $x^2+1+(a-x)^2+b^2=a^2+(b-1)^2$, c'est–à–dire $2(x^2-ax+b)=0$. On retrouve bien le résultat demandé.

90 **a.** La trajectoire théorique des premières gouttes est donnée par $y=h-\dfrac{x^2}{4H}$.

b.



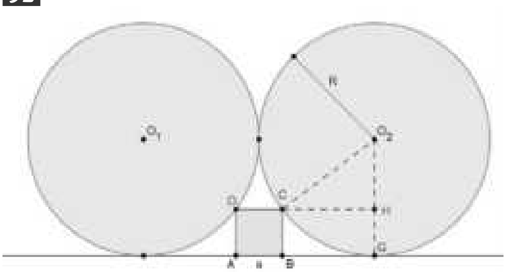
c. Les gouttes sortant des trous du haut et du bas tombent au sol au même endroit. Celles qui sortent du trou central tombent un peu plus loin de la colonne. On le vérifie par le calcul :
$x_1=x_3=\sqrt{4\times1\times3}=2\sqrt{3}\approx 3{,}46$
et $x_2=\sqrt{4\times2\times2}=4$.

91 Le point O est le centre de gravité du triangle ABC, donc $OD=\dfrac{R}{2}$.
[DH] est une hauteur du triangle équilatéral DEF de côté a, donc $DH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Le triangle OEH est rectangle en H, donc on a :
$OE^2=EH^2+HO^2$, c'est–à–dire

$$R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{R}{2}\right)^2.$$

On résout ainsi l'équation du second degré, d'inconnue a : $a^2+a\dfrac{R\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3R^2}{4}=0$.
La seule solution positive est : $a=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}R$. Pour $R=50$, on trouve, à 10^{-2} près : $a\approx 26{,}76$.

92



Le triangle CHO_2 est rectangle. On a donc :
$(CO_2)^2 = CH^2 + (HO_2)^2$, c'est–à–dire
$R^2 = (R - \frac{a}{2})^2 + (R - a)^2$.
On résout ainsi l'équation du second degré, d'inconnue a : $\frac{5a^2}{4} - 3aR + R^2 = 0$. Elle admet deux solutions : $\frac{2R}{5}$ et $2R$. Seule la première est valable dans le cas présent.
On a donc : $a = \frac{2}{5}R$.

93 On résout : $P + \frac{P}{100}P = 459$, c'est–à–dire :
$P^2 + 100P - 45900 = 0$.
Cette équation a deux solutions : –270 et 170. On en déduit $P = 170$.

94 Soit x le prix de vente, en centimes, d'un exemplaire du journal. On modélise la situation pour obtenir le nombre d'exemplaires vendus : $600 - 40\frac{x-100}{5}$.
En appelant $b(x)$ le bénéfice réalisé, on a :
$b(x) = (x-45)\left(600 - 40\frac{x-100}{5}\right) = 8(x-45)(175-x)$.
Le bénéfice maximal est réalisé pour
$x = \frac{175+45}{2} = 110$ (soit un prix de vente de 1,10 euro).
Le maximum de b est alors $8 \times 65 \times 65 = 33800$ (soit un bénéfice maximal de 338 euros).

95 **a.** Soit n le deuxième des nombres cherchés. On résout :
$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 + (n+3)^2$, c'est–à–dire $n^2 - 10n - 11 = 0$.
Cette équation a deux solutions : 11 et –1.
Les deux suites vérifiant la propriété sont :
10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 et –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2.
b. $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365 = 13^2 + 14^2$
donc $\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = 2$.

96 Soit a, b les longueurs des côtés de l'angle droit du triangle, et c la longueur de son hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore, on a : $a^2 + b^2 = c^2$.
Et l'énoncé donne : $a^2 + b^2 + c^2 = 338$.
On en déduit : $a^2 + b^2 = c^2 = 169$, d'où $c = 13$.
De l'énoncé, on tire : $a + b = 30 - c = 17$, d'où $b = 17 - a$.
On a donc : $a^2 + (17 - a)^2 = 169$, c'est–à–dire $a^2 - 17a + 60 = 0$.
Cette équation a deux solutions : 12 et 5.
Les trois côtés du triangle mesurent 5 ; 12 et 13.

97 ***Traduction***

Deux dindes
« Ensemble, ces deux dindes pèsent 20 livres », dit le boucher. « La petite coûte deux *cents* par livre de plus que la grande. »
Mrs. Smith emporte la petite dinde pour 82 *cents* et Mrs. Brown paie 2,96$ pour la grande.
Combien pèse chacune des deux dindes ?

Soit x et y les poids respectifs (en livres) de la petite et de la grande dinde. La mise en équations de l'énoncé donne : $\begin{cases} x + y = 20 \\ \frac{82}{x} = \frac{296}{y} + 2 \end{cases}$ où x et y sont des réels strictement positifs.
En remplaçant y par $20 - x$ dans la seconde équation, on trouve successivement :
$\frac{82}{x} = \frac{296}{20-x} + 2$, $\frac{82}{x} = \frac{296 + 40 - 2x}{20-x}$, $\frac{82}{x} = \frac{336 - 2x}{20-x}$
puis $\frac{41}{x} = \frac{168-x}{20-x}$.
Les produits en croix étant égaux ($x \neq 0$, $x \neq 20$), cette équation équivaut à :
$41(20-x) = x(168-x)$, c'est–à dire $x^2 - 209x + 820 = 0$.
Le discriminant du trinôme $x^2 - 209x + 820$ est $\Delta = 40\ 401 = 201^2$; ses racines sont donc $x_1 = \frac{209-201}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{209+201}{2} = 205$. Cette dernière solution est exclue car la somme des réels positifs x et y vaut 20.
On obtient : $x = 4$ et $y = 20 - 4 = 16$.
La petite dinde pèse 4 livres et la grande pèse 16 livres.

98 En appelant x le nombre initial d'étudiants et y la participation initiale de chacun de ces étudiants (en euros), on obtient :
$\begin{cases} xy = 60 \\ (x-4)(y+2{,}5) = 60 \end{cases}$
c'est–à–dire $\begin{cases} xy = 60 \\ 2{,}5x - 4y - 10 = 0 \end{cases}$ et,

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{8}{5}y+4\right)=60 \\ x=\dfrac{8}{5}y+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y^2+5y-75=0 \\ x=\dfrac{8}{5}y+4 \end{cases}$$

La seule solution positive de $2y^2+5y-75=0$ est 5 (l'autre est $-\dfrac{15}{2}$). On obtient donc : $y = 5$ et $x = 12$.

Il y avait initialement 12 étudiants dans le groupe.

99 On appelle x la hauteur du pavé droit (en centimètres). Sa longueur et sa largeur sont donc $x+3$ et $x-2$. L'aire latérale vaut 180 cm^2, donc on a : $2(x(x+3) + x(x-2) + (x-2)(x+3)) = 180$, c'est–à–dire $3x^2 + 2x - 96 = 0$.
La seule solution positive de cette équation est $\dfrac{16}{3}$ (l'autre est -6).
Les dimensions du pavé droit sont donc : $\dfrac{10}{3}$; $\dfrac{16}{3}$ et $\dfrac{25}{3}$ (en cm).

100 Soit x et y les deux nombres cherchés, avec $x < y$. On obtient :

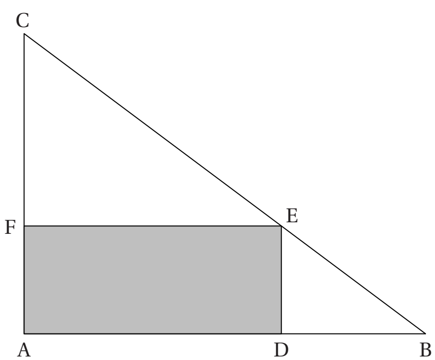
$$\begin{cases} y-x=50 \\ xy-(x+y)=50 \end{cases}$$

c'est–à–dire $\begin{cases} y=50+x \\ x(50+x)-(x+50+x)=50 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=50+x \\ x^2+48x-100=0 \end{cases}$$

L'équation $x^2 + 48x - 100 = 0$ a deux solutions : -50 et 2.
Les couples solutions du problème sont donc : $(-50 ; 0)$ et $(2 ; 52)$.

101



On pose $x = \mathrm{AD}$ et $y = \mathrm{AF}$. On a alors : $\dfrac{y}{6}=\dfrac{8-x}{8}$, puis $y=\dfrac{3}{4}(8-x)$.

L'aire du rectangle ADEF est donnée par :

$a(x) = \dfrac{3}{4}(8x-x^2)$. Elle prend son maximum en 4.

Elle vaut alors 12 cm^2.

102 1. $n^3 + 87n - 287 = n^3 \Leftrightarrow n = \dfrac{287}{87}$.

Lorsque $m = n$, l'équation $n^3 + 87n - 287 = m^3$ n'a pas de solutions entières.
2. L'équation $n^3 + 87n - 287 = (n+1)^3$ a pour solutions 4 et 24.
L'équation $n^3 + 87n - 287 = (n+2)^3$ n'a pas de solutions.
L'équation $n^3 + 87n - 287 = (n-1)^3$ n'a pas de solutions entières (les solutions sont $\dfrac{-42+\sqrt{2622}}{3}$ et $\dfrac{-42-\sqrt{2622}}{3}$.
L'équation $n^3 + 87n - 287 = (n-2)^3$ a pour solution entière 3 (l'autre est $\dfrac{-31}{2}$).

On a donc trouvé les couples d'entiers $(n ; m)$ solutions suivants : $(4 ; 5)$, $(24 ; 25)$ et $(3 ; 1)$.
3. a. $n^3 + 87n - 287 = (n+p)^3$
$\Leftrightarrow 3pn^2 + 3(p^2-29)n + p^3 + 287 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = (3(p^2-29))^2 - 4 \times 3p(p^3+287)$
$= -3p^4 - 522p^2 - 3444(p-3) - 2763$.
b. Le réel Δ est une somme de termes négatifs et de termes strictement négatifs ($p \geqslant 3$), donc il est strictement négatif. L'équation n'a donc pas de solution.
4. a. $n^3 + 87n - 287 = (n-p)^3$
$\Leftrightarrow 3pn^2 + 3(-p^2+29)n + p^3 - 287 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = (3(-p^2+29))^2$
$- 4 \times 3p(p^3-287) = -3p^4 - 522p^2 + 3444p + 7569$.
De plus : $-3((p^3 + 7p^2 + 223p + 413)(p-7) + 368)$
$= -3p^4 - 522p^2 + 3444p + 7569$.
Ainsi, on a :
$\Delta = -3((p^3 + 7p^2 + 223p + 413)(p-7) + 368)$.
Si $p \geqslant 7$, le réel Δ est strictement négatif. L'équation n'a donc pas de solution.

b. Si $p = 3$, $\Delta = 12960$ et $\sqrt{\Delta} = 36\sqrt{10} \notin \mathbb{N}$.

Si $p = 4$, $\Delta = 12225$ et $\sqrt{\Delta} = 5\sqrt{489} \notin \mathbb{N}$.

Si $p = 5$, $\Delta = 9864$ et $\sqrt{\Delta} = 6\sqrt{274} \notin \mathbb{N}$.

Si $p = 6$, $\Delta = 5553$ et $\sqrt{\Delta} = 3\sqrt{617} \notin \mathbb{N}$.

c. Les coefficients des équations du second degré correspondant aux cas $p = 3$, $p = 4$, $p = 5$ et $p = 6$ sont entiers. Leurs solutions ne peuvent donc être entières($\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{N}$).
5. Nous avons prouvé que les seules solutions sont les couples d'entiers $(n ; m)$ suivants : $(4 ; 5)$, $(24 ; 25)$ et $(3 ; 1)$.

103 1. Soit x un entier naturel compris entre 0 et 99, et a et b les deux entiers naturels compris entre 0 et 9 tels que $x = 10a + b$.
On a : $x^2 - 10x - (22 + ab) = 0$ (E).
Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = 4(47 + ab).$$

L'équation (E) est à coefficient entiers. Δ, et donc $47 + ab$, doivent être des carrés parfaits pour que (E) admette une solution entière. De plus : $0 \leqslant ab \leqslant 81$.
Les seules possibilités sont :
$ab = 2$; $ab = 17$; $ab = 34$; $ab = 53$; $ab = 74$.
En résolvant (E), on trouve les valeurs correspondantes :
$x = 12$; $x = 13$; $x = 14$; $x = 15$; $x = 16$.
Seule la valeur 12 répond à la question posée.
2. a. Pour tout entier I compris entre 1 et 99, on évalue le produit P des chiffres de I, puis on affiche I s'il est solution de l'équation $x^2 - 10x - 22 = P$.
b. Samuel a étudié tous les cas possibles grâce à son programme. On considère qu'il a démontré le résultat demandé.

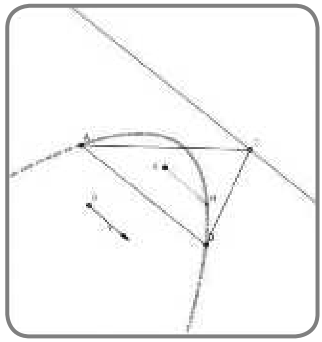
104 **a.** On constate :
$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)} = \sqrt[3]{1} = 1$$
$$\begin{aligned}\alpha^3 + 3\alpha - 4 &= \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 \\ &\quad + 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) - 4 \\ &= \sqrt{5} + 2 - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right. \\ &\quad \left.\times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) + 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right. \\ &\quad \left.\times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) - \left(\sqrt{5} - 2\right) \\ &\quad + 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) - 4 \\ &= -3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \times 1\right) + 3\left(1 \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) \\ &\quad + 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) = 0.\end{aligned}$$
b. Pour tout réel x, $x^3 + 3x - 4 = (x - 1)(x^2 + x + 4)$.
c. L'équation $x^2 + x + 4 = 0$ n'a pas de solution (le discriminant vaut -15).
Donc le seul réel x tel que $x^3 + 3x - 4 = 0$ est 1.
On a donc : $\alpha = 1$.

105 On constate que : $a = 2 + \dfrac{15}{a}$, donc a vérifie l'équation $a^2 - 2a - 15 = 0$ dont les solutions sont -3 et 5. Or a est clairement positif.
On en déduit : $a = 5$.

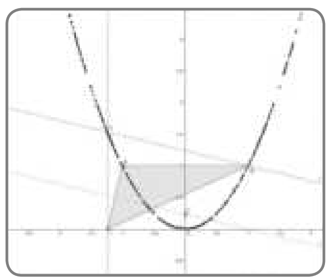
106 Soit x le nombre de carreaux blancs sur le côté du petit carré blanc. On doit résoudre :
$x^2 + (x + 8)^2 = 1000$, c'est-à-dire $x^2 + 8x - 468 = 0$.
Cette équation a deux solutions : 18 et -26. Seule la première est positive.
On utilise donc $2 \times 18 \times (18 + 8) = 936$ carreaux gris.

107 1. Par exemple : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{LK}$ donc IJKL est un parallélogramme.
2. Soit a la longueur AB et x la longueur AI.
a. Lorsque BC = 2AB, l'aire du parallélogramme IJKL est :
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= 2a^2 - 2\left(\frac{x(a-x)}{2} + \frac{x(2a-x)}{2}\right) \\ &= 2a^2 - x(3a - 2x) = 2x^2 - 3ax + 2a^2.\end{aligned}$$
Le minimum de $\mathcal{A}$ est pris en $\dfrac{-(-3a)}{2 \times 2} = \dfrac{3a}{4}$. Ainsi I est aux trois quarts de [AB] en partant de A.
b. Lorsque BC = 3AB, l'aire du parallélogramme IJKL est :
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= 3a^2 - 2\left(\frac{x(a-x)}{2} + \frac{x(3a-x)}{2}\right) \\ &= 3a^2 - x(4a - 2x) = 2x^2 - 4ax + 3a^2.\end{aligned}$$
Le minimum de $\mathcal{A}$ est pris en $\dfrac{-(-4a)}{2 \times 2} = a$. Ainsi I est confondu avec B.

108 **1. a.** et **b.**



Le lieu $\mathcal{L}$ des points H semble être une parabole.
On vérifie à l'aide du logiciel l'égalité :
(E) $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$.
2. a.



b. Une équation du lieu $\mathcal{L}$ des points H semble être $y = x^2$.
3. On vérifie à l'aide du logiciel la conjecture du **2. b**.
4. a. Le point K est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, donc K appartient à la médiatrice du segment [AB] qui est l'axe des ordonnées. On a donc $x_K = 0$.
b. De même, KB = KC. On en déduit :
$(1 - 0)^2 + (1 - y_K)^2 = (x - 0)^2 + (0 - y_K)^2$,
puis $y_K = \dfrac{2 - x^2}{2}$.
Les coordonnées de K sont $\left(0\,;\dfrac{2 - x^2}{2}\right)$.
c. L'égalité $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$ se traduit sur les coordonnées :

$$\begin{cases} x_{\mathrm{H}} = x \\ y_{\mathrm{H}} - \dfrac{2-x^2}{2} = 2 - 3\dfrac{2-x^2}{2} \end{cases}$$

c'est–à–dire $\begin{cases} x_{\mathrm{H}} = x \\ y_{\mathrm{H}} = 2 - 2\dfrac{2-x^2}{2} = x^2 \end{cases}$.

Une équation du lieu $\mathcal{L}$ des points H est bien $y = x^2$.

109 **1. a.** et **b.** Pour $r < 1{,}65$ (environ), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ n'ont pas de point commun.
Pour $r = 1{,}65$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ ont deux points communs ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ sont tangents en ces points).
Pour $1{,}65 < r < 3$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ ont 4 points communs.
Pour $r = 3$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ ont trois points communs (dont un point de tangence).
Pour $r > 3$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ ont deux points communs.
c. Pour $r = 1{,}65$ (environ), les points d'intersection ont pour coordonnées $(1{,}6 ; -0{,}5)$ et $(-1{,}6 ; -0{,}5)$.
Pour $r = 3$ (environ), les points d'intersection ont pour coordonnées $(0 ; -3)$, $(2{,}24 ; 2)$ et $(-2{,}24 ; 2)$.

2. a. Le point M de coordonnées $(x ; y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si OM $= r$, c'est–à–dire $x^2 + y^2 = r^2$.
b. et c. M$(x ; y)$ appartient à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}, \quad \text{c'est–à–dire} \quad \begin{cases} x^2 + \left(x^2 - 3\right)^2 = r^2 \\ y = x^2 - 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^4 - 5x^2 + 9 - r = 0 \quad (\mathrm{E}) \\ y = x^2 - 3 \end{cases}.$$

3. a. On pose $X = x^2$.
Le discriminant de $X^2 - 5X + 9 - r^2$ est
$\Delta = 25 - 4(9 - r^2) = 4r^2 - 11$.

Si $0 < r < \dfrac{\sqrt{11}}{2}$, l'équation (E) n'a pas de solution. *Pas de point commun.*

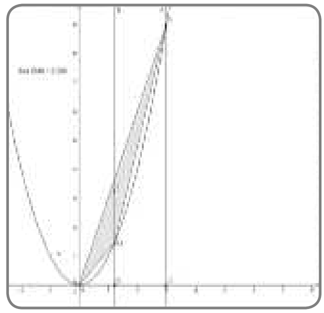
Si $r = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$, alors $X = \dfrac{5}{2}$, puis $x = -\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ ou $x = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
L'équation (E) a deux solutions. *Deux points communs.*

Si $\dfrac{\sqrt{11}}{2} < r < 3$, alors $0 < 4r^2 - 11 < 25$ donc

$X = \dfrac{5 - \sqrt{4r^2 - 11}}{2} > 0$ ou $X = \dfrac{5 + \sqrt{4r^2 - 11}}{2} > 0$.

L'équation (E) a quatre solutions. *Quatre points communs.*
Si $r = 3$, alors $X = 0$ ou $X = 5$, donc $x = 0$ ou $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$. L'équation (E) a trois solutions. *Trois points communs.*
b. L'exploration du **1.** a permis de voir que les cas de tangence se produisent lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ ont deux ou trois points communs ($0 < r \leqslant 3$).
Lorsque $r = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$, les points communs ont pour coordonnées $\left(-\sqrt{\dfrac{5}{2}} ; -\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}} ; -\dfrac{1}{2}\right)$. Ce sont des points de tangence.
Lorsque $r = 3$, les points communs ont pour coordonnées $(0 ; -3)$, $(-\sqrt{5} ; 2)$ et $(\sqrt{5} ; 2)$. Seul le premier est un point de tangence.

110 **1. a.**



On peut conjecturer que l'aire du triangle OMA est maximale lorsque $x = \dfrac{3}{2}$.

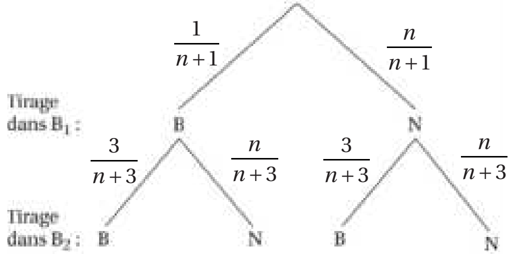
b. Il semble que, pour $a > 0$, l'aire est maximale lorsque $x = \dfrac{a}{2}$.

2. a. Pour tout réel x de $[0 ; a]$,

$$f(x) = \frac{a^3}{2} - \left(\frac{x^3}{2} + \frac{(a-x)\left(x^2 + a^2\right)}{2}\right) = \frac{a}{2}x(a - x).$$

b. La fonction f est strictement croissante sur $\left[0 ; \dfrac{a}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{a}{2} ; a\right]$. Elle prend donc son maximum en $\dfrac{a}{2}$. Celui–ci vaut $f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^3}{8}$.
L'aire de OMA est maximale lorsque l'abscisse de M est $\dfrac{a}{2}$; la valeur de cette aire est $\dfrac{a^3}{8}$.

111 **a.**



b. Soit p_1 la probabilité de tirer successivement deux boules blanches. On a : $p_1 = \dfrac{3}{(n+1)(n+3)}$.

$p_1 = \dfrac{1}{120} \Leftrightarrow (n+1)(n+3) = 360 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 357 = 0$.

La seule solution positive de cette équation est 17 (l'autre est -21).

$p_1 = \dfrac{1}{120} \Leftrightarrow n = 17$.

c. Soit p_2 la probabilité de tirer successivement deux boules noires. On a : $p_2 = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+3)}$.

$P_2 = \dfrac{25}{32} \Leftrightarrow 25(n+1)(n+3) = 32n^2 \Leftrightarrow 7n^2 - 100n - 75 = 0$.

La seule solution positive de cette équation est 15 (l'autre est $-\dfrac{5}{7}$).

$P_2 = \dfrac{25}{32} \Leftrightarrow n = 15$.

d. $p_1 < \dfrac{1}{1000} \Leftrightarrow \dfrac{3}{(n+1)(n+3)} < \dfrac{1}{1000}$

$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 2997 > 0$.

Les racines du trinôme $n^2 + 4n - 2997$ sont $-2-\sqrt{3001}$ et $-2+\sqrt{3001}$ ($\approx 52{,}78$).

A partir de $n = 53$, la probabilité de tirer successivement deux boules blanches est inférieure à $\dfrac{1}{1000}$.

2. Étude de fonctions

Objectifs et pré-requis

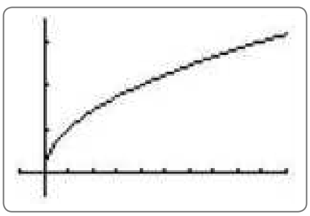
Afin de poursuivre l'étude de problèmes relevant de la modélisation, on introduit dans ce chapitre deux nouvelles fonctions de référence, les fonctions racine carrée et valeur absolue. L'utilisation de logiciels de géométrie dynamique et de calcul (formel ou scientifique) est tout particulièrement recommandée dans les exercices de ce chapitre.

Extrait du programme (Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010)

Contenus	Capacités attendues
Fonctions de référence $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \lvert x \rvert$ Sens de variation des fonctions $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$, la fonction u étant connue, k étant une fonction constante et λ un réel.	• Connaître les variations de ces deux fonctions et leur représentation graphique. • Démontrer que la fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;+\infty[$. • Justifier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto \sqrt{x}$. • Exploiter ces propriétés pour déterminer le sens de variation de fonctions simples.

1 Fonctions racine carrée et valeur absolue

1 **a.** Voici la représentation graphique de la fonction f.



La fonction f semble croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

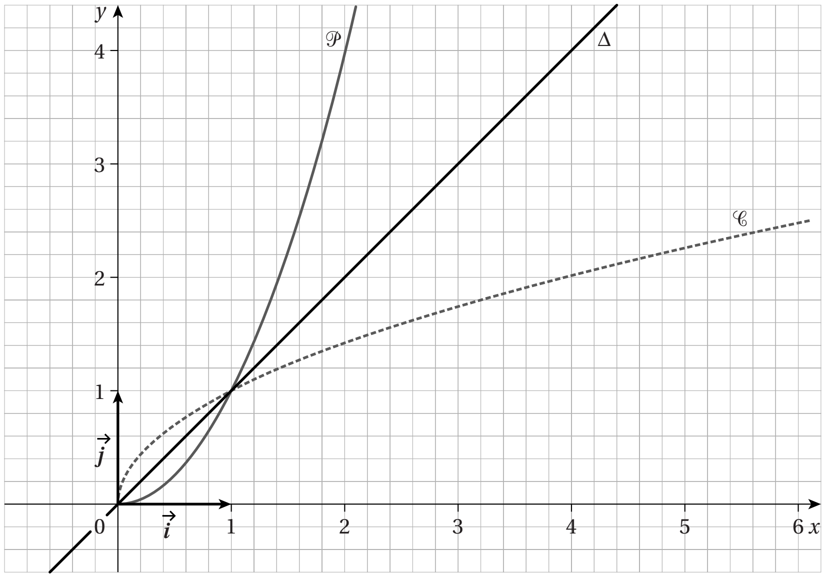
b. Quels que soient les réels a et b tels que $0 \leqslant a < b$,

$$f(b)-f(a)=\sqrt{b}-\sqrt{a}=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}.$$

$b-a>0$, donc $f(b)-f(a)>0$, c'est-à-dire $f(a)<f(b)$. La fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$. Voici son tableau de variations.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0 $\nearrow$

c.

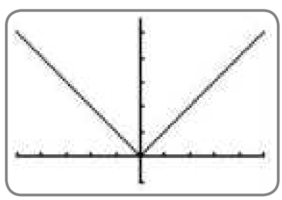


d. La symétrie d'axe Δ échange l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses. Ainsi, les points M(x ; y) et M'(y ; x) sont symétriques par rapport à la droite Δ. (On peut aussi démontrer, à l'aide des coordonnées, que le milieu I du segment [MM'] est sur la droite Δ, et que le triangle OMM' est isocèle en O, donc que Δ est la médiatrice du segment [MM'].)

e. M(x ; y) ∈ 𝒞 $\Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y \geqslant 0$ et $y^2 = x \Leftrightarrow$ M(y ; x) ∈ 𝒫.

f. Les courbes 𝒞 et 𝒫 sont symétriques par rapport à la droite Δ.

2 **a.** Voici la représentation graphique de g sur l'écran de la calculatrice.



La courbe semble composée de deux demi-droites d'origine O, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction g semble décroissante sur $]-\infty ; 0]$ puis croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b. Sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, on a $g(x) = -x$, donc la fonction g est décroissante sur $]-\infty ; 0]$; sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $g(x) = x$, donc g est croissante sur $[0 ; +\infty[$. Son tableau de variation est le suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \lvert x \rvert$		↘	0	↗	

c. Si $x \geqslant 0$, alors $g(x) = x$ et $g(-x) = -(-x) = x$.

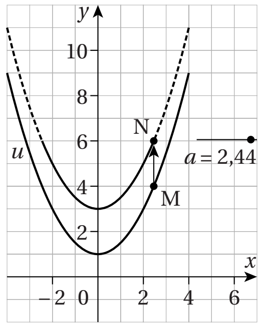
Si $x \leqslant 0$, alors $g(x) = -x$ et $g(-x) = -x$.

On en déduit : pour tout réel x, $g(-x) = g(x)$.

Ainsi, les points M(x ; $g(x)$) et M'($-x$; $g(-x)$) ont des abscisses opposées et des ordonnées identiques : ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. La courbe représentative de g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2 Fonctions associées $u + k$, ku, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$

❶ **a.**

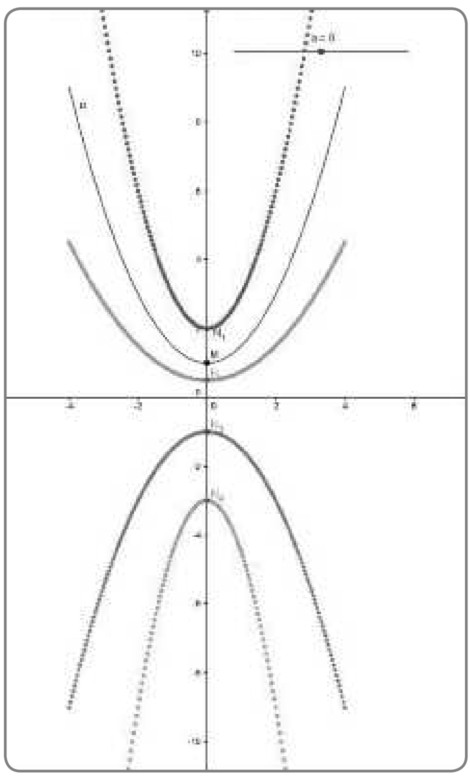


b. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(a - a\,;\,(u(a)+2) - u(a))$, c'est-à-dire $(0\,;\,2)$. Il ne dépend pas de la valeur de a. On pose $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$.

c. On peut donc obtenir la courbe de f à partir de celle de u grâce à la translation de vecteur $\vec{v}(0\,;\,2)$.

d. On retrouve le même résultat pour d'autres valeurs de k : la courbe de f est déduite de celle qui représente u grâce à la translation de vecteur $\vec{v}(0\,;\,k)$.

❷ **a.** Voici une copie de l'écran obtenu à l'aide de *GeoGebra*.



b. Les fonctions $x \mapsto 2u(x)$ et $x \mapsto 0{,}5u(x)$ ont le même sens de variation que la fonction u. Les fonctions $x \mapsto -u(x)$ et $x \mapsto -3u(x)$ ont le sens de variation contraire de celui de la fonction u.

c. Soit k un réel strictement positif. Pour tous réels a et b, on a :

$f_k(a) \leqslant f_k(b) \Leftrightarrow ku(a) \leqslant ku(b) \Leftrightarrow u(a) \leqslant u(b)$.

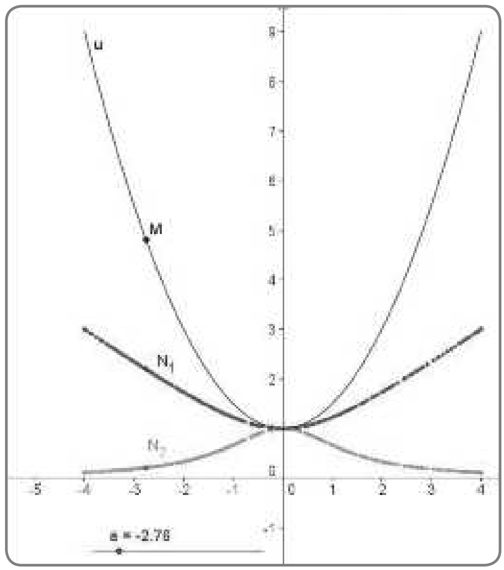
Ainsi, les fonctions u et f_k ont le même sens de variation.
Soit k un réel strictement négatif. Pour tous réels a et b, on a :

$$f_k(a) \leqslant f_k(b) \Leftrightarrow ku(a) \leqslant ku(b) \Leftrightarrow u(a) \geqslant u(b).$$

Ainsi, les fonctions u et f_k ont des sens de variation contraires.
On obtient les tableaux de variations suivants.

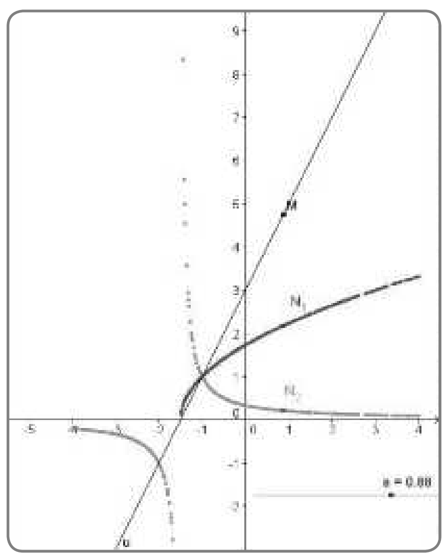
	x	-4	0	4
$k > 0$	$x \mapsto ku(x)$	↘	k	↗
$k < 0$	$x \mapsto ku(x)$	↗	k	↘

3 **a.** Voici une copie de l'écran obtenu à l'aide de *GeoGebra*.



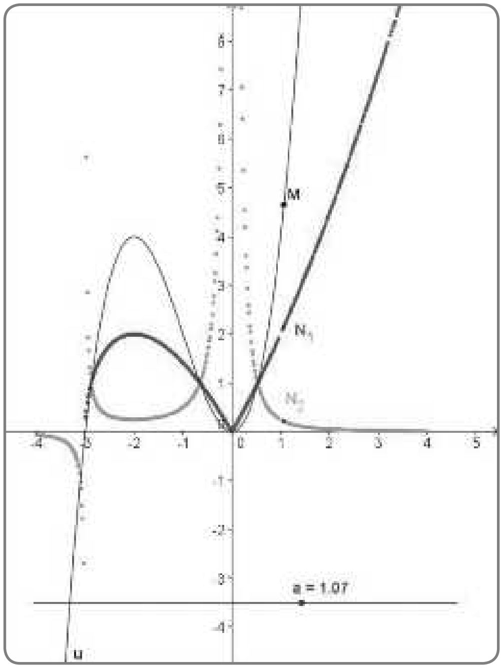
b. Les fonctions u et $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ semblent avoir le même sens de variation ;
les fonctions u et $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ semblent avoir des sens de variation contraires.

c. Voici une copie de l'écran obtenu à l'aide de *GeoGebra*.



On a : $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ et $2x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{3}{2}$.
Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est définie sur $\left[-\dfrac{3}{2} ; 4\right[$
et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ est définie sur $\left[-4 ; -\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{3}{2} ; 4\right]$.
Sur chacun des intervalles où ces fonctions sont définies, on retrouve les résultats obtenus à la question **b.**

d. Voici une copie de l'écran obtenu à l'aide de *GeoGebra*.



On a : $x^3+3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 0$ et $x^3+3x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est définie sur [–3 ; –4[et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ est définie sur [– 4 ; – 3[∪]– 3; 0[∪]0 ; 4].

Sur chacun des intervalles où ces fonctions sont définies, on retrouve les résultats obtenus à la question **b.**

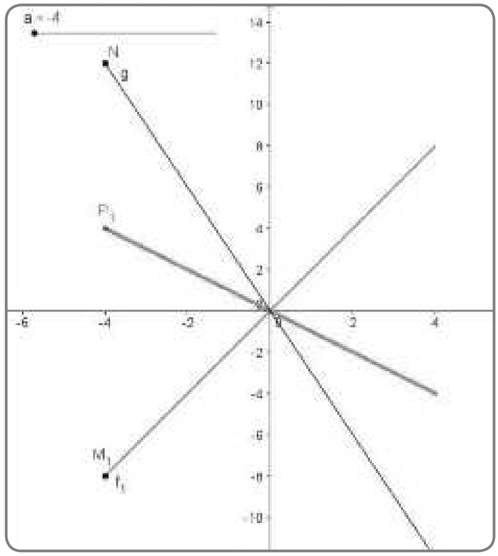
e. Sur chacun des intervalles où ces fonctions sont définies, les fonctions u et $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ semblent avoir le même sens de variation ; les fonctions u et $g : x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ semblent avoir des sens de variation contraires.

Corrigés des Travaux pratiques

TICE 1 Fonctions $f + g$ et fg

❶ Fonction $f + g$

a. Voici le résultat obtenu avec *GeoGebra*.



b. Sur l'intervalle $[-4 ; 4]$:
la fonction f est croissante ;
la fonction g est décroissante ;
la fonction $f + g$ est décroissante.

c. Sur l'intervalle $[-4 ; 4]$:
• la fonction f est croissante ;
• la fonction g est décroissante ;
• la fonction $f + g$ est croissante.

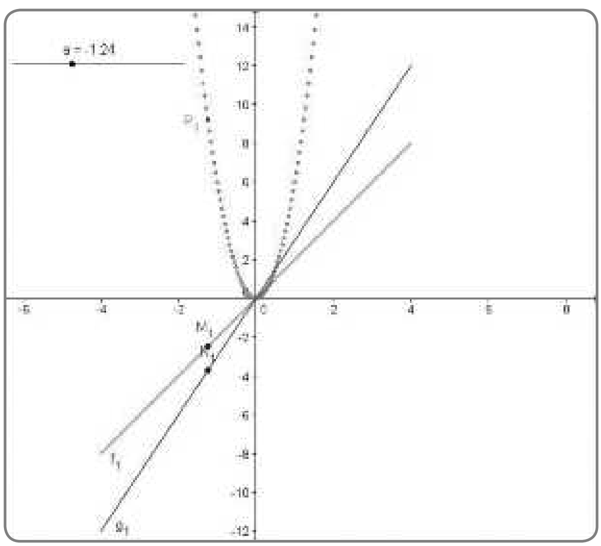
d. Il n'est pas possible d'énoncer une règle générale donnant le sens de variation de la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

e. En revanche, la somme de deux fonctions f et g strictement croissantes sur un intervalle I semble être strictement croissante sur I.
La preuve suivante utilise la définition d'une fonction strictement croissante.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Les fonctions f et g étant strictement croissantes sur I, on a : $f(a) < f(b)$ (1) et $g(a) < g(b)$ (2)
En additionnant membre à membre les inégalités (1) et (2), on obtient : $f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$.
La fonction $f + g$ est strictement croissante sur I.
Remarque : certains élèves n'ont pas vu comment « additionner » deux inégalités. On peut ajouter $g(a)$ aux deux membres de (1) et $f(b)$ aux deux membres de (2) avant de conclure.

f. Par un raisonnement analogue, on montre que la somme de deux fonctions f et g strictement décroissantes sur un intervalle I est strictement décroissante sur I.

❷ Fonction $f\,g$

a. Voici le résultat obtenu avec *GeoGebra*.



b. Sur l'intervalle $[-4 ; 4]$, la fonction f et la fonction g sont croissantes ; la fonction $f\,g$ est décroissante sur $[-4 ; 0]$, puis croissante sur $[0 ; 4]$.

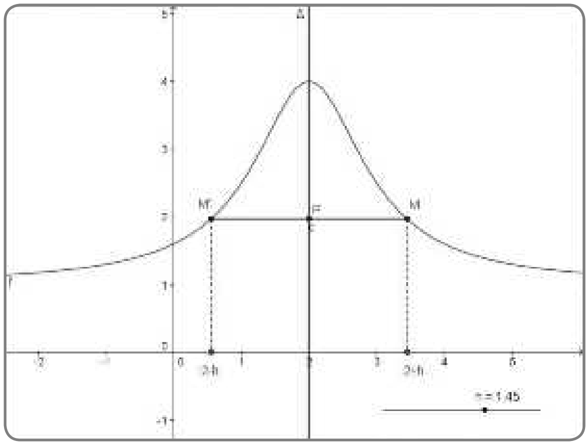
c. Sur $]0 ; 4[$, les fonctions f et g sont croissantes, et la fonction $f\,g$ est décroissante (ici, $f\,g(x) = -x$).

d. Il n'est pas possible d'énoncer une règle générale donnant le sens de variation du produit de deux fonctions croissantes sur un intervalle I.
Remarque : On peut prolonger le TP en se posant la question de deux fonctions croissantes de même signe, et chercher la démonstration de ce résultat. C'est l'occasion de s'interroger sur la multiplication membre à membre de deux inégalités.

TICE 2 Axe et centre de symétrie d'une courbe

Partie A

❶ **a.** Voici le résultat obtenu avec *GeoGebra* à la fin de la question **c.**.



La courbe $\mathscr{C}$ semble symétrique par rapport à la droite Δ d'équation $x = 2$.

b. c. d. La droite Δ semble être la médiatrice du segment [MM'].

e. Pour tout réel h,

$$f(2+h) = 1 + \frac{3}{(2+h)^2 - 4(2+h)+5} = 1 + \frac{3}{h^2+1} \text{ et } f(2-h) = 1 + \frac{3}{(2-h)^2 - 4(2-h)+5} = 1 + \frac{3}{h^2+1}\text{ , ainsi}$$

les points M et M' ont même ordonnée.

De plus, $\frac{2+h+2-h}{2} = 2$, donc la droite Δ est bien la médiatrice du segment [MM'].

Les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite Δ.

❷ **a.** La courbe représentative de f_1 est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -2$. En effet, f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel h, $f_1(-2+h) = -(-2+h)^2 - 4(-2+h) - 1 = 3 - h^2 = f_1(-2-h)$.

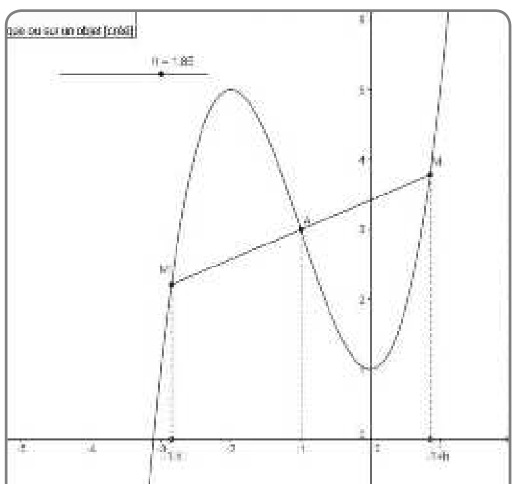
b. La courbe représentative de f_2 est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$. En effet, f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et, pour tout réel $h \neq 0$, $f_2(1+h) = \frac{1}{h^2} = f_2(1-h)$.

c. La courbe représentative de f_3 est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. En effet, f_3 est définie sur $]-\infty\,; -3] \cup [3\,; +\infty[$ et, pour tout réel h de $]-\infty\,; -3] \cup [3\,; +\infty[$, $f_3(h) = \sqrt{h^2-9} = f_3(-h)$.

On dit que la fonction f_3 est paire.

Partie B

❶ **a.** Voici le résultat obtenu avec *GeoGebra* à la fin de la question **c.**



La courbe $\mathscr{C}$ semble symétrique par rapport au point A(–1 ; 3).

b. c. d. Le point A semble être le milieu du segment [MM'].

e. Pour tout réel h,

$f(-1+h)=(-1+h)^3+3(-1+h)^2+1=h^3-3h+3$ et $f(-1-h)=(-1-h)^3+3(-1-h)^2+1=-h^3+3h+3$.

Le milieu du segment [MM'] a donc pour coordonnées :

$$\left(\frac{1}{2}(-1+h+(-1-h));\frac{1}{2}\left(h^3-3h+3+\left(-h^3+3h+3\right)\right)\right)$$, c'est-à-dire (– 1 ; 3) !

Le point A est bien le milieu de [MM'] : M et M' sont symétriques par rapport à A.

2 **a.** La courbe représentative de f_1 est symétrique par rapport au point de coordonnées (3 ; – 1). En effet, f_1 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et, pour tout réel $h \neq 0$, $f_1(3+h)=\dfrac{4-h}{h}$ et $f_1(3-h)=-\dfrac{4+h}{h}$ donc $\dfrac{f_1(3+h)+f_1(3-h)}{2}=\dfrac{\frac{4-h}{h}-\frac{4+h}{h}}{2}=-1$.

b. La courbe représentative de f_2 est symétrique par rapport au point de coordonnées (– 2 ; 0). En effet, f_2 est définie sur $]-\infty\,;-3]\cup[-1\,;+\infty[$ et, pour tout réel h de $]-\infty\,;-3]\cup[-1\,;+\infty[$,

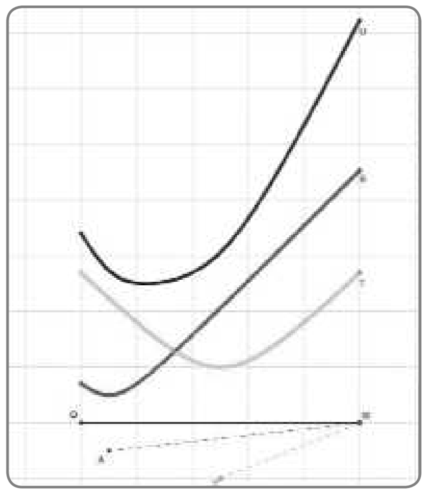
$f_2(-2+h)=h\sqrt{(-2+h)^2+4(-2+h)+3}=h\sqrt{h^2-1}$ et $f_2(-2-h)=-h\sqrt{h^2-1}$

$$\text{donc } \frac{f_2(-2+h)+f_2(-2-h)}{2}=0.$$

TICE 3 En passant par la rivière

1 **a. b.** Voici l'écran obtenu avec le logiciel *GeoGebra*. Les courbes (S), (T) et (U) représentent respectivement AM, BM et AM + BM en fonction de x.

c. Par lecture graphique, on conjecture que :
- le minimum de AM est 1, atteint en 1 ;
- le minimum de BM est 2, atteint en 5 ;
- le minimum de AM+BM est 5, atteint en $\dfrac{7}{3}$.



2 **a.** Le point M est sur le segment [OC], donc le domaine de définition des fonctions f et g est l'intervalle [0 ; 10].

Pour tout réel x de [0 ; 10], $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}$ et $g(x)=\sqrt{(x-5)^2+4}$.

Laisser les expressions $f(x)$ et $g(x)$ sous cette forme facilite l'étude demandée dans la question **b.**

b. Les fonctions f et g ont les mêmes variations sur [0 ; 10] que les fonctions $x \mapsto (x-1)^2+1$ et $x \mapsto (x-5)^2+4$. On en déduit :
- f est décroissante sur [0 ; 1] puis croissante sur [1 ; 10] ;
- g est décroissante sur [0 ; 5] puis croissante sur [5 ; 10].

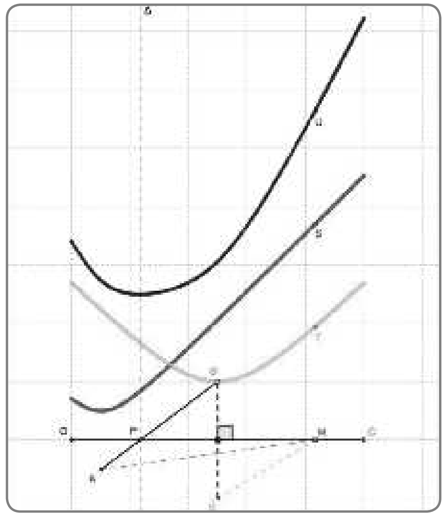
c. Pour $x \in [0\,;10]$, $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2+1 \leqslant (x-5)^2+4$ (f et g sont positives) $\Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{27}{8}=3{,}375$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{27}{8}\right]$ et au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{27}{8};10\right]$.

L'égalité $f(x)=g(x)$ est vérifiée lorsque le point M est équidistant des points A et B, c'est-à-dire lorsque M est sur la médiatrice du segment [AB].

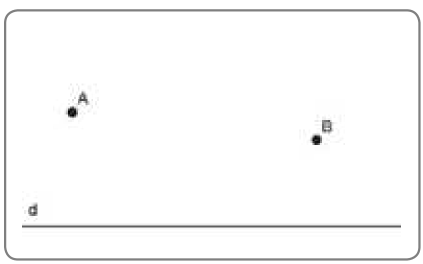
3 **a.** *Étapes* (1) *et* (2) : on multiplie deux fois de suite le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du numérateur.
b. *Étape* (3) : on factorise le numérateur en reconnaissant une identité remarquable (ou en utilisant les résultats sur les trinômes du second degré).
Le dénominateur D étant strictement positif (preuve faite en (*)), le réel $h(x) - 5$ a le signe de $(3x - 7)^2$. On conclut.
Étape (4) : on utilise les propriétés du signe d'un trinôme après en avoir calculé les racines.
c. *Étape* (5) : la seule valeur pouvant annuler la différence des deux carrés est $x = \frac{7}{3}$. Or $\frac{7}{3}$ n'appartient pas à la réunion d'intervalles $[0\,;\,3 - \sqrt{6}\,[\cup]\,3 + \sqrt{6}\,;\,10]$. Ainsi, on est assuré du fait que D est strictement positif.

4 **a.** Le point P est le lieu du point M sur le segment [OC]
qui minimise la somme AM + BM.
Voici une copie d'écran obtenue avec *GeoGebra*.



En effet, la somme AM + BM est égale à la somme AM + B'M (par symétrie), donc le minimum de ces deux sommes est atteint pour les mêmes positions de M. Il est clair que la seconde somme est minimale lorsque les points A, M et B' sont alignés, c'est-à-dire lorsque M est confondu avec P.

b. On attend ici une méthode constructive. Par exemple :
• construire sur le plan le symétrique B' du point B par rapport au bord supérieur (coté maisons) de la rivière ;
• construire le point M, intersection du bord de la rivière avec la droite (AB').
Le point M obtenu est la solution du problème posé.
Remarque : On peut prolonger cette dernière partie en demandant aux élèves une construction entièrement réalisable sur la rive supérieure de la rivière (ce qui pourrait correspondre à la pratique !). Autrement dit, construire le point M qui minimise la somme AM + BM, sans sortir du cadre.



On trouvera quatre solutions à ce problème dans le numéro de mai-juin 2010 (n°488) du *Bulletin de l'APMEP* (pp. 368 - 370). Ce problème peut être donné en travail de recherche à des élèves intéressés par des compétitions mathématiques comme les Olympiades.

Algoritmique 1 Résoudre une équation par dichotomie

1 Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; +∞], on a : $x^2 + a + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{x^3 + x^2 + ax + a + b}{x+1}$.

Il suffit de prendre $a = -2$ et $b = -1$ pour trouver $f(x) = x^2 - 2 - \dfrac{1}{x+1}$.

2 **a.** La fonction u est strictement croissante sur [0 ; +∞[.
À l'aide des fonctions associées, on montre que la fonction v est strictement croissante sur [0 ; +∞[.
b. c. Le sens de variation de la somme de deux fonctions croissantes n'étant pas au programme, on démontre le résultat en utilisant la définition d'une fonction strictement croissante.
Soit deux réels a et b de [0 ; +∞] tels que $a < b$:
$u(a) < u(b)$ et $v(a) < v(b)$ donc $u(a) + v(a) < u(b) + v(b)$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		2		+∞
$f(x)$	-3	↗	$-\frac{3}{2}$	↗	$\frac{5}{3}$	↗	

On peut déduire du tableau de variations de la fonction f que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur [0 ; +∞[et que l'on a l'encadrement : $1 < \alpha < 2$.

3 **a.** Voici une copie d'écran d'un tableau réalisé avec Excel.

	m	P	a	b	b-a
Initialisation			1	2	1
Etape 1	1,5	0,225	1,5	2	0,5
Etape2	1,75	-0,10482955	1,5	1,75	0,25
Etape 3	1,625	-0,03895089	1,5	1,625	0,125
Etape 4	1,5625	-0,00767435	1,5	1,5625	0,0625
Etape 5	1,53125	0,00755027	1,53125	1,5625	0,03125
Etape 6	1,546875	-9,2732E-06	1,53125	1,546875	0,015625
Etape 7	1,5390625	0,00126506	1,5390625	1,546875	0,0078125

b. La boucle de l'algorithme n'est plus exécutée dès que la différence $b - a$ est inférieure ou égale à 10^{-n}. Ainsi n donne la précision de l'encadrement désiré (il sera d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}).

c. Cet algorithme se programme aisément en langage de programmation ou sur un tableur.
En langage calculatrice, après avoir saisi l'expression de $f(x)$ dans l'éditeur de fonctions (en Y1) on obtient les programmes *ci-contre*.

TI82

```
PROGRAM:DICHO
:Prompt N
:1→A:2→B
:While B-A>10^(-
N)
:(A+B)/2→M
:Y1(A)*Y1(M)→P
:If P>0
:Then
:M→A
:Else
:M→B
:End
:End
:Disp A,B
```

CASIO 35

```
======DICHO ======
"N"?→N:1→A:2→B↵
While B-A>10^(-N)↵
(A+B)÷2→M↵
Y1(A)×Y1(M)→P↵
If P>0↵
Then M→A↵
Else M→B↵
IfEnd↵
WhileEnd↵
A◢
B
```

En saisissant $n = 8$, on obtient les affichages de a et b suivants : 1,546818271 et 1,546818279.
On en déduit l'encadrement d'amplitude 10^{-8} : $1{,}54681827 < \alpha < 1{,}54681828$.
Chaque étape divise par 2 l'amplitude de l'encadrement qui vaut 1 au départ.

On a donc l'inégalité $\dfrac{1}{2^m} \leqslant 10^{-8}$, c'est-à-dire $2^m \geqslant 10^8$.

La plus petite valeur de m vérifiant cette inégalité est 27 (en utilisant la calculatrice).

Il faut donc 27 étapes pour obtenir cet encadrement.
Remarques :
on peut aussi trouver cette valeur en insérant un compteur dans la boucle ;
c'est là l'occasion de s'interroger sur les boucles en « tant que » et sur leur condition d'arrêt.

Algoritmique 2 — Points entiers sur un cercle

Partie A

1 D'après le graphique, le domaine de définition de la fonction f est $D_f = \left[-5\sqrt{65};5\sqrt{65}\right]$. Voici son tableau de variations.

x	$-5\sqrt{65}$	0	$5\sqrt{65}$
f	0 ↗	$5\sqrt{65}$	↘ 0

2 **a.** La courbe $\mathscr{C}$ est la partie du cercle de centre O, de rayon $5\sqrt{65}$, qui est située au-dessus de l'axe des abscisses.

Ainsi $M(x\,;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = 5\sqrt{65} \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM^2 = 1625 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1625 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$.

b. On en déduit, pour tout réel x de $\left[-5\sqrt{65}\,;5\sqrt{65}\right]$, $f(x) = \sqrt{1625 - x^2}$.

c. On vérifie : $1625 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-5\sqrt{65}\,;5\sqrt{65}\right]$.

D'après les propriétés des fonctions associées, les variations de la fonction carré et celles de f sont de sens contraire ; on retrouve bien le tableau de variations dressé en 1.

d. De considérations géométriques ou sur la fonction f (pour tout x de D_f, $f(x) = f(-x)$), on déduit que $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Partie B

1 **a.** L'algorithme proposé compte le nombre de points *entiers* sur le quart de cercle de centre O et de rayon $5\sqrt{65}$, situé dans le premier quadrant ($x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$), extrémités comprises (cette précision est importante pour la suite de l'activité). Les coordonnées de ces points entiers sont également affichées en sortie.

b. La partie entière de $5\sqrt{65}$ vaut 40. Pour les entiers au-delà de cette valeur, la fonction f n'est pas définie.

2 **a.** Voici l'algorithme modifié.

```
Entrée               La variable R

Initialisation :     Effacer la liste L1 et la liste L2
                     Affecter à la variable n la valeur 0

Traitement :         Pour i allant de 0 à la partie entière de R
                        Affecter à la variable a la valeur √(R² - I²)
                        Si a est entier alors
                           Affecter à la variable n la valeur n + 1
                           Affecter à la variable L1(n) la valeur i
                           Affecter à la variable L2(n) la valeur a
                        Fin_du_Si
                     Fin_du_Pour

Sortie :             Afficher n
                     Afficher L1 et L2
```

b. Voici la traduction de cet algorithme en langage calculatrice.

TI82

```
PROGRAM:PTSENT
:Prompt R
:EffToutListes
:0→N
:For(I,0,partEnt
(R))
:√(R²−I²)→A
:A−partEnt(A)→D
:If D=0
:Then
:N+1→N
:I→L1(N)
:A→L2(N)
:End:End
:Disp N,L1,L2
```

CASIO 35+

```
======PTSENT  ======
"R"?→R:0→N↵
ClrList ↵
For 0→I To Intg R↵
√(R²−I²)→A↵
A−Intg A→D↵
If D=0↵
Then N+1→N↵
I→List 1[N]↵
A→List 2[N]↵
IfEnd:Next↵
N◢
List 1◢
List 2
```

Remarque : Il est important d'amener les élèves à se questionner sur le test « si $D = 0$ », sachant que les nombres manipulés ne sont que des valeurs approchées. Les calculatrices, dans cet exemple, ne sont pas mises en échec ; dans certains langages, le test « si $D = 0$ » sera remplacé par « si $D < 10^{-7}$ » par exemple.

c. En testant cet algorithme sur les exemples proposés, on trouve :

Rayon R	1	$\sqrt{2}$	5	$5\sqrt{65}$
Nombre de points	2	1	4	8
Coordonnées des points entiers	(0 ; 1), (1 ; 0)	(1 ; 1)	(0 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (5 ; 0)	(5 ; 40), (16 ; 37), (20 ; 35), (28 ; 29), (29 ; 28), (35 ; 20), (37 ; 16), (40 ; 5)

Des constructions sur papier quadrillé confirment les résultats trouvés pour les trois premiers exemples.

d. Les points entiers sur la courbe $\mathscr{C}$ sont constitués par les huit points trouvés dans la question **c.** et leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, soit seize points (aucun des huit premiers points n'est sur l'axe de symétrie).

3 Il suffit d'ajouter un test en fin de programme :

• si le premier terme de la liste L1 est nul (c'est-à-dire si le premier point entier trouvé est sur l'axe des ordonnées), il y a $4(n-1)$ points entiers sur le cercle ;

• sinon il y a $4n$ points entiers sur le cercle.

Problème ouvert 1 Lieu de points

Le point M est situé sur d_1 donc ses coordonnées sont de la forme $(a\,;1)$ où a est un réel.
(Choisir la lettre x pour l'abscisse de M peut engendrer des difficultés dans la suite : manipulation des équations des droites et reconnaissance de l'équation de l'hyperbole.)

Si $a = -1$, la droite (AM) est parallèle à d_2 d'équation $x = 1$; le point N n'est pas défini.

Si $a \neq -1$, la droite passant par $A(-1\,;-1)$ et $M(a\,;1)$ a pour équation $y = \dfrac{2}{1+a}x + \dfrac{1-a}{1+a}$.

L'intersection de la droite (AM) et de la droite d_2 d'équation $x = 1$ est le point $N\left(1\,;\dfrac{3-a}{1+a}\right)$.

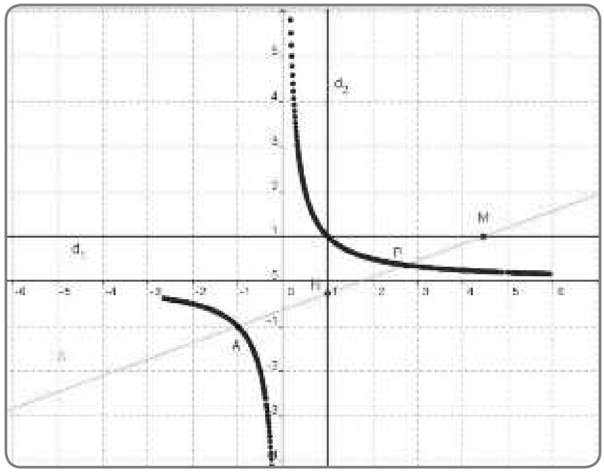
Le milieu du segment [MN] est le point $P\left(\dfrac{1+a}{2}\,;\dfrac{2}{1+a}\right)$.

On a la relation $y_P = \dfrac{1}{x_P}$, donc P appartient à l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

Lorsque a décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, le réel $\dfrac{1+a}{2}$ décrit $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc le point P décrit toute l'hyperbole $\mathscr{H}$.

Le lieu $\mathcal{L}$ des points P obtenus lorsque M décrit la droite d_1 est donc l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

On dit que l'hyperbole $\mathcal{H}$ est la **courbe médiane** des droites d_1 et d_2, de **pôle** A.



Problème ouvert 2 Un système particulier

• Supposons par l'absurde que l'un des x_i soit strictement supérieur à 1.
On a alors $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1$, ce qui est impossible.
Ainsi, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on a $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, puis $x_i^2 \leqslant x_i$.
• Supposons que $0 < x_i < 1$. On en déduit $x_i^2 < x_i$ et donc $1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_1 + x_2 + x_3 = 1$, ce qui est impossible.
Ainsi, pour tout $1 \leqslant i \leqslant 3$, $x_i = 0$ ou $x_i = 1$.
Si pour une valeur de i, x_i vaut 1, alors, pour tout $j \neq i$, $x_j = 0$.
Les solutions sont donc les triplets (1 ; 0 ; 0), (0 ; 1 ; 0) et (0 ; 0 ; 1).
Remarque : On peut aussi poser le problème suivant :

Résoudre $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1 \end{cases}$.

Problème ouvert 3 Un exercice d'Olympiade

1 En choisissant $a = 3$ et $b = -2$, on obtient bien $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$.
Si on ne trouve pas cette solution intuitivement, on peut raisonner comme à la question **2.**

2 On résout le système $\begin{cases} a - \sqrt{4+b} = 7 \\ a - \sqrt{7+b} = 4 \end{cases}$.

En soustrayant les deux lignes, on obtient $\sqrt{7+b} = \sqrt{4+b} + 3$ puis, en élevant au carré, $7 + b = 13 + b + 6\sqrt{4+b}$, c'est-à-dire $-1 = \sqrt{4+b}$ (impossible).

4 et 7 ne sont donc pas échangeables.

3 On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse

Supposons qu'il existe deux entiers u et v distincts ($u < v$) et un couple de réels (a ; b) tels que :

$\begin{cases} a - \sqrt{u+b} = v \\ a - \sqrt{v+b} = u \end{cases}$.

En soustrayant les deux lignes, on obtient $\sqrt{v+b} - \sqrt{u+b} = v - u$

puis en multipliant par l'expression conjuguée de $\sqrt{v+b} - \sqrt{u+b}$, puis en divisant par $v - u$, on obtient $\sqrt{v+b} + \sqrt{u+b} = 1$.

On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{v+x} + \sqrt{u+x}$, définie sur $[-u\,;+\infty[$. On démontre que g est croissante, de minimum $g(-u) = \sqrt{v-u}$.

Or $g(b) = 1$, donc $\sqrt{v-u} \leqslant 1$, c'est-à-dire $v - u \leqslant 1$.
Les entiers u et v étant tels que $u < v$, on a $v = u + 1$.

Synthèse

Si $v = u + 1$, il suffit de choisir $a = v$ et $b = -u$ pour obtenir $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

Conclusion

Deux entiers naturels u et v sont échangeables si et seulement si ils sont consécutifs.

Corrigés des exercices et problèmes

QCM Pour bien commencer

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 342.

Exercices d'application

1 **a.** Vrai car la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
b. Faux. Contre-exemple : $x = -\dfrac{5}{2}$.
c. Faux. Contre-exemple : $x = 0$.

2 **a.** $3{,}14^2 < 3{,}15^2$; **b.** $(-5{,}7)^2 < (-7{,}5)^2$;
c. $(1-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}-1)^2$; **d.** $(-2{,}72)^2 > 2{,}71^2$.

3 Les solutions des équations sont :
a. -3 et 3 ; **b.** $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$;
c. pas de solution ; **d.** 0 ;
e. -10^{-3} et 10^{-3}.

4 Les inéquations ont pour ensembles de solutions :
a. $]-2\,;2[$; **b.** $\left]-\infty\,;-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$;
c. $\varnothing$; **d.** $\mathbb{R}$;
e. $[-10^{-3}\,;10^{-3}]$.

5 **a.** Faux. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
b. Vrai. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
c. Vrai. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

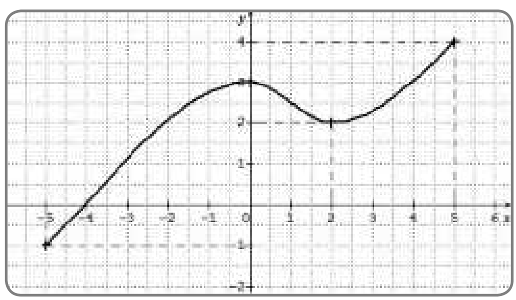
6 **a.** $\dfrac{1}{6} > \dfrac{1}{7}$; **b.** $\dfrac{1}{10^3} > \dfrac{1}{10^4}$;
c. $\dfrac{1}{3} > -\dfrac{1}{2}$; **d.** $-\dfrac{1}{\pi} > -\dfrac{1}{3{,}14}$.

7 Les solutions des équations sont :
a. -1 ; **b.** $\dfrac{1}{3}$;
c. $-\dfrac{2}{5}$; **d.** pas de solution ;
e. 10^3 .

8 Les inéquations ont pour ensembles de solutions :
a. $\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right[$; **b.** $\left[-\dfrac{1}{3}\,;0\right[$;
c. $]-\infty;0[$; **d.** $]-\infty\,;-1]\cup]0\,;+\infty[$;
e. $]0\,;10^{-9}]$.

9 **1. a.** Faux car f est croissante sur $[0\,;6]$.
b. On ne peut pas savoir.
c. Vrai car f est strictement décroissante sur $[-7\,;0]$, avec $f(-7) = 2$.
d. Vrai car f est strictement décroissante sur $[-7\,;0]$.
2. Les équations ont pour solutions :
a. pas de solution; **b.** 6;
c. -10 ; -1 et 4.
3. Les inéquations ont pour ensembles de solutions :
a. $]-1\,;4[$; **b.** $\varnothing$;
c. $[-10\,;-1]\cup[4\,;10]$.

10 Voici l'allure d'une courbe possible pour cette fonction.



11 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 343.

12 **a.** Le domaine de définition de g est $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
b. Soit deux réels a et b tels que $0 < a < b$. On a alors : $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ puis $\dfrac{7}{a} > \dfrac{7}{b}$ et enfin $-1+\dfrac{7}{a} > -1+\dfrac{7}{b}$, c'est-

à-dire $g(a) > g(\text{b})$. La fonction g est strictement décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.

c. Soit deux réels a et b tels que $a < b < 0$. On a alors : $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ puis $\frac{7}{a} > \frac{7}{b}$ et enfin $-1+\frac{7}{a} > -1+\frac{7}{b}$, c'est-à-dire $g(a) > g(b)$. La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0[$.

d. Tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	$\searrow$	‖	$\searrow$

13 **1.** Pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= b^2-4b+7-(a^2-4a+7)\\ &= b^2-a^2-4(b-a)\\ &= (b-a)(a+b-4). \end{aligned}$$

2. a. Lorsque $2 \leqslant a < b$, on a : $b-a>0$ et $a+b-4>0$. Ainsi $f(b)-f(a)>0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[2\ ;+\infty[$.

b. Lorsque $a < b \leqslant 2$, on a : $b-a>0$ et $a+b-4<0$. Ainsi $f(b)-f(a)<0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 2]$.

14 **a.** Pour tous réels a et b différents de 1,

$$\begin{aligned} g(b)-g(a) &= \frac{-2b+5}{b-1}-\frac{-2a+5}{a-1}\\ &= \frac{(-2b+5)(a-1)-(-2a+5)(b-1)}{(a-1)(b-1)}\\ &= \frac{-3(b-a)}{(a-1)(b-1)}. \end{aligned}$$

b. Lorsque $1 < a < b$, on a : $b-a>0$, $a-1>0$ et $b-1>0$. Ainsi $g(b)-g(a)<0$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $]1\ ;+\infty[$.

Lorsque $a < b < 1$, on a : $b-a>0$, $a-1<0$ et $b-1<0$. Ainsi $g(b)-g(a)<0$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 1[$.

15 **1.** Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\begin{aligned} h(b)-h(a) &= b+\frac{1}{b}-\left(a+\frac{1}{a}\right)\\ &= (b-a)+\frac{1}{b}-\frac{1}{a} = \frac{ab(b-a)+a-b}{ab}\\ &= \frac{(b-a)(ab-1)}{ab}. \end{aligned}$$

2. Lorsque $1 \leqslant a < b$, on a : $b-a>0$ et $ab>1$. Ainsi $h(b)-h(a)>0$. On en déduit que h est strictement croissante sur $[1\ ;+\infty[$.

Lorsque $0 < a < b \leqslant 1$, on a : $b-a>0$ et $ab<1$. Ainsi $h(b)-h(a)<0$. On en déduit que h est strictement décroissante sur $]0\ ; 1]$.

3. a. Soit x la longueur d'un côté du rectangle. La longueur de l'autre côté est alors $\frac{1}{x}$. Le périmètre du rectangle est alors donné par $p(x) = 2\left(x+\frac{1}{x}\right) = 2h(x)$.

Or la fonction h atteint son minimum en 1. La valeur minimale du périmètre est donc $p(1) = 2(1+1) = 4$, le rectangle étant le carré de côté 1.

b. On pose : $x = \frac{\alpha}{\beta}$. On a alors :

$x > 0$ et $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = x+\frac{1}{x} = h(x)$. Or le minimum de h sur $]0\ ;+\infty[$ est $h(1)=2$. Ainsi, pour tous les réels strictement positifs α et , on a: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \geqslant 2$.

16 On a : $c = \sqrt{1{,}01}$; $d = \sqrt{1{,}0121}$ et $e = \sqrt{1{,}0201}$.
Ainsi, on obtient : $c < a < d < b < e$.

17 Les ensembles de solutions des équations et inéquations suivantes sont :

a. $\{4\}$; **b.** $[9\ ;+\infty[$;
c. $\varnothing$; **d.** $\{0\}$;
e. $[0\ ; 10^{-6}[$.

18 Soit f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

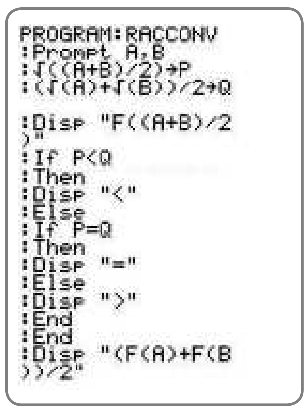
a. Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}. \end{aligned}$$

b. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} S(n) &= f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\\ &= \sqrt{1}-\sqrt{0}+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\ \ldots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\\ &\quad+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\ &= \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

19 **a.** Voici un programme écrit en langage calculatrice.



```
PROGRAM:RACCONV
:Prompt A,B
:√((A+B)/2)→P
:(√(A)+√(B))/2→Q
:Disp "F((A+B)/2
)"
:If P<Q
:Then
:Disp "<"
:Else
:If P=Q
:Then
:Disp "="
:Else
:Disp ">"
:End
:End
:Disp "(F(A)+F(B
))/2"
```

b. Pour tous réels positifs a et b, on a :

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant 0$ et $\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \geqslant 0$.

On compare les carrés de ces deux nombres :

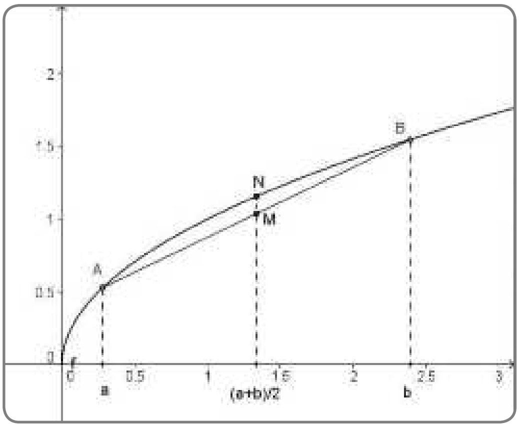
$$\frac{a+b}{2}-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2=\frac{2a+2b-\left(a+b+2\sqrt{ab}\right)}{4}$$

$$=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{4}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{4}\geqslant 0.$$

On a bien : $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

c. Le point M, milieu du segment [AB], est de coordonnées $\left(\frac{a+b}{2};\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$. Le point N de même abscisse que M et étant situé sur la courbe $\mathscr{C}$ a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2};f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$.

On a prouvé que le point N est situé au-dessus du point M.
En voici une illustration :



20 $|a| = 5$; $|b| = 3$; $|c| = 4$; $|d| = 3-\sqrt{3}$; $|e| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$; $|f| = 1$.

21 $a < f < c < d < b < e$

22 **a.** $|x-y| = 5$; **b.** $|x-y| = 5$; **c.** $|x-y| = 4{,}7$; **d.** $|x-y| = 3\sqrt{3}$.

23 Les solutions des équations sont :
a. -2 et 2 ; **b.** $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$;
c. Pas de solution.

24 Les inéquations ont pour ensembles de solutions :
a. $]-2\,;2[$; **b.** $]-\infty\,;-3]\cup[3\,;+\infty[$;
c. $\varnothing$.

25 **a.** Les nombres dont la distance à -1 est 6 sont : -7 et 5.
b. L'équation $|x-2| = 5$ a pour solutions -3 et 7.
c. L'équation $|-5-x| = 3$ a pour solutions -8 et -2.

26 **a.** $|a+b| = |a-(-b)|$ donc est $|a+b|$ est la distance entre les réels a et $-b$.
b. L'équation $|x+2| = 1$ a pour solutions -3 et -1.
c. L'équation $|3+x| = 7$ a pour solutions -10 et 4.

27 Les ensembles de solutions cherchés sont :

a. $\left]\frac{18}{5}\,;\frac{22}{5}\right[$; **b.** $]-\infty;0]\cup[4\,;+\infty[$;

c. $[-\pi-4\,;4-\pi]$;

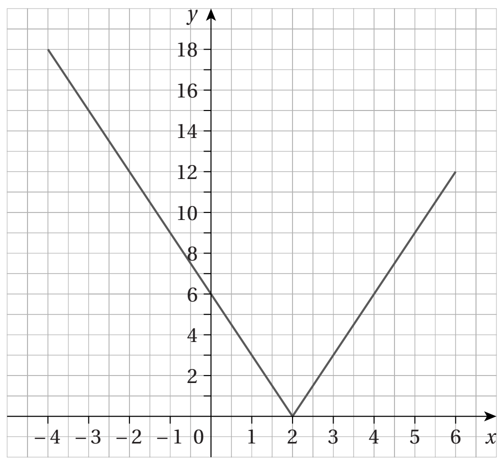
d. $\left]-\infty;\sqrt{3}-1\right[\cup\left]\sqrt{3}+1\,;+\infty\right[$.

28 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 343.

29 **a.** On a : $g(x)=\begin{cases}6-3x & \text{si } x\leq 2\\ 3x-6 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$.

b. La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;2]$ et strictement croissante sur $[2\,;+\infty[$.

c.



30 **a.** $|x-\pi| < 0{,}1$.
b. $|r-1{,}73| \leqslant 10^{-3}$.
c. $|a-6| \leqslant 1$.
d. $|e-2{,}7185| < 5.10^{-4}$.

31 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 343.

32 Les solutions des équations sont :

a. 1 ; **b.** $\frac{3}{2}$;

c. $\frac{5}{4}$.

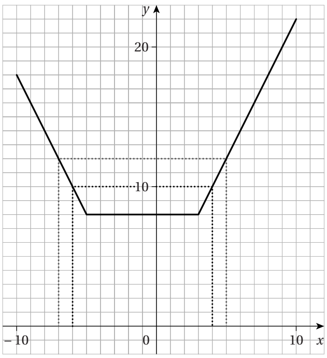
33 **a.**

x	$-\infty$ -5	3	$+\infty$
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$	$3-x$	$x-3$
$\lvert x+5\rvert$	$-x-5$	$x+5$	$x+5$
$f(x)$	$-2x-2$	8	$2x+2$

b. Voici le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
f		↘	8	→	8	↗	

c. Courbe représentative de f sur l'intervalle $[-10 ; 10]$.



d. $f(x) = 12 \Leftrightarrow -2x - 2 = 12$ (avec $x \leqslant -5$)

ou $2x + 2 = 12$ (avec $x \geqslant 3$)

$\Leftrightarrow x = -7$ ou $x = 5$.

Les solutions de l'équation sont -7 et 5.

e. On résout $f(x) < 10$ sur $]-\infty ; -5]$:

$-2x - 2 < 10 \Leftrightarrow x > -6$.

Sur $[-5 ; 3]$, l'inégalité $f(x) < 10$ est vérifiée.

On résout $f(x) < 10$ sur $[3 ; +\infty[$:

$2x + 2 < 10 \Leftrightarrow x < 4$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $]-6 ; 4[$.

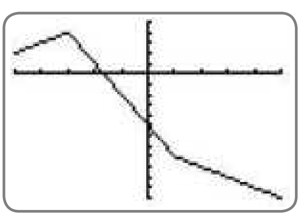
f. $f(x) = \text{MA} + \text{MB}$. On vérifie que les solutions trouvées en **d.** et **e.** conviennent.

34 **a.** $f(x) = \begin{cases} x+7 & \text{si } x \leqslant -3 \\ -3x-5 & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 1. \\ -x-7 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

b. Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f		↗	4	↘	

c. Courbe représentative de f sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.



35 **a.** $2{,}34 > 1$ donc $\sqrt{2{,}34} < 2{,}34 < 2{,}34^2$.

b. $0 < \pi - 3 < 1$ donc $\sqrt{\pi - 3} > \pi - 3 > (\pi - 3)^2$.

c. $\frac{\pi}{3} > 1$ donc $\sqrt{\frac{\pi}{3}} < \frac{\pi}{3} < \left(\frac{\pi}{3}\right)^2$.

36 **a.** $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$. De plus, A est positif donc $\sqrt{A} = \sqrt{2} - 1$.

b. $A^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2 = 9 - 12\sqrt{2} + 8 = 17 - 12\sqrt{2}$.

c. $0 < A < 1$ donc $\sqrt{A} > A > A^2$. On en déduit :

$\sqrt{2} - 1 > 3 - 2\sqrt{2} > 17 - 12\sqrt{2}$.

37 **a.** Tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
f		↘	1	↘	

b. Lorsque $0 < x < 1$, $f(x) > 1$, donc

$\sqrt{f(x)} < f(x) < (f(x))^2$.

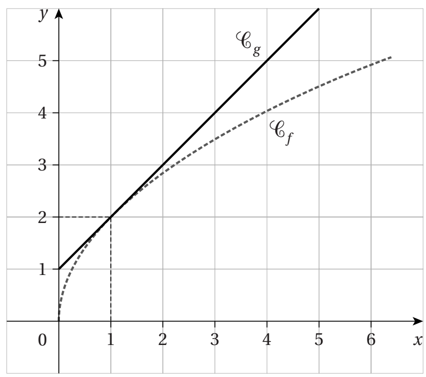
Lorsque $x = 1$, $f(x) = 1$ donc $\sqrt{f(x)} = f(x) = (f(x))^2$.

Lorsque $x > 1$, $0 < f(x) < 1$, donc

$\sqrt{f(x)} > f(x) > (f(x))^2$.

38 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 343.

39 **a.** Représentations graphiques des fonctions f et g.



b. Pour tout $x > 0$, on a :

$g(x) - f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 1)^2 \geqslant 0$.

On en déduit que la courbe représentant la fonction f est au-dessous de la courbe représentant g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Les deux courbes ont un point d'intersection de coordonnées $(1 ; 2)$.

40 **a.** Pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, on a :

$f(x) - (x - 2) = \dfrac{x^2 - 5x + 5 - (x-2)(x-3)}{x - 3} = \dfrac{-1}{x - 3}$.

Lorsque $x < 3$, $f(x) - (x - 2) > 0$;

lorsque $x > 3$, $f(x) - (x - 2) < 0$.

b. On en déduit que $\mathscr{C}$ est au-dessus de d sur $]-\infty ; 3[$ et au-dessous de d sur $]3 ; +\infty[$.

c. Lorsque x devient grand, la valeur de $f(x) - (x - 2)$ « tend » vers 0. La courbe $\mathscr{C}$ se « rapproche » de la droite d.

41 **1. a.** On a : $g(0) = f(0) = 1$.
Pour tout x de $]0\ ;\ 1]$,
$(g(x))^2 - (f(x))^2 = 1 + x + \dfrac{x^2}{4} - (1 + x) = \dfrac{x^2}{4} > 0$,
donc $(g(x))^2 > (f(x))^2$.
b. Les réels $g(x)$ et $f(x)$ étant positifs sur $[0\ ;\ 1]$, on en déduit :
pour $0 < x \leqslant 1$, $f(x) < g(x)$, c'est-à-dire $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$.

2. a. Le trinôme $1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}$ a pour racines $2(1 - \sqrt{3}\,) < 0$ et $2(1 + \sqrt{3}\,) > 1$. Il est positif entre ces racines donc, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $h(x)$ est positif.
b. $(f(x))^2 - (h(x))^2 = 1 + x - \left(\dfrac{x^4}{64} - \dfrac{x^3}{8} + x + 1\right)$

$$= \frac{x^3}{8}\left(1-\frac{x}{8}\right).$$

On a : $(f(0))^2 = (h(0))^2 = 1$ et, sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, $(f(x))^2 > (h(x))^2$.
c. Les réels $f(x)$ et $h(x)$ étant positifs sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on en déduit :
pour $0 < x \leqslant 1$, $f(x) > h(x)$, c'est-à-dire :

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}\ .$$

3. En 0, les courbes représentant f, g et h ont un point d'intersection. Sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, la courbe de f est au-dessus de celle de h, et au-dessous de celle de g.
4. Pour $x = 2.10^{-6}$, les inégalités montrées en **1. b.** et **2. c.** donnent l'encadrement :

$$1+\frac{2.10^{-6}}{2}-\frac{\left(2.10^{-6}\right)^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{2.10^{-6}}{2}\ ,$$

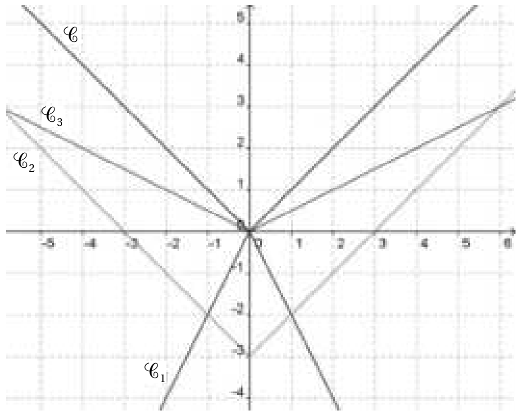
c'est-à-dire

$$1{,}000\,000\,999\,999\,5 < \sqrt{1{,}000002} < 1{,}000\,001.$$

L'encadrement est d'amplitude 5.10^{-13}.

42 **a.** Soit a et b deux réels de l'intervalle I tels que $a \leqslant b$.
La fonction u étant croissante sur I, on a alors $u(a) \leqslant u(b)$ puis $ku(a) \leqslant ku(b)$ (car $k > 0$). La fonction ku est donc croissante.
b. Il faut envisager les trois autres cas : $k > 0$ et u décroissante ; $k < 0$ et u croissante ; $k < 0$ et u décroissante.
• **Si $k > 0$ et la fonction u est décroissante sur I**, on a alors $u(a) \geqslant u(b)$ puis $ku(a) \geqslant ku(b)$. La fonction ku est donc décroissante.
(On a déjà prouvé : si $k > 0$, la fonction ku a même sens de variation que u sur I.)
• **Si $k < 0$ et la fonction u est croissante sur I**, on a alors $u(a) \leqslant u(b)$ puis $ku(a) \geqslant ku(b)$. La fonction ku est donc décroissante.
• **Si $k < 0$ et la fonction u est décroissante sur I**, on a alors $u(a) \geqslant u(b)$ puis $ku(a) \leqslant ku(b)$. La fonction ku est donc croissante.
(On a prouvé : si $k < 0$, la fonction ku a le sens de variation contraire à celui de u sur I.)

43



44 **1.** Tableaux de variations des fonctions *carré* et *inverse*.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	

2. a. Tableau de variations de $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$, définie sur $\mathbb{R}$. ($\dfrac{1}{2} > 0$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{x^2}{2}$		↘	0	↗	

b. Tableau de variations de $x \mapsto -3x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. $(-3 < 0)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-3x^2$		↗	0	↘	

c. Tableau de variations de $x \mapsto -\dfrac{4}{x}$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. $(-4 < 0)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-\dfrac{4}{x}$		↗	‖	↗	

d. Tableau de variations de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{2}-1}{x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\left(\sqrt{2}-1>0\right)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{\sqrt{2}-1}{x}$		↘	‖	↘	

45 **1.** Tableaux de variations des fonctions racine carrée et valeur absolue.

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		↘	0	↗	

2. a. La fonction $x \mapsto -2\sqrt{x}$ est définie sur $[0\,;+\infty[$ et a pour tableau de variations : $(-2<0)$

x	0		$+\infty$
$-2\sqrt{x}$	0	↘	

b. La fonction $x \mapsto \sqrt{5x}$ est définie sur $[0\,;+\infty[$ et a pour tableau de variations : ($\sqrt{5x}=\sqrt{5}\sqrt{x}$ et $\sqrt{5}>0$)

x	0		$+\infty$
$\sqrt{5x}$	0	↗	

c. La fonction $x \mapsto -\lvert x\rvert$ est définie sur $\mathbb{R}$ et a pour tableau de variations : $(-1<0)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-\lvert x\rvert$		↗	0	↘	

d. La fonction $x \mapsto \lvert -3x\rvert$ est définie sur $\mathbb{R}$ et a pour tableau de variations : ($\lvert -3x\rvert = 3\lvert x\rvert$ et $3>0$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert -3x\rvert$		↘	0	↗	

46 Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ représentent respectivement les fonctions $\dfrac{3}{2}u$, $-\dfrac{1}{2}u$ et $-u$.

47 Les fonctions représentées sont :

$f : x \mapsto -\dfrac{3}{x}$, $g : x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{4}{x}$.

48 **a.** La fonction $f : x \mapsto x^2 - \dfrac{1}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x^2-\dfrac{1}{2}$		↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	

b. La fonction $x \mapsto 2+\sqrt{x}$ est définie sur $[0\,;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$2+\sqrt{x}$	2	↗	

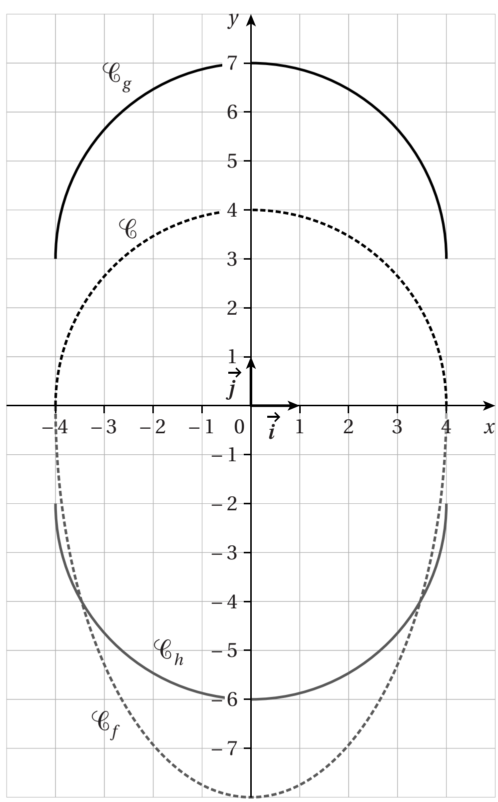
c. La fonction $x \mapsto \lvert x\rvert - \sqrt{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert-\sqrt{2}$		↘	$-\sqrt{2}$	↗	

d. La fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x} = 2+\dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{2x+1}{x}$		↘	‖	↘	

49



50 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 343.

51 Le tableau de variations de la fonction g est le suivant.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
g		↘	-1	↗	‖	↗	$\frac{2}{5}$	↘	

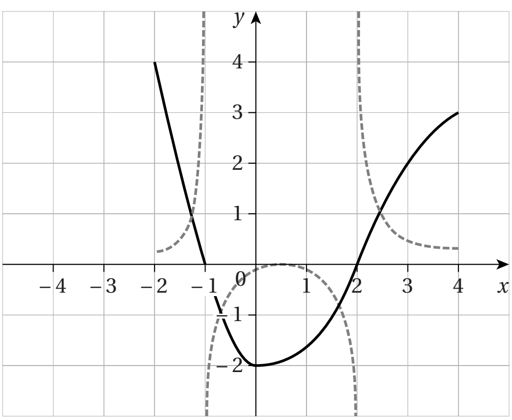
52 **1.** Voici le tableau de variations de la fonction f.

x	-2		0		4
f	4	↘	-2	↗	3

2. a. Par lecture graphique, on voit que la fonction f s'annule en -1 et en 2. Ainsi, le domaine de définition de la fonction $\frac{1}{f}$ est $[-2\,;-1[\cup]-1\,;2[\cup]2\,;4]$. La fonction $\frac{1}{f}$ a le tableau de variations suivant.

x	-2		-1		0		2		4
$\frac{1}{f}$	$\frac{1}{4}$	↗	‖	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	‖	↘	$\frac{1}{3}$

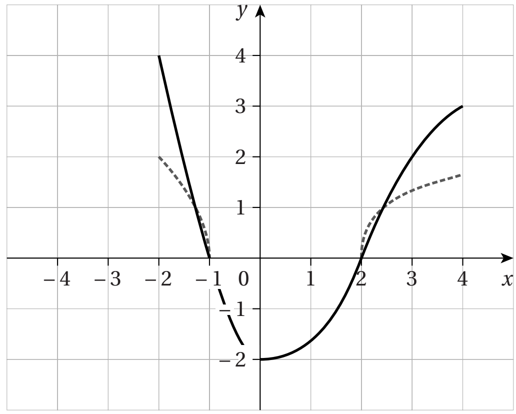
b. Voici l'allure de la courbe représentative de la fonction $\frac{1}{f}$.



3. a. L'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{f}$ est $[-2\,;-1]\cup[2\,;4]$. Le tableau de variations de $\sqrt{f}$ est le suivant.

x	-2		-1		2		$+\infty$
$\sqrt{f}$	2	↘	0	*non défini*	0	↗	$\sqrt{3}$

b. Voici l'allure de la courbe représentative de la fonction $\sqrt{f}$.



53 **a.** Tableaux de variations de u et $f = \frac{1}{u}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u		↘	3	↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{u}$		↗	$\frac{1}{3}$	↘	

b. Tableaux de variations de u et $f = \frac{1}{u}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
u		↘	3	↗	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\frac{1}{u}$		↗	$\frac{1}{3}$	↘	

c. Tableaux de variations de u et $f = \frac{1}{u}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u		↗	-2	↘	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\frac{1}{u}$		↘	$-\frac{1}{2}$	↗	

54 **a.** Tableaux de variations de u et $f = \sqrt{u}$.

x	-2		1		4
u	0	↗	9	↘	0

x	-2		1		4
$\sqrt{u}$	0	↗	3	↘	0

b. Tableaux de variations de u et $f = \sqrt{u}$.

x	0		$+\infty$
u	0	↗	

x	0		$+\infty$
$\sqrt{u}$	0	↗	

55 **a.** La fonction $u : x \mapsto 3x - 5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $\frac{5}{3}$. La fonction $f = \frac{1}{u}$ est donc définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{3}\right\}$; son tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

b. La fonction $u : x \mapsto 3 + x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et a les mêmes variations que la fonction carré. La fonction $f = \sqrt{u}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$; son tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	$\sqrt{3}$	↗	

c. La fonction $u : x \mapsto x^2 - 3$ est positive sur $]-\infty ; -\sqrt{3}]$ et sur $[\sqrt{3} ; +\infty[$; elle y a les mêmes variations que la fonction carré. La fonction $f = \sqrt{u}$ est donc définie sur $]-\infty ; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3} ; +\infty[$; son tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f		↘	0	*non défini*	0	↗	

d. La fonction $u : x \mapsto 5 - |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule en -5 et 5 ; elle a les variations contraires de celles de la fonction valeur absolue. La fonction $f = \frac{1}{u}$ est donc définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-5 ; 5\}$; son tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		-5		0		5		$+\infty$
f		↘	‖	↘	$\frac{1}{5}$	↗	‖	↗	

56 La fonction u est telle que $u(x) = 3 + x^2$ et f est telle que $f(x) = \sqrt{3 + x^2}$ (vue dans l'exercice **55. b.**).

57 La fonction v est telle que $v(x) = 5 - |x|$ et g est telle que $g(x) = \frac{1}{5 - |x|}$ (vue dans l'exercice **55. d.**).

58 **1. a.** Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} -2(x-1)^2 + 3 &= -2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= -2x^2 + 4x + 1 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

b. Soit a et b deux réels tels que $1 \leqslant a \leqslant b$. On a alors : $0 \leqslant a - 1 \leqslant b - 1$ puis $(a-1)^2 \leqslant (b-1)^2$. La fonction $u : x \mapsto (x-1)^2$ est donc croissante sur $[1 ; +\infty[$.

c. La fonction u étant croissante sur $[1 ; +\infty[$, la fonction $v = -2u$ est décroissante sur $[1 ; +\infty[$. Ainsi la fonction $f = v + 3$ est décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

d. Soit a et b deux réels tels que $a \leqslant b \leqslant 1$. On a alors : $a - 1 \leqslant b - 1 \leqslant 0$ puis $(a-1)^2 \geqslant (b-1)^2$. La fonction $u : x \mapsto (x-1)^2$ est donc décroissante sur $]-\infty ; 1]$.

La fonction $v = -2u$ est alors croissante sur $]-\infty ; 1]$ et, par suite, $f = v + 3$ est croissante sur $]-\infty ; 1]$.

e. Voici le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↗	3	↘	

2. a. On développe :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$= ax^2 + bx + c = f(x).$$

b. Soit $x - 1$ et $x - 2$ deux réels tels que :
$\alpha \leqslant x - 1 \leqslant x - 2$. On a alors : $0 \leqslant x - 1 - \alpha \leqslant x - 2 - \alpha$ puis $(x - 1 - \alpha)^2 \leqslant (x - 2 - \alpha)^2$.

La fonction $u : x \mapsto (x - \alpha)^2$ est donc croissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

Si $a > 0$ alors la fonction $v = au$ est croissante sur $[\alpha ; +\infty[$. Ainsi la fonction $f = v + \beta$ est croissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

Si $a < 0$ alors la fonction $v = au$ est décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$. Ainsi la fonction $f = v + \beta$ est décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$.

c. Par un raisonnement analogue, on trouve :

Si $a > 0$ alors la fonction f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$.

Si $a < 0$ alors la fonction f est croissante sur $]-\infty ; \alpha]$.

On en déduit, avec $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$:

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		↘	β	↗	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	β	$\searrow$

59 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 343.

60 **a.** Pour tout $x \neq -\dfrac{2}{3}$,

$$a+\frac{b}{3x+2}=\frac{3ax+2a+b}{3x+2}.$$

En prenant $a = 3$ et $b = -1$, on obtient :

$$g(x)=3-\frac{1}{3x+2}.$$

b. La fonction $u : x \mapsto 3x + 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $-\dfrac{2}{3}$.

La fonction $v = \dfrac{1}{u}$ est donc définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$; elle est décroissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right[$ et sur $\left]-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

Ainsi, la fonction $f = -v$, est croissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right[$ et sur $\left]-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$, de même que la fonction $g = f + 3$.

c. Pour tout $x > -\dfrac{2}{3}$, on a : $g(x)-3=-\dfrac{1}{3x+2} < 0$, donc $g(x) < 3$.

d. À l'aide d'une calculatrice classique, on obtient : « $g(10^{10}) = 3$ », ce qui, d'après la question **c.**, n'est pas possible.

En soustrayant 3 au résultat proposé, on obtient : $-3{,}33.10^{-11}$. Ainsi, $g(10^{10}) \approx 3 - 3{,}33.10^{-11}$.

61 **a.** $C \in [OM]$ donc $OM > OC$, c'est-à-dire $x > 3$.

b. Les droites (BC) et (DO) sont parallèles. En appliquant le théorème de Thalès, on obtient :

$$\frac{MC}{MO}=\frac{BC}{DO}\text{, c'est-à-dire }\frac{x-3}{x}=\frac{2}{h}.$$

On en déduit : $f(x) = h=\dfrac{2x}{x-3}$.

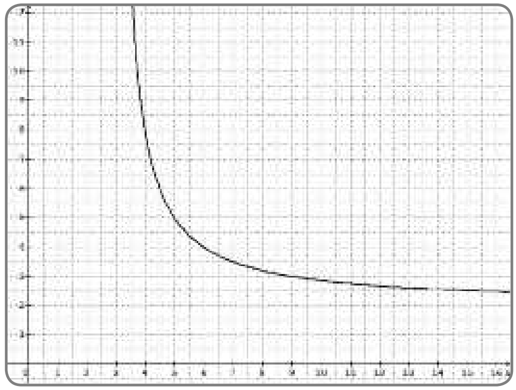
Or, pour tout $x > 3$, on a :

$$2+\frac{6}{x-3}=\frac{2x-6+6}{x-3}=\frac{2x}{x-3}.$$

On a bien : $f(x) = 2+\dfrac{6}{x-3}$.

c. La fonction $x \mapsto x - 3$ est strictement positive et croissante sur $]3\,;+\infty[$ donc, sur ce même intervalle, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$, $x \mapsto \dfrac{6}{x-3}$ puis $f : x \mapsto 2 + \dfrac{6}{x-3}$ sont décroissantes.

Voici la représentation graphique de f sur $]3\,;+\infty[$.



d. Pour $x > 3$, on a :

$$4 < 2+\frac{6}{x-3} < 6 \Leftrightarrow 2 < \frac{6}{x-3} < 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{x-3}<\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2}<x-3<3$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}<x<6.$$

La hauteur h est comprise entre 4 et 6 mètres lorsque la distance OM est comprise entre 4,5 et 6 mètres.

62 **a.** Le domaine de définition des fonctions f et u est $[-4\,;4]$.

b. La fonction f semble décroissante sur $[-4\,;0]$ et croissante sur $[0\,;4]$.

c. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle OMH rectangle en H pour obtenir :

$HM^2 = OM^2 - OH^2 = 16 - x^2$.

OHMK est un rectangle, donc on a :

$OH = KM$ et $OK = HM = \sqrt{16-x^2}$.

On en déduit : $AK = OA - OK = 5 - \sqrt{16-x^2}$.

d. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle AKM rectangle en K pour obtenir :

$u(x) = AM^2 = AK^2 + KM^2$

$=(5-\sqrt{16-x^2})^2 + x^2$

$= 25 + 16 - x^2 - 10\sqrt{16-x^2} + x^2$

$= 41-10\sqrt{16-x^2}$.

e. La fonction $x \mapsto -x^2$, et donc la fonction $x \mapsto 16 - x^2$ ont les variations contraires de celles de la fonction carré. De plus, pour tout x de $[-4\,;4]$, le réel $16 - x^2$ est positif.

On en déduit que la fonction $v : x \mapsto \sqrt{16-x^2}$ est croissante sur $[-4\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;4]$.

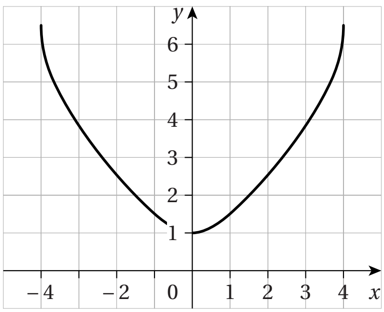
Les fonctions $-10v$, puis $u = 41 - 10v$ sont donc décroissantes sur $[-4\,;0]$ et croissantes sur $[0\,;4]$.

Enfin, la fonction $f = \sqrt{u}$ a les mêmes variations que u : f est décroissante sur $[-4\,;0]$ et croissante sur $[0\,;4]$.

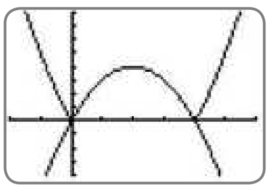
f. Tableau de variations de f.

x	-4		0		4
f	$\sqrt{41}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{41}$

g. Courbe représentative de f.

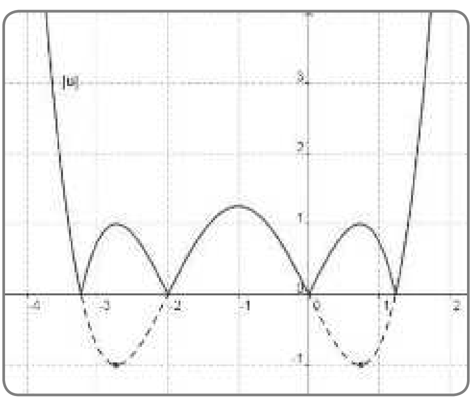


63 **1. a.** Voici une copie d'un écran de calculatrice.



b. On peut obtenir la courbe de $|u|$ en complétant la partie de celle de u située au-dessus de l'axe des abscisses par le symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la partie de cette courbe située au-dessous de l'axe.

2. Courbe représentative de $|u|$.



Restitution des connaissances

64 **a.** Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$.

Les réels $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs. Ils sont donc rangés dans le même ordre que leurs carrés respectifs a et b.

On a bien : $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

La fonction racine carrée est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Quels que soient les réels a et b tels que $0 \leqslant a < b$,

$$\sqrt{b}-\sqrt{a}=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}.$$

$b-a \geqslant 0$, donc $\sqrt{b}-\sqrt{a} \geqslant 0$, c'est-à-dire $\sqrt{b} \geqslant \sqrt{a}$

Si $a=b$ alors $\sqrt{b}=\sqrt{a}$.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

65 **a.** On a bien : $f(0)=g(0)=h(0)=0$ et $f(1)=g(1)=h(1)=1$.

b. Pour tout x de $]0\,;1[$, on a :

$f(x)-g(x)=\sqrt{x}-x=\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})$. Or $1-\sqrt{x}>0$ et $\sqrt{x}>0$, donc $f(x)-g(x)>0$, c'est-à-dire $f(x)>g(x)$.

$g(x)-h(x)=x-x^2=x(1-x)>0$ donc $g(x)-h(x)>0$, c'est-à-dire $g(x)>h(x)$.

Ainsi, pour tout x de $]0\,;1[$, on a : $f(x)>g(x)>h(x)$.

c. Pour tout x de $]1\,;+\infty[$, on a :

$f(x)-g(x)=\sqrt{x}-x=\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})$. Or $1-\sqrt{x}<0$ et $\sqrt{x}>0$, donc $f(x)-g(x)<0$, c'est-à-dire $f(x)<g(x)$.

$g(x)-h(x)=x-x^2=x(1-x)<0$ donc $g(x)-h(x)<0$, c'est-à-dire $g(x)<h(x)$.

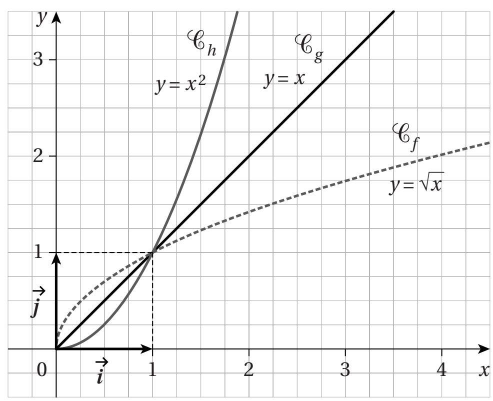
Ainsi, pour tout x de $]1\,;+\infty[$, on a :

$$f(x)<g(x)<h(x).$$

d. Sur l'intervalle $]0\,;1[$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est strictement au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_h$, et strictement au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est strictement au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$, et strictement au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_h$.

e. Voici les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ *et* $\mathscr{C}_h$ sur l'intervalle $[0\,;4]$.



66 **a.** On a : $x-c \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant c$.

Le domaine de définition de f est l'intervalle $[c\,;+\infty[$.

b. Sur $[c\,;+\infty[$, la fonction $u : x \mapsto x-c$ est positive et croissante, donc $v=\sqrt{u}$ est croissante. Le réel b étant strictement négatif , la fonction $w=bv$ est décroissante, de même que la fonction $f=a+w$.

Raisonnement logique

67 **a.** Vrai. La fonction $u : x \mapsto 3x^2$ a le même sens de variation que la fonction *carré*, donc $f = u - 5$ a le même sens de variation que la fonction *carré*.

b. Faux. La fonction *inverse* de $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0.

c. Vrai. Pour tout réel négatif x, $|x| + x = -x + x = 0$

d. Faux. Exemple : – 4 ne vérifie pas $|x - 5| \leqslant 3$ car $|-4 - 5| = 9 > 3$.

e. Faux. Si $x \in [0 ; 1]$, alors $0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$ donc
$$\sqrt{1-x} \geqslant 1 - x.$$

68 **a.** Vrai, car la fonction u est positive, strictement décroissante sur $[0 ; 2]$.

b. Faux. La fonction u s'annule sur $[-5 ; 0]$, donc la fonction $\frac{1}{u}$ ne peut pas être définie sur tout cet intervalle.

c. Vrai. Puisque $u(1) > 1$, on a aussi
$$\left(\sqrt{u}\right)(1) = \sqrt{u(1)} > 1.$$

d. Faux. Puisque $1 < u(4) < 3$, on a l'inégalité $(-u)(4) < -1$.

e. Faux. La fonction $u + 2$ a les mêmes variations que u, donc elle est strictement décroissante sur $[1 ; 3]$.

69 **a.** Vrai. Soit a et b deux réels de I, avec $a \leqslant$ b. On a alors $f(a) \leqslant f(b)$ et $g(a) \leqslant g(b)$. En « additionnant » ces inégalités, on obtient :
$f(a) + g(a) \leqslant f(b) + g(b)$, c'est-à-dire $h(a) \leqslant h(b)$.

b. Vrai. Soit a et b deux réels de I, avec $a \leqslant b$. On a alors $f(a) \geqslant f(b)$ et $g(a) \geqslant g(b)$. En « additionnant » ces inégalités, on obtient : $f(a) + g(a) \geqslant f(b) + g(b)$, c'est-à-dire $h(a) \geqslant h(b)$.

c. Faux. Contre-exemple :
soit $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto -x$, définies et monotones sur $[0 ; +\infty[$. La fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par
$$h(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$
n'est pas monotone sur $[0 ; +\infty[$.

d. Faux. Contre-exemple : soit $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x$ définies et croissantes sur $\mathbb{R}$. La fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = f(x) \times g(x) = x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

70 **a.** La proposition (P_1) est vraie. Considérons deux réels a et b de I tels que $a \leqslant b$. On a alors, u étant croissante sur I, $u(a) \leqslant u(b)$,
puis $ku(a) \leqslant ku(b)$. Ainsi, ku est bien strictement croissante sur I.

b. (P_2) : « Si ku n'est pas croissante sur I, alors u n'est pas croissante sur I ».

c. La proposition (P_2) est vraie car la proposition (P_1) est vraie.

Une démonstration directe pourrait être la suivante. ku n'est pas croissante sur I, donc il existe deux réels a et b de I avec $a < b$ et $ku(a) > ku(b)$. On a alors :
$u(a) > u(b)$, donc u n'est pas croissante sur I.

d. (P_3) : « Si ku est croissante sur I, alors u est croissante sur I »

e. La proposition (P_3) est vraie. Pour la prouver, on peut utiliser la proposition (P_1) avec, au lieu de k, le coefficient $\frac{1}{k}$.

71 **a.** La proposition (P_1) est vraie. Si $x > 1$, alors $x^2 - x = x(x - 1) > 0$. On a bien : $x^2 > x$.

b. (P_2) : « Si $x^2 > x$, alors $x > 1$.

c. La proposition (P_2) est fausse. Pour le réel $x = -2$, on a $x^2 > x$, mais pas $x > 1$.

72 **a.** La proposition (P_1) est vraie. Considérons deux réels a et b de I tels que $a < b$. On a alors :
$0 \leqslant f(a) < f(b)$. La fonction carré étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on en déduit : $(f(a))^2 < (f(b))^2$, c'est-à-dire $f^2(a) < f^2(b)$. La fonction f^2 est donc strictement croissante sur I.

b. (P_2) : « Si f^2 est strictement croissante sur I, alors f est strictement croissante sur I ».

c. La proposition (P_2) est vraie. Considérons deux réels a et b de I tels que $a < b$. On a alors :
$0 \leqslant (f(a))^2 < (f(b))^2$. La fonction f étant positive sur I, et la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on en déduit : $f(a) < f(b)$. La fonction f est donc strictement croissante sur I.

Se tester sur…

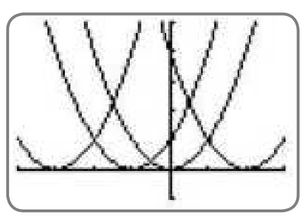
QCM : Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 343.

Prêt pour le contrôle ?

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 343.

Problèmes

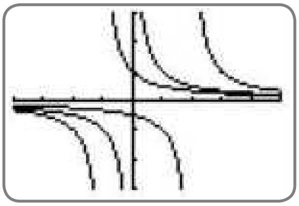
86 1.a. Voici les courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ à l'aide d'une calculatrice pour $k = 1$, $k = 3$ et $k = -2$.



b. La courbe $\mathscr{C}$ semble être l'image de la courbe $\mathscr{P}$ par la translation de vecteur $-k\vec{i}$.

2. **a.** $D_v = \mathbb{R} \setminus \{-k\}$.

b. Voici, par exemple, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$ à l'aide d'une calculatrice pour $k = 1$ et $k = -2$.



c. La courbe $\mathscr{C}$ semble être l'image de la courbe $\mathscr{H}$ par une translation de vecteur $-k\vec{i}$.

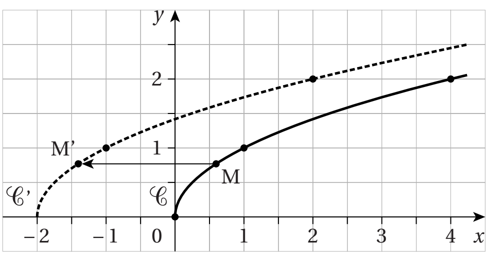
3. a. Soit $M(x\,;\,u(x))$ un point de la courbe $\mathscr{C}_u$. L'ordonnée du point M' de la courbe $\mathscr{C}_v$, d'abscisse $x-k$ est $v(x-k) = u(x-k+k) = u(x)$.

b. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(-k\,;\,0)$ donc on a :

$$\overrightarrow{MM'} = -k\vec{i}.$$

c. Le réel x appartient à l'ensemble de définition de u si, et seulement si, le réel $x-k$ appartient à l'ensemble de définition de v. De plus, à tout point M d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_u$ est associé, par la translation de vecteur $-k\vec{i}$, le point M' d'abscisse $x-k$ de la courbe $\mathscr{C}_v$. On en déduit que $\mathscr{C}_v$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $-k\vec{i}$.

4. a. et b. La courbe $\mathscr{C}$' est l'image de la courbe $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.



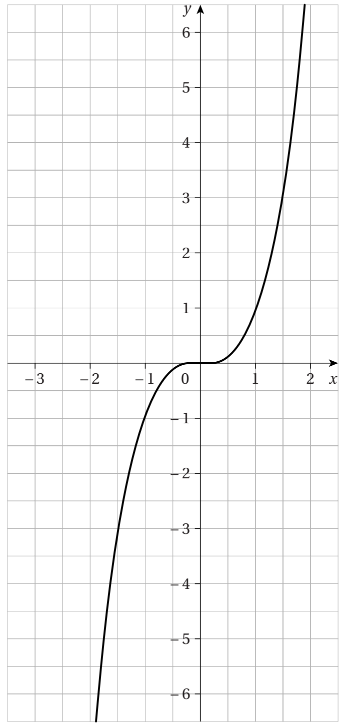
87 **1. a**. Pour tous réels a et b, on a :

$$(b-a)\left(\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right) = (b-a)\left(a^2+ab+b^2\right)$$
$$= b^3 - a^3 = f(b) - f(a)$$

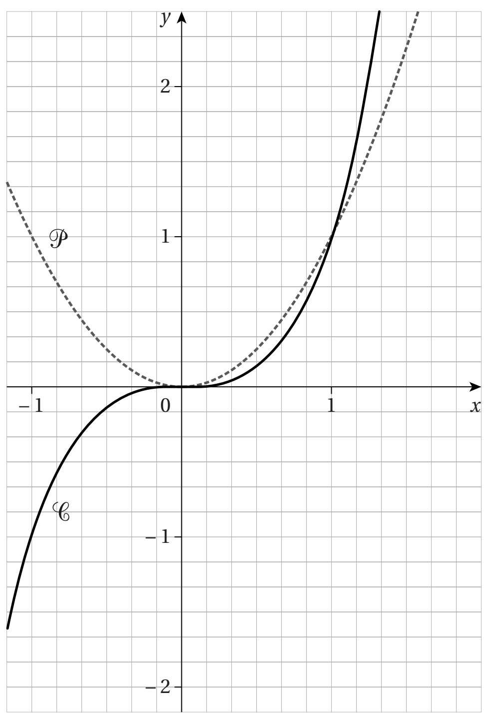
b. Soit deux réels a et b tels que $a < b$. On a alors : $b-a>0$. De plus, le réel $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}$ est la somme de deux nombres positifs ne pouvant être nuls simultanément (sinon, on aurait : $a = b = 0$), donc il est strictement positif. On en déduit : $f(b) - f(a) > 0$, c'est-à-dire $f(b) > f(a)$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Ainsi, les points $M(x\,;\,f(x))$ et $M'(-x\,;\,f(-x))$ sont symétriques par rapport au point O.

3. Voici la courbe $\mathscr{C}$.



4. Courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$.

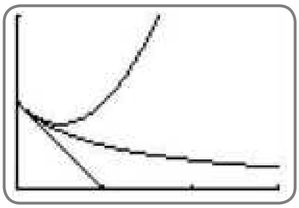


Pour tout réel x, $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ donc $x^3 - x^2$ est du signe de $x-1$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la parabole $\mathscr{P}$ sur $]-\infty ; 1]$ et au-dessus de la parabole $\mathscr{P}$ sur $[1 ; +\infty[$. Ces deux courbes ont deux points d'intersection d'abscisses 0 et 1.

6. a. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $3^3 = 27$. On en déduit : $x^3 \leqslant 27 \Leftrightarrow x \leqslant 3$. L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $]-\infty ; 3]$.

b. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $(-2)^3 = -8$. On en déduit : $x^3 > -8 \Leftrightarrow x > -2$. L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $]-2 ; +\infty[$.

88 **1. a.** Voici, sur l'écran de la calculatrice, les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.



b. Lorsque l'on zoome sur le point de coordonnées (0 ; 1), on constate que les courbes sont très proches les unes des autres au « voisinage » de 0 (à l'écran, les courbes sont confondues).

2. a. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{1+x} - (1-x)$

$$= \frac{1-\left(1-x^2\right)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0, \text{ donc } g(x) \leqslant f(x).$$

b. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $h(x) - f(x) = 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{1+x}$

$$= \frac{\left(1-x^2\right)+x^2(1+x)-1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} \geqslant 0,$$

donc $f(x) \leqslant h(x)$.

c. Ainsi, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ et au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_h$.

3. En prenant $x = 0{,}0002$, on obtient l'encadrement :

$$0{,}9998 \leqslant \frac{1}{1{,}0002} \leqslant 0{,}99980004.$$

En prenant $x = 0{,}000001$, on obtient :

$$\frac{1}{1{,}000001} \approx 0{,}999999 \text{ à } 10^{-12} \text{ près}$$

(ici, $x^2 = (10^{-6})^2 = 10^{-12}$).

89 **1. a.** Pour tout $x > 1$,

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1} = f(x).$$

b. Pour tout $x > 1$, $\dfrac{1}{x-1} > 0$ donc

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-1} > 1.$$

c. Pour tout $x > 1$, $f(x) > 1$ donc le réel $f(f(x))$ est défini. La fonction g est bien définie sur $]1 ; +\infty[$.

d. On peut conjecturer que, pour tout réel x de $]1 ; +\infty[$, $g(x) = x$.

e. Pour tout $x > 1$,

$$g(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-(x-1)}{x-1}} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}} = x.$$

2. a. Voici le programme modifié.

```
PROGRAM:FOFOF
:Prompt X
:X→A
:For(I,1,3)
:1/(1-A)→A
:End
:Disp "F(F(F(X))
=",A
```

b. Le programme testé avec $x = 1$ ou $x = 0$ génère une erreur. En effet, f n'est pas définie en 1, et $f(0) = 1$, donc $f(f(0))$ (et ainsi $f(f(f(0)))$) n'est pas défini.

c. On peut conjecturer que, pour tout réel différent de 0 et 1, on a : $g(x) = x$.

En effet, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$,

$$g(x) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f\left(f\left(\frac{1}{1-x}\right)\right) = f\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}\right)$$

$$= f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}} = \frac{1}{\dfrac{1}{x}} = x.$$

d. $1000 = 3 \times 333 + 1$ donc, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0 ; 1\}$, $h(x) = f\,(\,g\,(\ldots g\,(\,g\,(x))\ldots))$ où la lettre g est écrite 333 fois, donc $h(x) = f\,(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

90 **1.** $N \in [OA]$ donc $0 \leqslant ON \leqslant 4$. Le domaine de définition de f est donc $D = [0 ; 4]$.

2. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ONM, rectangle en N. On obtient :

$OP = NM = \sqrt{16-x^2}$.

Pour tout x de D, $f(x) = ON \times OP = x\sqrt{16-x^2}$.

3. a. Pour tout x de D,

$$\sqrt{64-(x^2-8)^2} = \sqrt{64-(x^4-16x^2+64)}$$
$$= \sqrt{x^2\left(16-x^2\right)} = x\sqrt{16-x^2}$$
$$= f(x)$$

b. Pour tout x de D, $64-(x^2-8)^2 \leqslant 64$, donc $f(x) \leqslant 8$. De plus, pour $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (et seulement pour cette valeur de D), $f(x) = 8$.

Ainsi, le maximum de f sur D est 8 ; il est atteint en $2\sqrt{2}$.

c. Si $ON = 2\sqrt{2}$, alors $OP = \sqrt{16-8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$= ON$.

Le rectangle ONMP est donc un carré.

4. a. Soit deux réels a et b tels que $0 \leqslant a < b \leqslant 2\sqrt{2}$.

On a alors : $0 \leqslant a^2 < b^2 \leqslant 8$, puis $-8 \leqslant a^2 - 8 < b^2 - 8 \leqslant 0$ et enfin $(a^2 - 8)^2 > (b^2 - 8)^2$, c'est-à-dire $u(a) > u(b)$.
La fonction u est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,2\sqrt{2}\,]$.

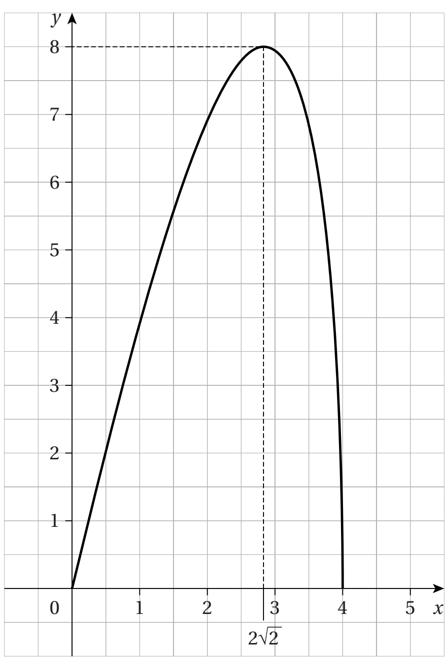
b. On en déduit, grâce aux propriétés des fonctions associées, que les fonctions $-u$,
puis $x \mapsto 64 - (x^2 - 8)^2$ et enfin $f : x \mapsto \sqrt{64-(x^2-8)^2}$ sont croissantes sur $[0\,;\,2\sqrt{2}\,]$.

c. De manière analogue, on prouve dans un premier temps que la fonction u est croissante sur $[\,2\sqrt{2}\,;\,4]$, puis que f est décroissante sur $[\,2\sqrt{2}\,;\,4]$.

d. Tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

x	0		$2\sqrt{2}$		4
f	0	↗	8	↘	0

5. Voici la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.



91 **1. a.** Le triangle AMI est rectangle en A, donc les angles $\widehat{\text{AMI}}$ et $\widehat{\text{AIM}}$ sont complémentaires.
L'angle $\widehat{\text{AIB}}$ est plat et l'angle $\widehat{\text{MIN}}$ est droit, donc les angles $\widehat{\text{AIM}}$ et $\widehat{\text{BIN}}$ sont complémentaires.
On en déduit que les angles $\widehat{\text{AMI}}$ et $\widehat{\text{BIN}}$ sont égaux.

b. En se plaçant successivement dans les triangles rectangles AMI et BIN, on obtient les égalités :
$\tan(\alpha) = \dfrac{\text{AI}}{\text{AM}}$ et $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{BN}}{\text{BI}}$.

On en déduit l'égalité $\dfrac{\text{AI}}{\text{AM}} = \dfrac{\text{BN}}{\text{BI}}$, puis $\dfrac{2}{x} = \dfrac{\text{BN}}{6}$, c'est-à-dire $\text{BN} = \dfrac{12}{x}$.

c. $\text{Aire(AMI)} = \dfrac{\text{AI} \times \text{AM}}{2} = x$
et $\text{Aire(BNI)} = \dfrac{\text{BI} \times \text{BN}}{2} = \dfrac{6 \times 12}{2x} = \dfrac{36}{x}$.

$$\text{Aire(AMI)} = \text{Aire(BNI)} \Leftrightarrow x = \frac{36}{x}$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 36$$
$$\Leftrightarrow x = 6 \ (x > 0).$$

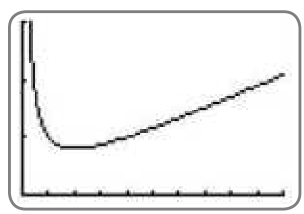
Les aires sont donc égales lorsque la distance AM vaut 6.
La fonction $x \mapsto x$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{36}{x}$, ayant les mêmes variations que la fonction inverse, est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
On obtient les tableaux de variations suivants.

x	0		$+\infty$
Aire(AMI)	‖	↗	
Aire(BNI	‖	↘	

d. Aire (MIN) = Aire (ABNM) – Aire(AMI) – Aire(BNI)
$$= 4\left(x + \frac{12}{x}\right) - x - \frac{36}{x} = 3x + \frac{12}{x} = 3\left(x + \frac{4}{x}\right).$$

2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$.

a. Courbe représentative de f obtenue à l'aide d'une calculatrice graphique



La fonction f semble décroissante sur $]0\,;\,2]$ et croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

b. Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :
$$f(b) - f(a) = b + \frac{4}{b} - a - \frac{4}{a}$$
$$= (b-a) - 4\frac{b-a}{ab} = \frac{(b-a)(ab-4)}{ab}.$$

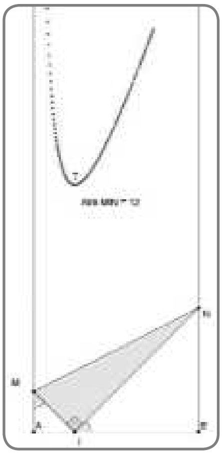
c. Soit a et b deux réels tels que $2 \leqslant a < b$. On a alors $ab > 4$ et $b - a > 0$.
On en déduit : $f(b) - f(a) > 0$.
La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

d. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b \leqslant 2$. On a alors $ab < 4$ et $b - a > 0$.

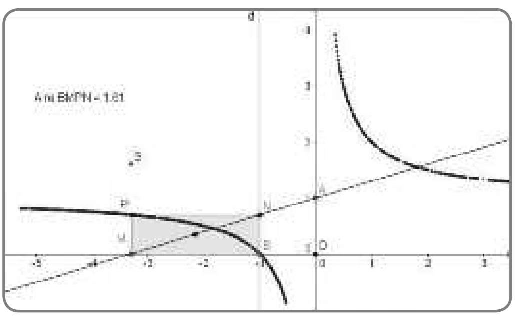
On en déduit : $f(b) - f(a) < 0$.
La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]0\,;2]$.
On construit le tableau de variation de f.

x	0		2		$+\infty$
u	$\|$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

3. On a : Aire (MIN) = $3f(x)$.
L'aire de MIN a donc les mêmes variations que la fonction f. Son minimum est atteint en 2 ; il vaut $3f(2) = 12$.
L'aire minimale du triangle MIN est 12.
Voici une copie d'un écran obtenu avec *GeoGebra*.



92 **1. a, b** et **c.** Voici la trace du point P quand M varie sur l'axe des abscisses, obtenue à l'aide du logiciel *GeoGebra*.



Le lieu $\mathscr{L}$ des points P semble être l'hyperbole d'équation $y = 1 + \dfrac{1}{x}$, ce que l'on peut vérifier en traçant cette hyperbole grâce à son équation.

2. a. La droite (AM) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = -\dfrac{1}{a}$ et est d'ordonnée à l'origine 1.
L'équation réduite de (AM) est donc $y = -\dfrac{x}{a} + 1$.
On obtient alors : N$\left(-1\,;\ \dfrac{1}{a}+1\right)$ et P$\left(a\,;\ \dfrac{1}{a}+1\right)$.

b. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$.

c. L'ensemble $\mathscr{L}$ est bien l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x} + 1$.

3. a. et **b.** Quand a est strictement négatif, la valeur minimale de l'aire du rectangle BMPN est 0. Elle est obtenue lorsque $a = -1$.
En effet, pour $a = -1$, le point M est confondu avec le point B. L'aire du rectangle est alors nulle.

c. Lorsque l'abscisse a du point M est strictement positive, la valeur minimale m prise par l'aire $\mathscr{L}$ semble être 4. Elle est atteinte pour $a = 1$.

d. Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, on a :

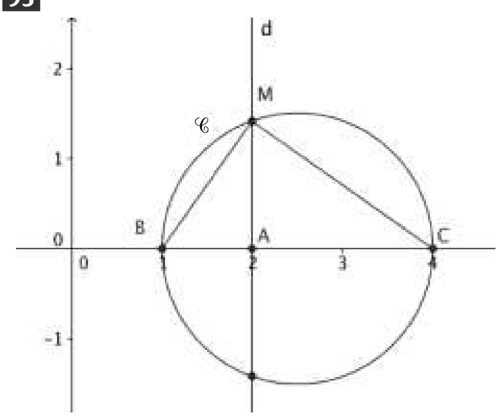
$$g(x) = \text{BM} \times \text{BN} = (x+1)\left(\frac{1}{x}+1\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{x} + x + 1 = x + 2 + \frac{1}{x}.$$

On a alors, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$:

$$g(x) - 4 = x - 2 + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$$

et $g(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
La fonction g a pour minimum 4 ; ce minimum est atteint en 1. La conjecture est vérifiée.
Lorsque $x = 1$, BM = BN = 2. Le rectangle BMPN est un carré.

93



Le triangle BCM est rectangle en M, donc les angles $\widehat{\text{BMA}}$ et $\widehat{\text{AMC}}$ sont complémentaires. Or, comme le triangle AMC est rectangle en A, l'angle $\widehat{\text{AMC}}$ et l'angle $\widehat{\text{ACM}}$ sont complémentaires.
On en déduit : $\widehat{\text{BMA}} = \widehat{\text{ACM}}$.
On se place successivement dans les triangles rectangles BAM et AMC pour évaluer les tangentes de ces angles égaux.
Il vient : $\dfrac{\text{AB}}{\text{AM}} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AC}}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\text{AM}} = \dfrac{\text{AM}}{a}$.

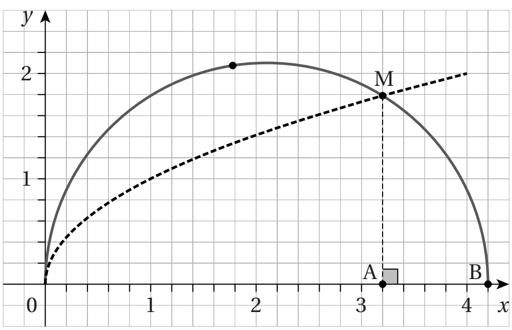
On obtient : $AM^2 = a$, puis $AM = \sqrt{a}$.
Le point M a donc pour coordonnées $(a\ ;\ \sqrt{a}\ )$.

Le lieu $\mathscr{L}$ des points M quand A se déplace sur l'axe des abscisses est la représentation graphique de la fonction racine carrée.
Remarque : on peut aussi procéder en utilisant le théorème de Pythagore dans les trois triangles rectangles cités.

94 ***Traduction***

Extraction de racine graphique
x est un réel positif,
$\mathscr{C}$ est un demi-cercle.
a. Examiner la figure ci-dessus et décrire la construction du point M.
b. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
c. Sur quelle courbe semble être le point M lorsque le réel x décrit l'intervalle $[0\ ;+\infty[$?
d. Démontrer la conjecture faite à la question **c**. (On pourra utiliser plusieurs fois le théorème de Pythagore)

Résolution
a. Le réel x est donné. Après avoir construit dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(x\ ;\ 0)$ et $B(x+1\ ;\ 0)$, on trace le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OB] contenu dans le premier quadrant. Le point M est l'intersection de la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par A avec le demi-cercle $\mathscr{C}$.
b. et **c.** En activant la trace de M et en faisant varier x, on obtient la courbe ci-dessous.



On reconnaît la représentation graphique de la fonction racine carrée.
d. En utilisant successivement le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles OMA et AMB, on obtient :
(1) $OM^2 = x^2 + AM^2$, (2) $MB^2 = 1 + AM^2$.
Le point M appartient au demi-cercle de diamètre [OB], donc le triangle OMB est rectangle en M. On y applique le théorème de Pythagore pour obtenir $OM^2 + MB^2 = (x+1)^2$ puis, d'après (1) et (2) :

$$x^2 + 1 + 2AM^2 = (x+1)^2.$$

On en déduit : $AM^2 = x$ puis $AM = \sqrt{x}$ $(AM > 0)$.

Le point M est de coordonnées $(x\ ;\ \sqrt{x}\ )$, le réel x décrivant $[0\ ;\ +\infty[$. La courbe décrite par M est la courbe représentative de la fonction racine carrée.

95 **1.a.** $M(x\ ;\ y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$ et $y = x - 2\sqrt{x} + 1$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$ et $y = (1-\sqrt{x}\ )^2$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$
et $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$
et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.
b. $M(x\ ;\ y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow 0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
$\Leftrightarrow M(x\ ;\ y) \in \mathscr{C}$.
La courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2. a. Supposons que $\mathscr{C}$ soit un quart de cercle.
L'axe des abscisses étant tangent à la courbe $\mathscr{C}$ au point de coordonnées (1 ; 0), on sait que le centre du cercle a pour abscisse 1.
L'axe des ordonnées étant tangent à la courbe $\mathscr{C}$ au point de coordonnées (0 ; 1), on sait que le centre du cercle a pour ordonnée 1.
Le centre du cercle est donc le point A(1 ; 1).
Le cercle passe par la point de coordonnées (1 ; 0). Il est donc de rayon 1.
b. $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}$. Le point $B\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ est donc sur la courbe $\mathscr{C}$.
Or, $AB^2 = \left(1-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} > 1$.
La courbe $\mathscr{C}$ ne peut pas être un quart de cercle.
3. Soit A le point de coordonnées (1 ; 1) et M le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse x. On considère la fonction g qui à x associe le réel AM^2.
a. $D_g = [0\ ;\ 1]$.
b. Pour tout x de [0 ; 1], on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)^2 + \left(x - 2\sqrt{x} + 1 - 1\right)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4x - 4x\sqrt{x} \\ &= 1 + 2x\left(1 - 2\sqrt{x} + x\right) = 1 + 2x\left(1 - \sqrt{x}\right)^2. \end{aligned}$$

c. Pour tout x de [0 ; 1], on a :

$$g(x) - 1 = 2x\left(1 - \sqrt{x}\right)^2$$

d. Pour tout x de [0 ; 1], on a :
$g(x) - 1 \geqslant 0$, donc $g(x) \geqslant 1$, c'est-à-dire $AM^2 \geqslant 1$.
On en déduit : $AM \geqslant 1$.
e. Les points de la courbe $\mathscr{C}$ sont donc à l'extérieur du disque de centre A et de rayon 1. Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessous du cercle.

3. Dérivation

Objectifs et pré-requis

On introduit dans ce chapitre un nouvel outil : la dérivation qui est le point central du programme d'analyse en première S. Dans les cas simples, le calcul explicite des dérivées est un attendu. On incitera par contre les élèves à utiliser les logiciels de calcul formel dans les situations plus complexes.

Extrait du programme (Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010)

Contenus	Capacités attendues
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point. Fonction dérivée. Dérivée des fonctions usuelles : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto x^n$ (n entier naturel non nul). Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient. Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	• Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé. • Calculer la dérivée de fonctions. • Exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités.

Corrigés des activités

1 Droites et parabole

1 **a.** *Voir 4b.*

b. (AB) : $y = 2x - 14$

2 **a.** $0{,}5 \times (4)^2 - 2 \times 4 - 6 = -6$

Donc A(4 ; –6) se trouvent sur $\mathcal{P}$.

b. Point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des ordonnées : (0 ; –6).

c. Le sommet de la parabole a comme abscisse $\dfrac{(0+4)}{2} = 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↘	-8	↗

d. *Voir 4b.*

3 **a.** $\dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 2x - 14 \Leftrightarrow x = 4.$

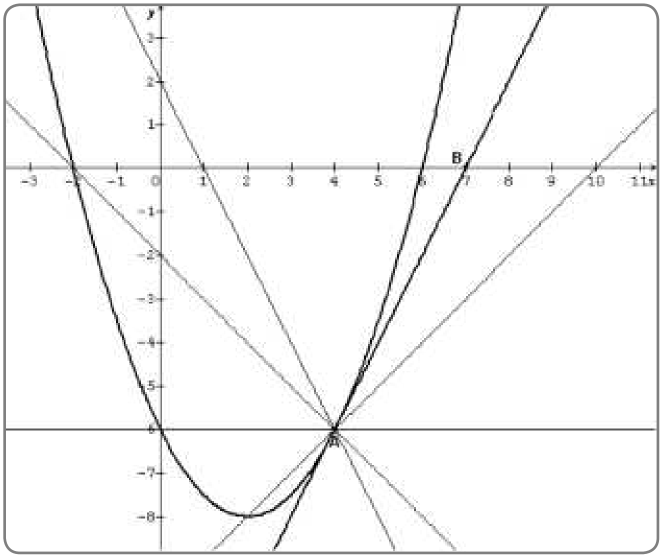
A est donc le seul point d'intersection de (AB) et de $\mathcal{P}$.

b. $\dfrac{1}{2}x^2 - 2\,x - 6 \geqslant 2x - 14 \Leftrightarrow (x-4)^2 \geqslant 0$. Vrai pour tout x réel.

La courbe $\mathcal{P}$ est donc toujours au-dessus de la droite (AB) avec un seul point commun A.

4 **a.** A appartient à la droite d'équation $y = ax + b \Leftrightarrow b = -4a - 6$, soit $(d_a) : y = ax - 4a - 6$.

b.



c. $\dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = ax - 4a - 6 \Leftrightarrow x^2 - (4 + 2a)x + 8a = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 2a) = 0$

Les deux points d'intersections sont d'abscisses 4 et $2a$ et sont donc différents si $a \neq 2$.

d. La droite (AB) n'est pas la seule car la droite d'équation $x = 4$ est également dans ce cas.

2 Position limite d'une sécante

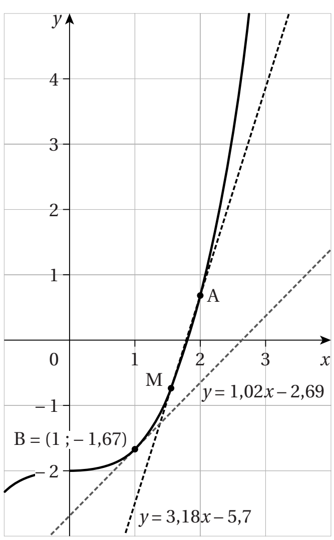
1 **a.** $\dfrac{1}{3} \times 2^3 - 2 = \dfrac{2}{3}$

Donc $A\left(2\,;\dfrac{2}{3}\right)$ appartient à $\mathscr{C}$.

b. et **c.** *Voir 2.*

d. Le coefficient directeur de (AM) semble se rapprocher de 4 lorsque le point M se rapproche du point A.

2



b	−1	0	0,5	1	2	3
V_b	1	0	0,25	1	4	9

On conjecture que $V_b = b^2$.

3 Limite d'une expression

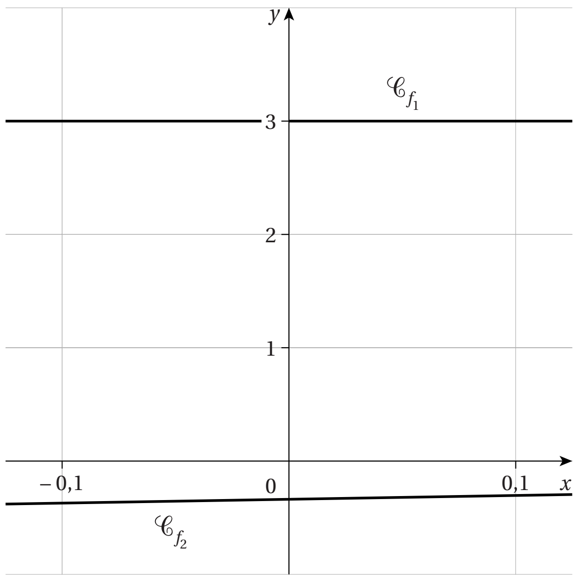
Partie A

❶ et ❷

a.

x	–0,1	–0,01	0,001	0,01	0,1
$f_1(x)$	3,01	3,000 1	3,000 001	3,000 1	3,01
$f_2(x)$	–0,3654	–0,3367	–0,3330	–0,3300	–0,2990

b.



c. Lorsque x se rapproche de 0, $f_1(x)$ se rapproche de 3.

Lorsque x se rapproche de 0, $f_2(x)$ se rapproche de $\frac{1}{3}$.

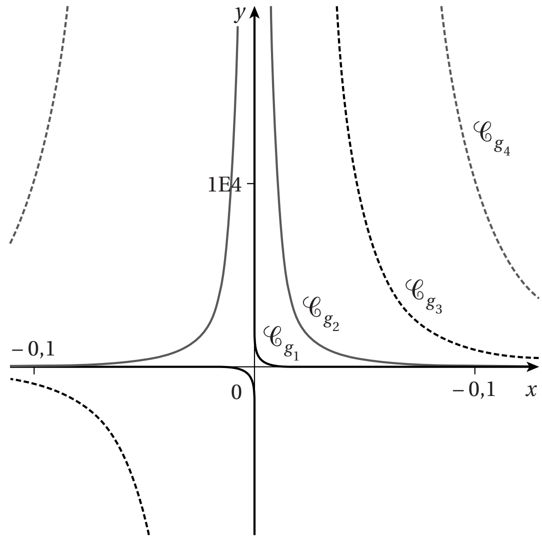
Partie B

❶ et ❷

a.

x	– 0,1	– 0,01	– 0,001	0,001	0,01	0,1
$g_1(x)$	– 10	– 100	– 1 000	1000	100	10
$g_2(x)$	100	10 000	10^6	10^6	10000	100
$g_3(x)$	– 1 000	– 10^6	– 10^9	10^9	10^6	1 000
$g_4(x)$	10 000	10^8	10^{12}	10^{12}	10^8	10 000

b.



c. Lorsque x se rapproche de 0, $g_i(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes (en valeur absolue). Si l'exposant est pair, $g_i(x)$ « se rapproche de » $+\infty$.

Partie C

Lorsque x se rapproche de 0 par valeurs négatives, A(x) se rapproche de $+\infty$.

Lorsque x se rapproche de 0 par valeurs positives, A(x) se rapproche de $-\infty$.

Lorsque x se rapproche de 0 par valeurs négatives, B(x) se rapproche de $-\infty$, et lorsque x se rapproche de 0 par valeurs positives, B(x) se rapproche de $+\infty$.

Corrigés des Travaux pratiques

TICE 1 Vitesses

Partie A

❶ *Voir Partie C, question c.*

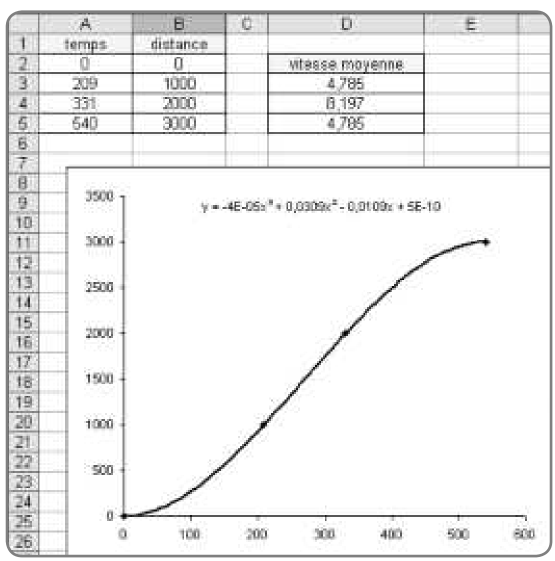
❷ Les trois vitesses moyennes demandées sont 4,8 ; 8,2 et 4,8 m·s^{-1}.

❸ La vitesse moyenne du cycliste sur tout le trajet est égale à 5,9 m·s^{-1}.
Sa vitesse minimale est bien sûr nulle car il part à l'arrêt.
Sa vitesse maximale ne peut être trouvée.

Partie B

❶ (*Voir ci-contre*)

❷ • La version actuelle du tableur d'Open-Office ne permet pas encore de choisir comme courbe de tendance celle d'une fonction polynôme de degré 3, mais seulement une fonction affine ; les vitesses demandées seront alors toutes égales à 5,68.

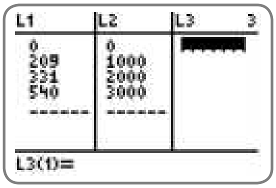


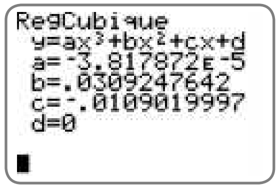
	A	B	C	D
1	temps	distance		
2	0	0		vitesse moyenne
3	209	1000		4,785
4	331	2000		8,197
5	540	3000		4,785

• La version actuelle du tableur de Microsoft Office permet de choisir comme courbe de tendance celle d'une fonction polynôme de degré 3, mais l'équation qui est donnée n'est pas une bonne approximation, en particulier lorsque x vaut 3 000.

• Par contre, les calculatrices donnent d'excellentes « courbes de tendance » en utilisant l'entrée « statistique à deux variables ».

On pourra prendre $y = -0{,}000\,0381\,787\,2x^3 + 0{,}030\,924\,764\,2x^2 - 0{,}010\,901\,999\,7x$.





3 **a.** Avec $f(x) = -0{,}000\,0381\,787\,2x^3 + 0{,}030\,924\,764\,2x^2 - 0{,}010\,901\,999\,7x$, on trouve :

• Vitesse moyenne entre les instants 270 et 280 : 8,335 m·s^{-1}.

• Vitesse moyenne entre les instants 270 et 271 : 8,339 m·s^{-1}.

• Vitesse moyenne entre les instants 270 et 270,1 : 8,339 m·s^{-1}.

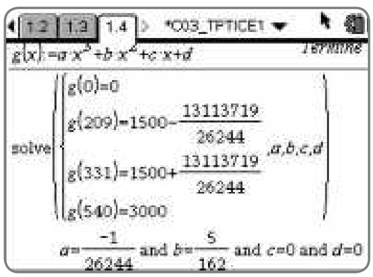
b. Si $h > 0$, entre les instants 270 et 270 + h, la distance parcourue est égale à $f(270 + h) - f(270)$ et le temps qui s'est écoulé est égal à h.

Si $h < 0$, entre les instants 270 et 270 + h, la distance parcourue est égale à $f(270)-f(270 + h)$ et le temps qui s'est écoulé est égal à $-h$.

c. Comme l'intervalle de temps devient de plus en plus petit, on pourra dire que cette vitesse moyenne tendra vers une vitesse instantanée.

Partie C

a.



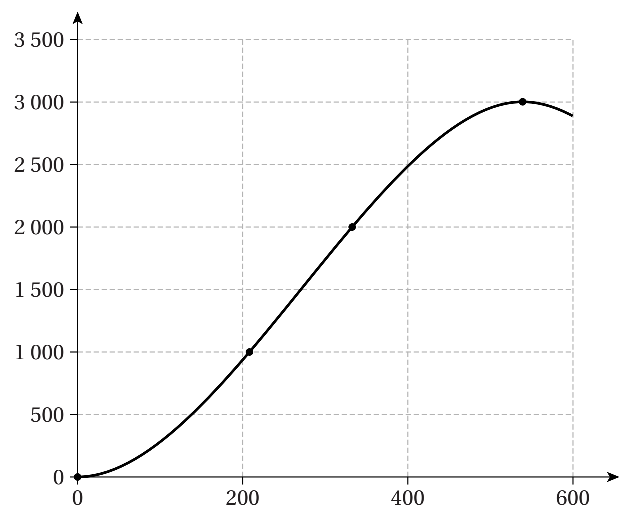
b. $g'(x) = -\dfrac{1}{8\,748}x^2 + \dfrac{5}{81}x$

g est croissante sur [0 ; 540] car sa dérivée est nulle en 0 et en 540, et strictement positive sur [0 ; 540].

c. (*Voir ci-contre*).

d. $g'(270) = \dfrac{25}{3} \approx 8{,}33$m·s^{-1} soit 30 km·h^{-1}. Ceci est la vitesse instantanée en $t = 270$.

e. Comme g' est une fonction polynôme de degré 2, son maximum peut être trouvé rapidement. Il est atteint en $t = 270$.



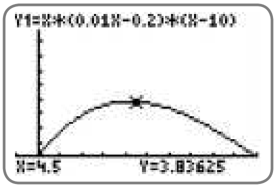
TICE 2 Cas particulier de courbes de Bézier

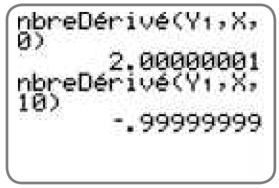
1 **a.** $f(0) = f(10) = 0$. Donc les points O et M se situent sur la courbe de f.

b. $f'(x) = 3ux^2 + 2(v - 10u)x - 10v$

$$\begin{cases} f'(0) = 2 \\ f'(10) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10v = 2 \\ 300u + 20(v - 10u) - 10v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -0{,}2 \\ u = 0{,}01 \end{cases}$$

c.

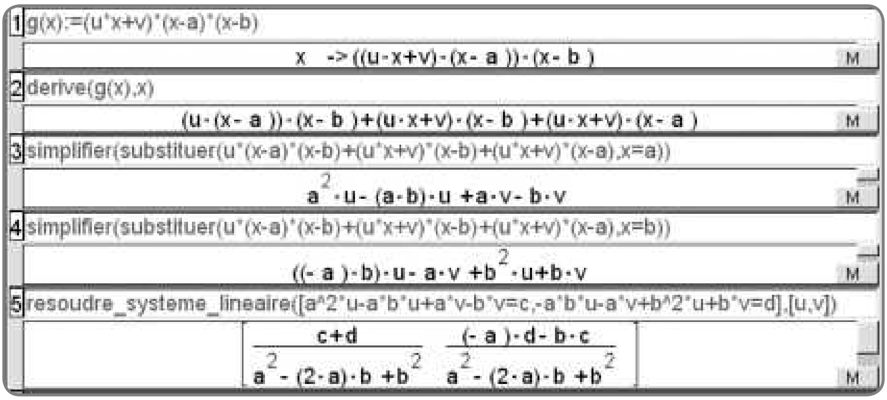




2 **a.** $g(a) = g(b) = 0$. Donc les points A et B se trouvent sur la courbe de g.

b.

• Avec calcul formel



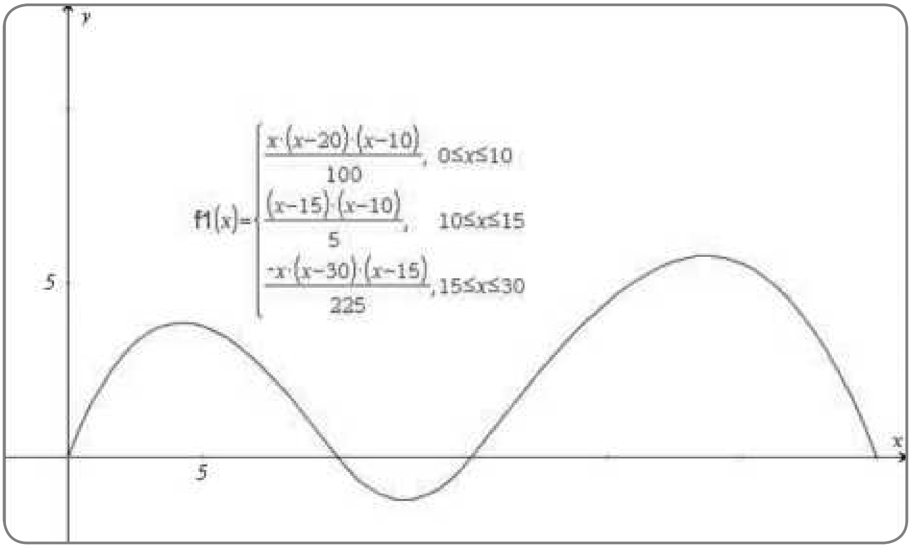
• Sans calcul formel

La fonction g se développe en $g(x) = (ux + v)(x^2 - ax - bx + ab)$.
La fonction dérivée g' est de la forme $g'(x) = u(x - a)(x - b) + (ux + v)(2x - a - b)$.
Cette expression de $g'(x)$ permet les calculs les plus rapides si l'on n'utilise pas de logiciel de calcul formel :

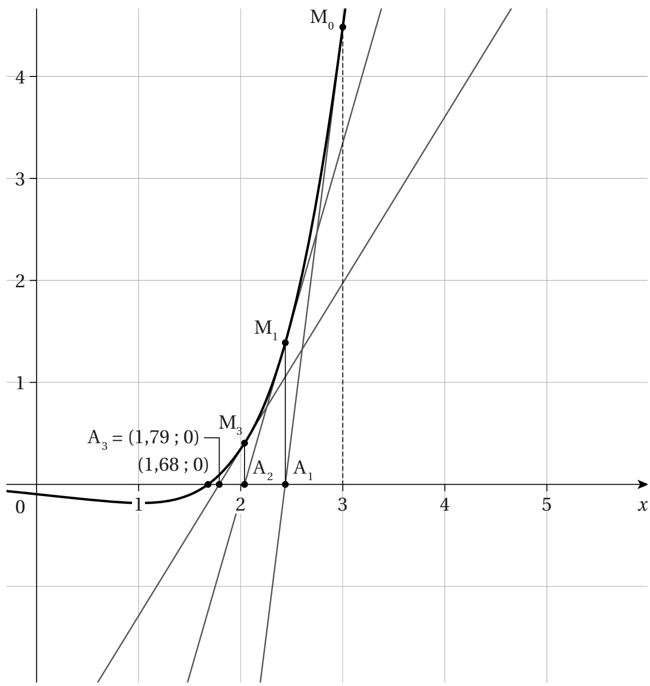
$$\begin{cases} g'(a) = c \\ g'(b) = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ua + v)(a - b) = c \\ (ub + v)(b - a) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{c + d}{(a - b)^2} \\ v = -\dfrac{bc + ad}{(a - b)^2} \end{cases}$$

3 En utilisant le résultat établi dans la question **2**, on obtient :

Intervalle	a	b	c	d	$f(x)$
[0 ; 10]	0	10	2	– 1	$\dfrac{1}{100} \times x(x - 10)(x - 20)$
[10 ; 15]	10	15	– 1	1	$-\dfrac{1}{5} \times (x - 10)(x - 15)$
[15 ; 30]	15	30	1	– 2	$-\dfrac{1}{225} \times x(x - 15)(x - 30)$



TICE 3 Méthode de Newton



1 L'abscisse du point A_3 est environ 1,79 et, graphiquement, l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses est environ 1,68.

2 **a.** *cf. cours.*

b. Comme l'ordonnée du point A_1 est nulle, on déduit de la question précédente que son abscisse est égale à

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On constate qu'une hypothèse nécessaire pour calculer ce point d'intersection est que la tangente ne soit pas parallèle à l'axe des abscisses.

c. De même, $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

3 **a.** L'étude du signe de $f'(x) = \dfrac{x^4 - 1}{10}$ permet de donner le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		+	0	–	0	+	
f		↗	–0,01	↘	–0,18	↗	

b.

	A	B	C	D
1		Coordonnées points Mi		
2	indice i	abscisse xi	ordonnée yi	dérivée en xi
3	0	3,0000000000	4,4600000000	8,0000000000
4	1	2,44250000000	1,39436273978	3,45908442125
5	2	2,03939832049	0,40163045289	1,62984913701
6	3	1,79297646231	0,09130023937	0,93347113974
7	4	1,69516921848	0,01044262645	0,72575693695
8	5	1,68078061823	0,00019999539	0,69807576999
9	6	1,68049412298	0,0000007793	0,69753176928
10	7	1,68049401125	0,00000000000012	0,69753155718
11	8	1,68049401125	0,00000000000000	0,69753155718

c. En C3 : = (B3^5-5*B3-5)/50   En D3 : = (B3^4-1)/10
La formule à mettre dans la cellule B4 est une conséquence immédiate de la question **2**.
d. D'après le tableur, une valeur approchée est 1,680494 (à 10^{-6} près si les approximations faites par le tableur dans les calculs sont négligeables).

Algorithmique 1 — Déterminer une limite en zéro

1

```
Traitement      Affecter 1 aux variables I, x1 et D
Sortie          Tant que I < 100 et D > 0,0001 faire
                   affecter (5x1^2 + 3x1)/x1 à y1
                   afficher I, x1 et y1
                   affecter x1/2 à x2
                   affecter (5x2^2 + 3x2)/x2 à y2
                   affecter |y2-y1| à D
                   affecter i + 1 à i
                   affecter x2 à x1
                Fin du tant que
                Afficher le mot "limite" et y1 avec 3 décimales.
```

2 Voici deux exemples avec Scilab puis Xcas.

Avec Scilab :

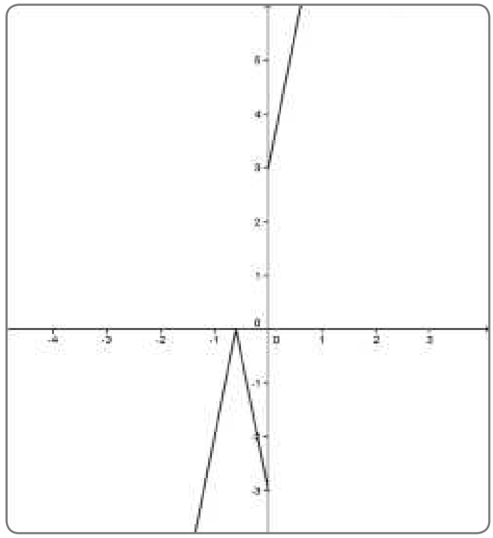
```
//Traitement
i=1;x1=1;d=1;
while i<100 & d>0.0001 do
     y1=(5*x1**2+3*x1)/x1;
     //afficher(y1,x1,i);
     x2=x1/2;
     y2=(5*x2**2+3*x2)/x2;
     d=abs(y2-y1);
     i=i+1;
     x1=x2;
end
lim=round(10000*y1)/10000;
//Sortie
afficher("la limite semble Ãªtre "+string(lim))
```

Avec Xcas **:**

```
limitef(N):={
i:=1;x1:=1;d=1;
tantque i<1000000 et d>0.0001 faire
  y1:=(5*x1^2+3*x1)/x1;
  x2:=x1/2;y2:=(5*x2^2+3*x2)/x2;
  d:=abs(y2-y1);i:=i+1;x1:=x2;
ftantque;
afficher "la limite pourrait être ",round(y2,3);
}
```

3 **a.** L'algorithme modifié à la calculatrice donne le même résultat pour la fonction g que pour la fonction f.

La représentation graphique de g montre cependant que la limite de g en zéro ne peut pas être 1 :



On peut par ailleurs remarquer que pour $x > 0$, $g(x) = 3 + 5x$ alors que pour $-0{,}6 < x < 0$, $g(x) = -3 - 5x$.

b. La limite en zéro proposée par l'algorithme n'est pas exacte car aucun calcul n'a été réalisé pour des valeurs négatives de la variable.

4 Pour améliorer l'algorithme initial, il faudrait également faire les calculs pour des valeurs négatives de la variable et donc ajouter une deuxième boucle conditionnelle « Tant que » puis, pour conclure, comparer les deux valeurs trouvées :

```
Traitement      Affecter 1 aux variables I, x1 et D
Sortie          Tant que I < 100 et D > 0,0001 faire
                    affecter (5x1² + 3x1)/x1 à y1
                    afficher I, x1 et y1
                    affecter x1/2 à x2
                    affecter(5x2² + 3x2)/x2 à y2
                    affecter |y2-y1| à D
                    affecter i + 1 à i
                    affecter x2 à x1
                Fin du tant que
                Affecter y1 à résultat1
                Affecter 1 aux variables I et D
                Affecter – 1 à la variable x1
                Tant que I < 100 et D > 0,0001 faire
                    affecter (5x1² + 3x1)/x1 à y1
                    afficher I, x1 et y1
                    affecter x1/2 à x2
                    affecter(5x2² + 3x2)/x2 à y2
                    affecter |y2-y1| à D
                    affecter i + 1 à i
                    affecter x2 à x1
                Fin du tant que
                Affecter y1 à résultat2.
                Si resultat1 = résultat2 alors afficher resultat1.
                Sinon afficher « pas de limite ».
```

5 L'algorithme ne fonctionnera pas si le comportement de la fonction f change pour des valeurs très proches de 0 que l'on n'aurait pas atteintes, par exemple que D soit devenu nul.

Il suffit donc de prendre une fonction qui a les mêmes valeurs en 0,5 et 1 pour que la boucle ne soit plus parcourue et qu'une fausse valeur de limite en 0 soit affichée.

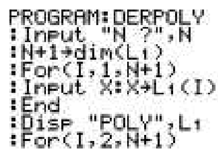
Exemple : pour $h(x) = (x - 0{,}5)(x - 1)(x + 1)(x + 0{,}5)$, la limite annoncée serait de 0 alors qu'elle est de 0,25.

Algorithmique 2 — Dérivée d'une fonction polynôme de degré *n*

1

```
Entrée :          L'entier naturel n
Traitement :      Pour i allant de 0 à
Sortie :             demander un nombre réel et l'affecter à la variable xi
                  Pour i allant de 1 à n
                     affecter le nombre i*xi à la variable xi-1
                  Pour i allant de 0 à n-1
                     afficher le texte x^i et le nombre xi
```

2

<table>
<tr><th>Avec XCAS :</th><th>Avec calculatrice TI :</th><th>Avec calculatrice Casio :</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Algorithmique 3 — Balayage

Partie A

1 $f' = g$

2 **a.** $g(x) = (x-3)(x^2-2)$.

b.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$(x-3)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
(x^2-2)		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3 Le tableau de variations de la fonction f est donc :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		3		$+\infty$
Signe de $f'(x) = g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↘	$-4\sqrt{2}-1$	↗	$4\sqrt{2}-1$	↘	$\frac{9}{4}$	↗	

Partie B

1 b, c et d sont les bonnes réponses car, dans ces situations, la fonction g change de signe entre x_1 et x_2.

2 Sur un intervalle $[a\,;\,b]$ découpé en n intervalles de même amplitude $e = \dfrac{(b-a)}{n}$, l'algorithme recherche les changements de signe de la fonction g en étudiant successivement si $g(a+ke)$ et $g(a+(k+1)e)$ sont de signes différents lorsque k est un entier compris entre 0 et $n-1$.
Si pour une valeur k_0 de k, $g(a+k_0e)$ est nul, l'algorithme affiche $a+k_0e$. Si pour une valeur k_0 de k, $g(a+k_0e)$ et $g(a+(k_0+1)e)$ sont de signes différents, l'algorithme affiche l'intervalle $[a+k_0e\,;\,a+(k_0+1)e]$.

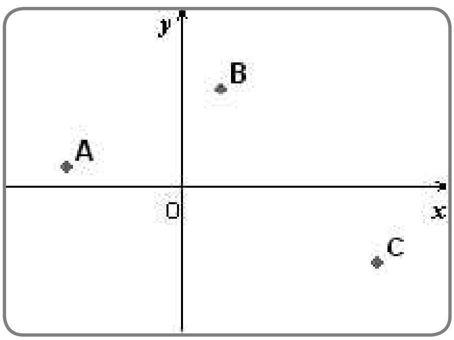
❸ et **❹**
Par exemple :

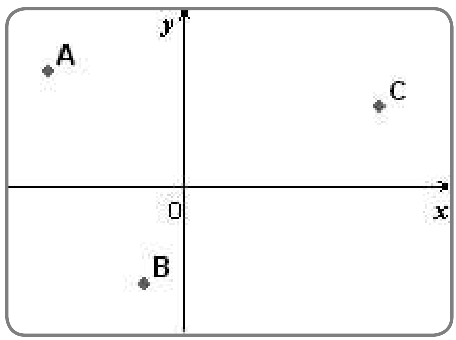
Avec calculatrice TI :	Avec calculatrice Casio :
PROGRAM:BALAYAG1 :Input "A ? ",A :Input "B ? ",B :Input "N ? ",N :(B-A)/N→E:0→I :For(K,0,N-1) :A+K*E→X:Y1→Y:X+ E→X:Y1→Z :If Y=0:Then:I+1 →I:Disp "VALEUR" ,I,"EST",X-E:End :If Y*Z<0:Then:I +1→I:Disp "VALEU R",I,"DANS",X-E, X:End:End :If I=0:Then:Dis p "PAS DE VALEUR ":End	======BALAYAG1====== "A "?→A↵ "B "?→B↵ "N "?→N↵ (B-A)÷N→E:0→I↵ For 0→K To N-1↵ A+K×E→X:Y1→Y:X+E→X:Y1 →Z↵ If Y=0:Then I+1→I:"VA LEUR":I◢ "EST":X-E◢ IfEnd↵ If Y×Z<0:Then I+1→I:" VALEUR":I◢ "DANS":(X-E,X)◢ IfEnd:Next↵ If I=0:Then "PAS DE V ALEUR":IfEnd

❺ **a.** Cette fonction s'annule en deux valeurs proches de –1 000 et 1 000 et ayant une valeur absolue très grande. Si l'on ne choisit pas au départ un intervalle qui les contient, on ne pourra pas les trouver.
b. Dans ce cas, la fonction ne s'annule qu'en un point sans changer de signe. Pour la trouver, il faudra que l'une des *n* valeurs calculées soit exactement égale à $-\pi$. Ceci ne peut se produire, sauf si le logiciel calcule en valeur exacte et que la valeur $-\pi$ est une des valeurs de $a + ke$.

Partie C

a. Les figures qui répondent à la question sont les suivantes.
La valeur de $f(x_2)$ ne doit pas se trouver entre les valeurs $f(x_1)$ et $f(x_3)$.





b. Par exemple :

Avec calculatrice TI :	Avec calculatrice Casio :
PROGRAM:BALAYAG2 :Input "A ? ",A :Input "B ? ",B :Input "N ? ",N :(B-A)/N→E:0→I :For(K,0,N-2) :A+K*E→X:Y1→Y :X+E→X:Y1→Z :X+E→X:Y1→T :If (Z-Y)*(T-Z)< 0:Then:I+1→I:Dis p "VALEUR",I,"DA NS",X-2*E,X:End :End :If I=0:Then:Dis p "PAS DE VALEUR ":End	======BALAYAG2====== "A "?→A↵ "B "?→B↵ "N "?→N↵ (B-A)÷N→E:0→I↵ For 0→K To N-2↵ A+K×E→X:Y1→Y:X+E→X:Y1 →Z:X+E→X:Y1→T↵ If (Z-Y)×(T-Z)<0:Then I+1→I:"VALEUR":I◢ "DANS":(X-2×E,X)◢ IfEnd:Next↵ If I=0:Then "PAS DE V ALEUR":IfEnd

Problème ouvert 1 Demi-cercle et fonction

Comme $x^2 + y^2 = 1$ et que la valeur y est positive, on a :

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

• En $x = 1$

Le nombre dérivé correspond au coefficient directeur de la tangente au point correspondant. Calculons-le.

Remarque : Un logiciel de géométrie dynamique ne permet pas de conjecturer le résultat ; en effet, lorsque le point M se rapproche du point A, la droite (AM) disparaît assez rapidement.

Pour $-2 \leqslant h < 0$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{-2h-h^2}}{h} = \dfrac{-h\sqrt{-\frac{2}{h}-1}}{h} = -\sqrt{-\dfrac{2}{h}-1}$.

Or $-\sqrt{-\dfrac{2}{h}-1}$ n'admet pas de limite finie lorsque h tend vers 0 par valeurs inférieures. Cette dernière affirmation peut être prouvée par l'absurde en montrant que pour tout nombre réel α, les valeurs de $-\sqrt{-\dfrac{2}{h}-1}$ ne peuvent pas être proches de α lorsque h est proche de 0.

Donc f n'est pas dérivable en 1.

• En $x = -1$

On procède de même.

Pour $0 < h \leqslant 2$, $\dfrac{f(-1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{2h-h^2}}{h} = \dfrac{h\sqrt{\frac{2}{h}-1}}{h} = \sqrt{\dfrac{2}{h}-1}$.

Or $\sqrt{\dfrac{2}{h}-1}$ n'admet pas de limite finie lorsque h tend vers 0 par valeurs supérieures.

Donc f n'est pas dérivable en -1.

Prolongement

Pour $-1 < a < 1$ et $-1 < a + h < 1$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{1-a^2-2ah-h^2}-\sqrt{1-a^2}}{h} = \frac{-2ah-h^2}{h\left(\sqrt{1-a^2-2h-h^2}+\sqrt{1-a^2}\right)}$$

$$= \frac{-2a-h}{\sqrt{1-a^2-2h-h^2}+\sqrt{1-a^2}}$$

qui admet comme limite $\dfrac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$ lorsque h tend vers 0.

Problème ouvert 2 Disques tangents dans un carré

1 Étude de la première situation

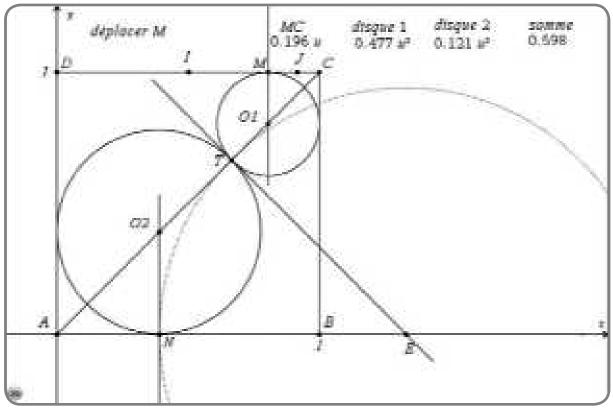
Première étape : réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Dans un carré ABCD, placer un point M sur [CD] ; O_1, centre du premier cercle, est l'intersection du segment [AC], diagonale du carré, et de la perpendiculaire en M à (CD).

La perpendiculaire à (AC) en T coupe (AB) en E ; le cercle de centre E passant par T coupe (AB) en N, point de contact du second cercle et permettant de placer O_2, centre de ce cercle.

Les positions limites I et J du point M sont obtenues lorsqu'un des cercles est inscrit dans le carré.

On peut conjecturer que l'aire est minimale lorsque le point M est environ aux 2/3 du segment [CD] et alors les disques semblent de même rayon.
L'aire est maximale lorsque l'un des disques est inscrit dans le carré.

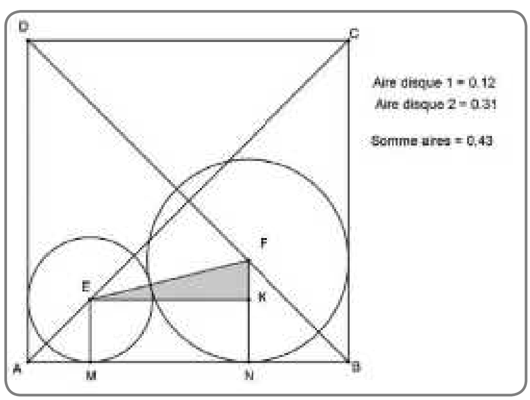


Deuxième étape : prouver les conjectures émises.
Prenons comme unité la longueur du côté du carré, soit CD = 1.
Notons x la longueur MC. On montre que les valeurs possibles pour x sont les nombres compris entre $1{,}5 - \sqrt{2}$ et 0,5.
Notons y la longueur AM. Comme la longueur de la diagonale du carré est $\sqrt{2}$, on a :
$x(1 + \sqrt{2}) + y(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}$
Donc $y = -x + 2 - \sqrt{2}$.
La fonction représentative de la somme des aires des deux disques est égale à :
$f(x) = \pi x^2 + \pi(-x + 2 - \sqrt{2})^2 = \pi(2x^2 - 2(2 - \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})^2)$
Le tableau de variations de f permet de répondre à la question.

x	$1{,}5 - \sqrt{2}$		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		0,5
$f'(x)$		–	0	+	
f	$\pi(4{,}5 - 3\sqrt{2})$	↘	$\pi(3 - 2\sqrt{2})$	↗	$\pi(4{,}5 - 3\sqrt{2})$

En conclusion, le minimum de la somme des aires est atteint lorsque x est égal à $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et vaut $\pi(3 - 2\sqrt{2})$. Le maximum de la somme des aires est atteint lorsque x est égal à 0,5 ou $1{,}5 - \sqrt{2}$ et vaut $\pi(4{,}5 - 3\sqrt{2})$.
Lorsque x vaut $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, l'aire de chaque disque vaut $(1{,}5 - \sqrt{2})\pi$.

2 Étude de la deuxième situation
Première étape : réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



Cette construction ne permet pas d'émettre les conjectures de manière idéale. Il semblerait que la somme des deux aires soit minimale lorsque le point M est environ au quart du segment [AB] ; alors les disques sont de même rayon.
La somme des aires semble maximale lorsque l'un des disques est inscrit dans le carré.

Deuxième étape : prouver les conjectures émises.
Notons x la longueur AM et y la longueur BN, on monte que les valeurs possibles pour x (et pour y) sont les nombres compris entre $1{,}5 - \sqrt{2}$ et 0,5.
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle EKF :

$$(x+y)^2 = (1-x-y)^2 + (x-y)^2 \qquad (1)$$

Un logiciel de calcul formel permet de montrer que :
(1) $\Leftrightarrow (y-(x+2\sqrt{x}+1))(y-(x-2\sqrt{x}+1)) = 0$
$\Leftrightarrow y = x+2\sqrt{x}+1$ ou $y = x-2\sqrt{x}+1$.
Comme $0 \leqslant y \leqslant 1$, on a $y = x-2\sqrt{x}+1$.
La fonction représentative de la somme des aires est égale à :

$$g(x) = \pi x^2 + \pi y^2 = \pi x^2 + \pi(x-2\sqrt{x}+1)^2$$

$$g'(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{x}}\left(2x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} - 1\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{x}}\left(x - \sqrt{x} + 1\right)(2\sqrt{x} - 1)$$

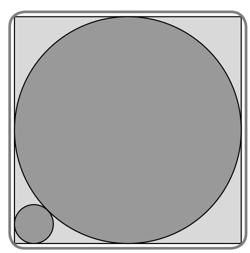
Le logiciel de calcul formel permet d'obtenir le signe de la dérivée.
Le tableau de variations de g permet de répondre à la question.

x	$1{,}5-\sqrt{2}$		0,25		0,5
$g'(x)$		−	0	+	
g	$\frac{(4{,}5-3\sqrt{2})}{\pi}$	↘	$\frac{\pi}{8}$	↗	$\frac{(4{,}5-3\sqrt{2})}{\pi}$

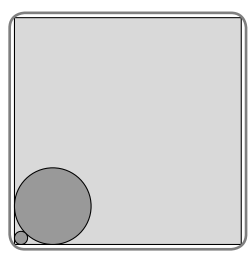
En conclusion, le minimum de la somme des aires est atteint lorsque x vaut $\frac{1}{4}$ et est égal à $\frac{\pi}{8}$.
Le maximum de la somme des aires est atteint lorsque x vaut 0,5 ou $1{,}5 - \sqrt{2}$ et est égal à $\frac{(4{,}5-3\sqrt{2})}{\pi}$.

3 Il ne reste plus qu'à montrer qu'il n'existe pas d'autres situations possibles.
On peut, quitte à modifier le nom des sommets, se ramener au cas où un disque est tangent aux côtés [AB] et [AD].
Le deuxième disque peut alors être tangent aux côtés [AB] et [AD], [AB] et [BC], [AB] et [CD], [BC] et [CD], [BC] et [AD] ou [CD] et [AD]. On ne retrouve que des situations déjà étudiées et des situations à préciser :

• lorsque le second disque est tangent à deux côtés opposés du carré, la situation est « figée » et est un cas particulier déjà rencontré ;

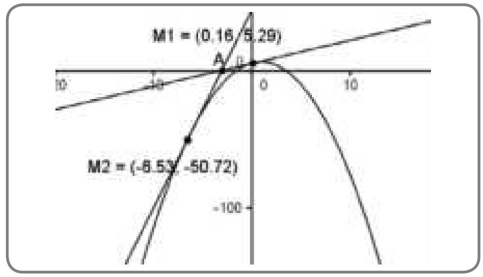


• lorsque les disques sont tangents aux deux mêmes côtés du carré et non confondus, la somme des aires est maximale lorsque le plus grand est inscrit dans le carré. Cette somme peut être rendue aussi petite que l'on veut car elle tend vers zéro lorsque les deux rayons tendent vers zéro !



Problème ouvert 3 **Sur une parabole**

Un logiciel de géométrie dynamique permet de conjecturer que les points de la parabole d'abscisse x, comprise entre $\alpha \approx -6{,}5$ et $\beta \approx 0{,}15$ sont visibles depuis A.



Recherche des tangentes à la parabole passant par A

Les points M de la parabole visibles du point A sont les points situés entre les deux points de contact des tangentes à la parabole issues de A. Le logiciel *GeoGebra* permet de tracer rapidement ces deux tangentes.

Déterminons les abscisses des points de contact des tangentes avec la parabole.

Une tangente à la parabole au point de coordonnées $(a\,;-a^2+2a+5)$ a pour équation :

$$y = (-2a+2)(x-a) - a^{2} + 2a + 5$$

Cette droite passe par le point A$(-3\,;0)$ si et seulement si :

$0 = (-2a+2)(-3-a) - a^2 - 2a + 5 \Leftrightarrow a^2 + 6a - 1 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = -3-\sqrt{10}$ ou $a = -3+\sqrt{10}$. On retrouve bien les valeurs conjecturées.

Lorsque a est compris entre $-3-\sqrt{10}$ et $-3+\sqrt{10}$, le point de la parabole d'abscisse a est donc vu du point A.

Remarque : Une autre façon de raisonner consiste à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que les droites passant par A coupent la parabole en exactement deux points. Les droites non verticales passant par A ont comme équation $y = m(x+3)$ avec m paramètre réel quelconque.

Déterminons alors les conditions sur m pour que l'équation :

$$-x^2 + 2x + 5 = m(x+3) \quad (1)$$ admette au moins une solution.

(1) $\Leftrightarrow -x^2 + (2-m)x + 5 - 3m = 0$. Cette équation admet des racines si et seulement son discriminant est positif c'est-à-dire si $(2-m)^2 + 4(5-3m) \geqslant 0$. On retrouve alors l'intervalle dans lequel doivent se trouver les pentes des droites passant par A qui répondent à la question posée, puis les abscisses de M cherchées.

Corrigés des exercices et problèmes

QCM Pour bien commencer

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 343.

Exercices d'application

1 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 343.

2 **a.**

h	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}000\,01$	$-0{,}000\,000\,1$
$f(h)$	$-3{,}01$	$-2{,}995\,6$	$-2{,}999\,506$	$-2{,}999\,995\,001$	$-2{,}999\,999\,95$

h	$0{,}000\,000\,1$	$0{,}000\,01$	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	1
$f(h)$	$-3{,}000\,000\,05$	$-3{,}000\,005\,001$	$-3{,}000\,506$	$-3{,}005\,6$	$-3{,}11$	$-9{,}5$

b. « Lorsque h tend vers 0, $f(h)$ tend vers -3 et $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = -3$. »

3 **a.** Développer.

b. Pour $h \neq 0$,

$$\frac{(10+h)^3 - 10^3}{h} = h^2 + 30h + 300$$

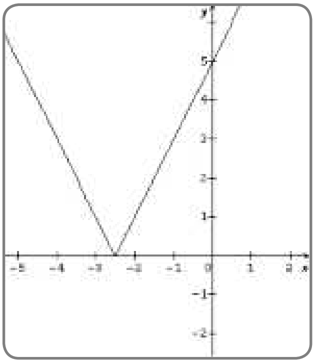
c. Le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto x^3$ en $x = 10$ vaut 300.

4 **a.** Développer.

b. $\dfrac{(-1+h)^4 - (-1)^4}{h} = h^3 - 4h^2 + 6h - 4.$

c. Le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto x^4$ en $x = -1$ vaut -4.

5 **a.**



b. $\alpha = -2{,}5$

c. $A = \dfrac{f(-2{,}5+h)-f(-2{,}5)}{h}$ vaut 2 si $h > 0$ et -2 si $h < 0$.

A n'a pas de limite lorsque h tend vers 0 donc f n'est pas dérivable en $-2{,}5$.

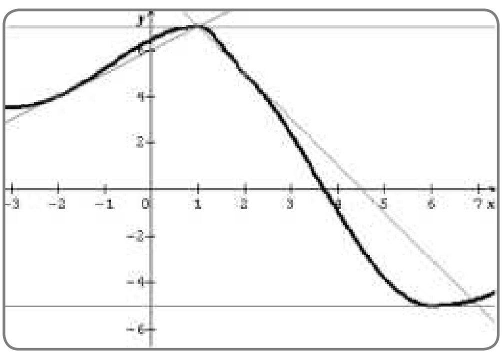
6 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 343.

7

x		0	3	4
$f'(x)$	**a.**	2	0	-1
	b.	$-1{,}5$	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{4}$
	c.	0	$-3{,}5$	0
	d.	-1	1	1

8 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 343.

9 **a.**, **b.** et **c.**



10 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 343.

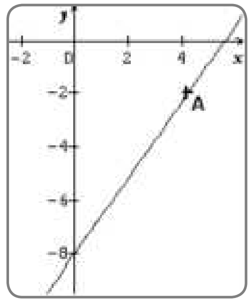
11

x	0	1	2
$f'(x)$	0	1	-4

12 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

13 Équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A :

$y = \sqrt{2}\,x - 8$



14 $T_A : y = -0{,}5x - 1$

$T_B : y = 2x - 5$

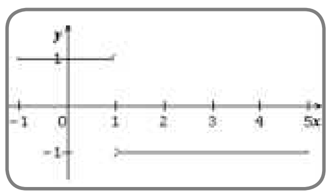
$T_C : y = x - 1$

$T_B \cap T_C = \{D(4\,;3)\}$.

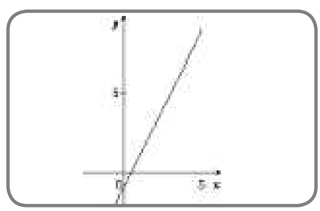
Ces 3 tangentes ne sont pas concourantes car D n'appartient pas à T_A.

15 **a.**

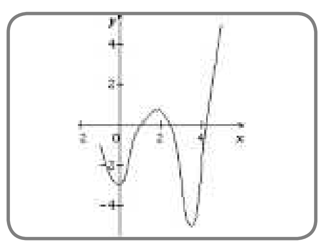
b.



c.



d.



16 $f'(x) = 0$.

17 $f'(x) = 4x^3 - 3$.

18 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

19 $f'(x) = -2x^4 - \pi - \dfrac{1}{3x^2}$.

20 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

21 $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{6}{x^3}$.

22 $f'(x) = \dfrac{2000}{(100x+1000)^2}$.

23 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

24 $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{9}{2}x\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(3x^2-1)^2}$.

25 $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$.

26 $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2-2)^2}$.

27 Un logiciel de calcul formel donne :

$$f'(x) = \frac{-12x^5 - 6x^4 + 2x^2 + 24x + 4}{\left(x^4 - 4x^2 - x + 2\right)^2}$$

Autre méthode : Le nombre dérivé en $x = 1$ de f obtenu à la calculatrice vaut 3. Par la fonction f' proposée, ce nombre devrait être égal à –4.

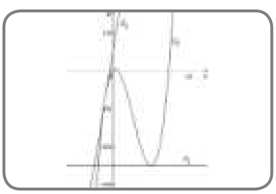
28 **a.** et **b.** $f'(x) = g'(x) = \dfrac{6x^2 - 10x - 11}{(x^2+x+1)^2}$.

c. $f(x) - g(x) = 10$.

29 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

30 **a.** $y = -50$. **b.** $y = 24x + 10$.

c.



d. $f(x) - (24x + 10) = x^3 - 8x^2 - 19x - 10$
$= (x - 10)(x + 1)^2$

Si $x > 10$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de d_2 ; si $x < 10$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de d_2.

31 **a.** $\alpha \times 2 + 2(1 - \alpha) = 2$

b. Non ; pas la droite d'équation $x = 2$.

c. Il faut résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{x^3 - 24x^2}{64} = ax + 2(1-a) \\ \dfrac{3(x^2 - 16x)}{64} = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3(x^2-16x)}{64} \\ \dfrac{x^3 - 24x^2}{64} = \left(\dfrac{3(x^2-16x)}{64}\right)(x-2) + 2 \end{cases}$$

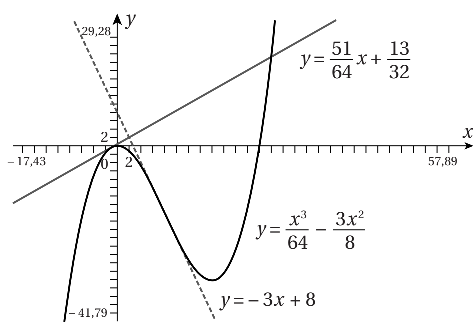
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3(x^2-16x)}{64} \\ \dfrac{x^3 - 24x^2}{64} = \left(\dfrac{3(x^2-16x)}{64}\right)(x-2) + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3(x^2-16x)}{64} \\ 2x^3 - 30x^2 + 96x + 128 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3(x^2-16x)}{64} \\ 2(x-8)^2(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ a = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ a = \dfrac{51}{64} \end{cases}$$

Les droites d'équation $y = -3x + 8$ et $y = \dfrac{51}{64}x + \dfrac{13}{32}$ sont tangentes à $\mathscr{C}_f$.



32 • Un tracé donne l'impression que la droite est tangente en $x = -0,5$. Le calcul d'une équation de la tangente en $x = -0,5$ le confirme.

$f'(x) = 4x^3 - 2x$.

• Une étude de la variation de f et un zoom à la calculatrice permet de conclure que la droite a deux autres points d'intersection en :

$x \approx -0,2$ et $x \approx 1,2$

• Un logiciel de calcul formel donne 3 points d'intersection aux points d'abcisse :

$x_1 = -0,5$ $\quad x_2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ $\quad x_3 = \dfrac{-\sqrt{2}+1}{2}$

et on calcule, toujours avec le logiciel, les nombres dérivés en ces points, pour montrer que la droite n'est pas tangente en x_2 ou en x_3.

La droite est donc tangente en un point exactement à la courbe de f.

33 Pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$.

34 Pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)-a}{h} = 1$.

35 **a.** $\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$

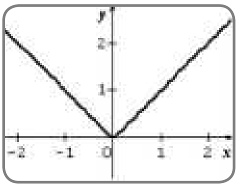
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right) = h$

$\Leftrightarrow h = h$

b. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

c. Pour $h > 0$: $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$. Or $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ ne peut avoir une limite l lorsque h tend vers 0 car non borné. f n'est pas dérivable en $x = 0$.

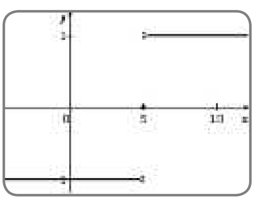
36 **a.**



b. Sur $]0\,;+\infty[$, $f(x) = x$ et $f'(x) = -1$.
Sur $]-\infty\,;0[$, $f(x) = -x$ et $f'(x) = 1$.

c. Pour $h > 0$: $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ vaut $\dfrac{h}{h}$ et admet comme limite 1. Pour $h < 0$: $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ vaut $\dfrac{-h}{h}$ et admet comme limite –1. Donc sa limite lorsque h tend vers 0 n'existe pas. f n'est pas dérivable en $x = 0$.

37 **a.** Sur $]5\,;+\infty[$, $f(x) = 1$ et $f'(x) = 0$.
b. Sur $]-\infty\,;5[$, $f(x) = -1$ et $f'(x) = 0$.
c.



d. Pour $h > 0$: $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$ vaut $\dfrac{1}{h}$.

Pour $h < 0$: $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$ vaut $-\dfrac{1}{h}$.

Donc sa limite lorsque h tend vers 0 n'existe pas. f n'est pas dérivable en $x = 5$.

38 **a.** $0^2 - 4{,}6 \times 0 = 0$ et $5^2 - 4{,}6 \times 5 = 2$.
b. $f'(0) = -4{,}6$.
c. Parabole passant par O : $g(x) = ax^2 + bx$

$g'(0) = 1 \Leftrightarrow b = 1$

Donc $g(x) = ax^2 + x$. Or $g(5) = 2$. D'où $a = -0{,}12$.

$g(x) = -0{,}12x^2 + x$

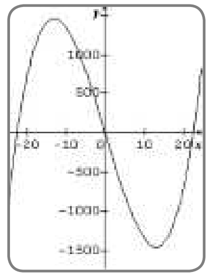
39 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

40 **a.** $f'(x) = x^2 - 169$

b.

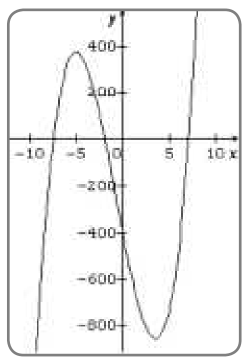
x	$-\infty$		-13		13		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
f		↗	$\dfrac{4394}{3}$	↘	$-\dfrac{4394}{3}$	↗	

c.



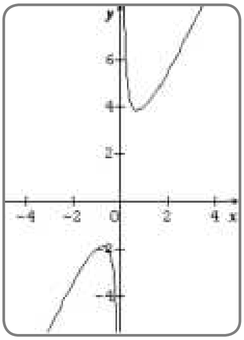
41 $f'(x) = 12x^2 + 18x - 210$

x	$-\infty$		-5		$3{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
f		↗	375	↘	$-853{,}25$	↗	



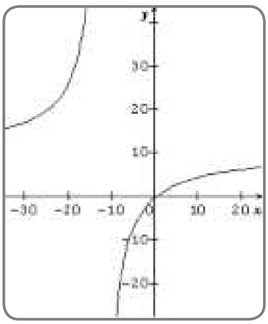
42 $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	$1-2\sqrt{2}$	↘	‖	↘	$1+2\sqrt{2}$	↗	



43 $f'(x) = \dfrac{123}{(x+12)^2}$

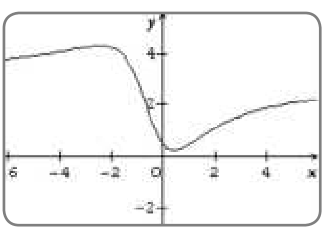
x	$-\infty$		12		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
f		↗	||	↘	



44 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

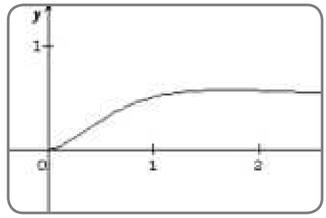
45 $f'(x) = \dfrac{5(x^2+2x-1)}{(x^2+x+2)^2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	$\dfrac{10\sqrt{2}+16}{7}$	↘	$\dfrac{-10\sqrt{2}+16}{7}$	↗	



46 $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}\left(x^2-3\right)}{2\left(x^2+1\right)^2}$.

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
f		↗	$\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}}}{4}$	↘	



47 Ce sont les mêmes que celles de $x \to x^3$.
Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

48 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

49 Sur $]4\,;+\infty[$ $x \mapsto -\sqrt{x}$ décroissante, $x \mapsto 2-\sqrt{x}$ décroissante, $x \mapsto \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$ croissante. Donc f croissante.

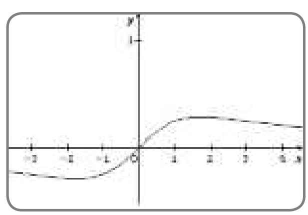
50 **a.** et **b.** $f'(x) = 2x - 7$.

x	$-\infty$		$3{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$-18{,}25$	↗	

c. Le maximum de f sur $[4\ ;6]$ est -12
car $f(4) = -18$ et $f(6) = -12$
Le maximum de f sur $[-10\ ;6]$ est 164
car $f(4) = -18$ et $f(-10) = 164$

51 $f'(x) = \dfrac{3-x^2}{\left(x^2+3\right)^2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$	↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$	↘	

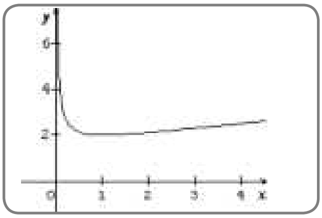


La fonction f admet un minimum sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ en $-\sqrt{3}$ qui vaut $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

La fonction f admet un maximum sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ en $\sqrt{3}$ qui vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

52 $f'(x)=\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

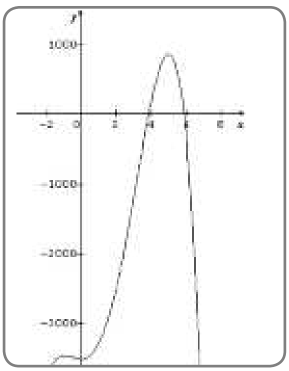
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
f	‖	↘	2	↗	



f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$ qui vaut 2 donc pour tout x strictement positif, $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geqslant 2$.

53 $f'(x) = -60x(x-5)(x+1)$

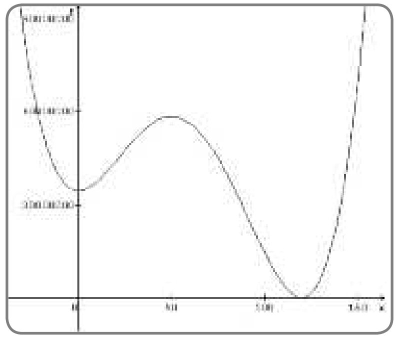
x	$-\infty$		-1		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
f		↗	-3456	↘	-3511	↗	864	↘	



Le maximum est atteint en $x = 5$ et vaut 864.

54 $f'(x) = 12x(x-120)(x-50)$

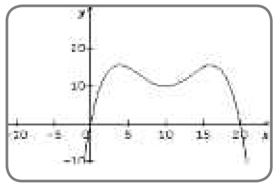
x	$-\infty$		0		50		120		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
f		↘	$34{,}6\times 10^6$	↗	$58{,}35\times 10^6$	↘	40 000	↗	



55 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

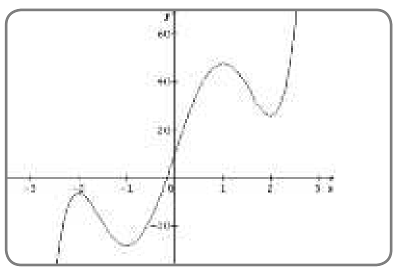
56 On ne peut pas en déduire que f admet un maximum en $x=10$. Un contre-exemple (graphique ou expression de f) le prouve.

$f(x) = -0{,}004x^4 + 0{,}16x^3 - 2{,}1x^2 + 10x$



57 **a. b.** $f'(x) = 15(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
f		↗	-6	↘	-28	↗	48	↘	26	↗	



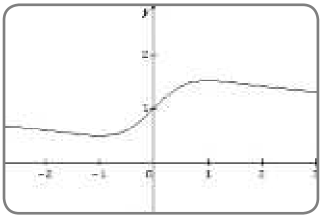
c. $k<-28$ ou $-6<k<26$ ou $k>48$: l'équation $f(x)=k$ a une solution.

$k=-28$ ou $k=-6$ ou $k=26$ ou $k=48$: l'équation $f(x)=k$ a deux solutions.

$-28<k<-6$ ou $26<k<48$: l'équation $f(x)=k$ a trois solutions.

58 $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	$0,5$	↗	$1,5$	↘	

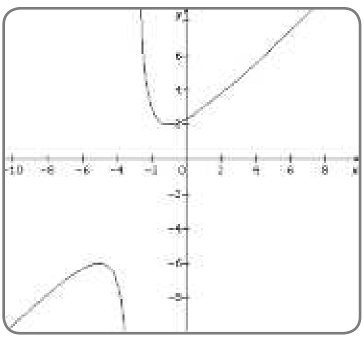


c. $((f(x))^2 - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ou $f(x) = 2$.
N'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

59 $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x+5)}{\left(x+3\right)^2}$

a. et **b.**

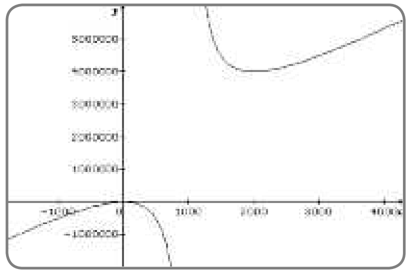
x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f		↗	-6	↘	||	↘	2	↗	



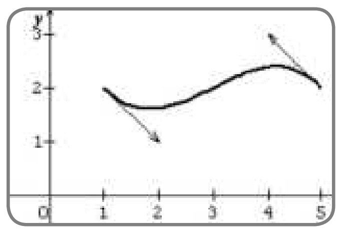
c. $x = -3$ n'est jamais solution.
Si $x \neq -3$: $x^2 + 4x + 7 = k(x+3) \Leftrightarrow f(x) = k$
Si $-6 < k < 2$: l'équation n'a pas de solution.
Si $k = -6$ ou $k = 2$: l'équation a une solution.
Si $k < -6$ ou $k > 2$: l'équation a deux solutions.

60 La dérivée s'annule en $x = -3 \times 10^{-6}$ ou $x = 5 \times 10^{-7}$
Fenêtrage 2 : $-10 < x < 10$ et $-6 < y < 6$.
Fenêtrage 3 : $-9 \times 10^{-6} < x < 9 \times 10^{-6}$ et $-1{,}3 \times 10^{-17} < y < 1{,}8 \times 10^{-17}$
Fenêtrage 1 :
$-3.0000376 \times 10^{-6} < x < -2.9999549 \times 10^{-6}$
et $1.34999999 \times 10^{-17} < y < 1.350000006 \times 10^{-17}$

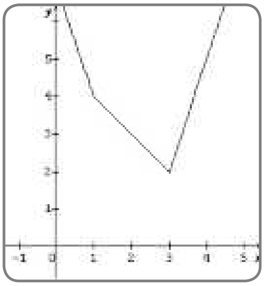
61 $f'(x) = \dfrac{1000x(x-2000)}{\left(x-1000\right)^2}$; $f(0) = -600$;
$f(2000) = 3999400$
Fenêtrage : $-2000 < x < 4000$ et $-2 \times 10^6 < y < 6 \times 10^6$



62 **1. a.** FAUX
$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow x \in \,]-\infty\,;1] \cup [2\,;+\infty[$.
Donc f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ et f est croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.
Mais f n'est pas croissante sur $]-\infty\,;1] \cup [2\,;+\infty[$ car ceci n'est pas un intervalle.
b. FAUX
Contre-exemple : f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 4 + x$.
Cette fonction f admet un minimum 4 sur son ensemble de définition pour $x = 0$ mais $f'(x) > 0$ pour tout x.
c. FAUX.
Contre-exemple donné graphiquement :
$f'(1) = f'(5) = -1$ et f est croissante sur l'intervalle $[2\,;4]$.



d. FAUX.
Contre-exemple : f définie sur $I = [-1\,;10]$ par $f(x) = 100 - x^2$ qui est positive sur I et décroissante sur $[0\,;10]$.
e. FAUX
Contre-exemple : $f'(x) = x^2 - 1$. $a = 1$; $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-1\,;1]$ donc f décroissante sur $[-1\,;1]$.
2. Si la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1\,;3]$ alors $f'(3) \leqslant 0$ et $f'(1) \leqslant 0$.
Cette affirmation est FAUSSE.
Contre-exemple : f définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $[1\,;3]$, non dérivable en 1 ou en 3.
$f(x) = 2|x-3| + |x-1|$.



3. Si f n'est pas décroissante sur [–1 ; 10], alors il existe x appartenant à [–1 ; 10] tel que $f(x) < 0$.
Cette affirmation est fausse comme contraposée d'une affirmation fausse.
On peut également donner un contre-exemple : f définie sur [–1 ; 1] par $f(x) = x + 1$

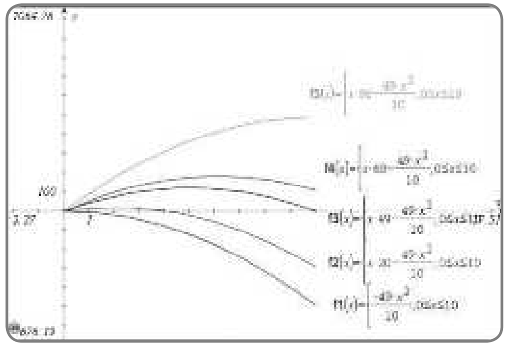
4. Il faut remplacer « le coefficient a doit être strictement positif » par « le coefficient a doit être strictement positif et $f\left(\frac{-b}{2a}\right) > 0$ »
(l'ordonnée du sommet de la parabole, courbe de f', doit être positive)

63 **1. a.** Vitesse $x'(t) = -9{,}8t + v_0$.
$x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{9{,}8}$
Comme $v_0 \leqslant 0$, l'équation $x'(t) = 0$ n'a pas de solution sur]0 ; 10].
Seule possibilité ici pour que la vitesse soit nulle : $v_0 = 0$ et $t = 0$.
b. La fonction x est décroissante sur [0 ; 10] car $-9{,}8t + v_0 < 0$
Minimum : $-490 + 10v_0$ car $x(10) = -490 + 10v_0$
Remarque : Même avec une vitesse initiale nulle, après 10 secondes la pierre aurait parcouru 490 mètres !
Maximum : 0 car $x(10) = 0$.

2. a. $x'(t) = 0 \Leftrightarrow \text{t} = \frac{v_0}{9{,}8}$ $\quad x'(t) > 0 \Leftrightarrow t < \frac{v_0}{9{,}8}$.
$x\left(\frac{v_0}{9{,}8}\right) = \frac{5v_0^2}{98}$.
Cas 1 : $\frac{v_0}{9{,}8} \geqslant 10 \Leftrightarrow v_0 \geqslant 98$.
La fonction x est croissante sur [0 ; 10].
Cas 2 : $\frac{v_0}{9{,}8} < 10 \Leftrightarrow v_0 < 98$
La fonction x est croissante sur $\left[0 ; \frac{v_0}{9{,}8}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{v_0}{9{,}8} ; 10\right]$.

b. Pour que la pierre soit au même endroit à deux instants différents, il faut qu'elle ait atteint le maximum avant 10 seconde ($v_0 < 98$)
c. ***Cas 1 :*** $v_0 \geqslant 98$
Minimum : 0 car $x(0) = 0$
Maximum : $-490 + 10v_0$ car $x(10) = -490 + 10v_0$

Cas 2 : $0 < v_0 < 98$ $\quad x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$
ou $t = \frac{v_0}{4{,}9}$ $\quad \frac{v_0}{4{,}9} > 10 \Leftrightarrow v_0 > 49$
Si $49 < v_0 < 98$
minimum : 0 car $x(0) = 0$
maximum : $\frac{5v_0^2}{98}$ car $x\left(\frac{v_0}{9{,}8}\right) = \frac{5v_0^2}{98}$
Si $0 < v_0 < 49$
minimum : $-490 + 10v_0$ car $x(10) = -490 + 10v_0$
maximum : $\frac{5v_0^2}{98}$ car $x\left(\frac{v_0}{9{,}8}\right) = \frac{5v_0^2}{98}$



Raisonnement logique

64 **a.** Oui $f(x) = -5x + k$.
b. Non : par calcul, ou par représentation graphique.
c. Oui : $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow (x-1)(3x-5) = (x-2)(3x-4)$
$\Leftrightarrow x = 1{,}5$.
d. Non : sa dérivée $\frac{11}{(2x+5)}$ est strictement positive, donc pas de tangente parallèle à l'axe des x.
Pas de tangente parallèle à l'axe des y car il n'existe par de a tel que $f(a)$ existe et f non dérivable en a.
e. Oui car $f'(x) = 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 4{,}48x + 1 = 1$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{2\sqrt{14}}{5}$
ou $x = \frac{2\sqrt{14}}{5}$
f. Oui $x \to |x|$.
g. Oui f définie par $x \to x$ sur [0 ; 1] a comme maximum 1 en $a = 1$.

65 **1. a.** La contraposée : « S'il existe x tel que $f(x) \neq g(x)$ alors il existe x tel que $f'(x) \neq g'(x)$ ».
b. La réciproque : « Si pour tout x tel que $f(x) = g(x)$ alors pour tout x tel que $f'(x) = g'(x)$ ».
c. La contraposée de la réciproque : « S'il existe x tel que $f'(x) \neq g'(x)$ alors il existe x tel que $f(x) \neq g(x)$ ».

2. **1. b.** est vraie (évident) et **1. c.** vraie (une contraposée d'une proposition est vraie, ou alors démonstration par l'absurde)
La proposition initiale est fausse (contre-exemple : $x \to x$ et $x \to x + 1$) et **1. a.** fausse (même contre-exemple).

66 • Dérivabilité : u^2 est dérivable comme produit ; $\frac{1}{u^2}$ est dérivable comme quotient lorsque $u \neq 0$.

• **Méthode 1 :**

$$\left(\left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{u}\right)\right)' = \left(\frac{1}{u}\right)'\left(\frac{1}{u}\right) + \left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{u}\right)'$$

$$= -2\left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{u'}{u^2}\right) = -\frac{2u'}{u^3}$$

• **Méthode 2 :**

$$\left(\frac{1}{u^2}\right)' = \frac{0 \times u^2 - 1 \times (uu)'}{u^4} = -\frac{u'u + uu'}{u^4} = -\frac{2u'}{u^3}$$

67

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$$

$$= \frac{(u)(a+h) + (v)(a+h) - (u)(a) - (v)(a)}{h}$$

$$= \frac{(u)(a+h) - (u)(a)}{h} + \frac{(v)(a+h) - (v)(a)}{h}$$

Donc la limite de $\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$ existe lorsque h tend vers 0.

Or $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(u)(a+h) - (u)(a)}{h} = u'(a)$

et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(v)(a+h) - (v)(a)}{h} = v'(a)$

donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = u'(a) + v'(a)$.

68 Équation de la tangente :
$y = f'(a)\,(x - a) + f(a) \Leftrightarrow x f'(a) - a f'(a) - y + f(a) = 0$.

69 $a \neq 0 : f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{-2b}{3a}.$$

Ces valeurs sont différentes si et seulement si $b \neq 0$.

Se tester sur…

QCM : Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 344.

Prêt pour le contrôle ?

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 344.

Problèmes

82

a. Oui : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -4$.
b. Les représentations graphiques permettent de conjecturer que oui en $x = -4$.
C'est effectivement le cas car $f'(-4) = g'(-4) = 1{,}75$.
c. Non par l'équivalence dans la résolution en a.
d. On cherche a et b tels que :

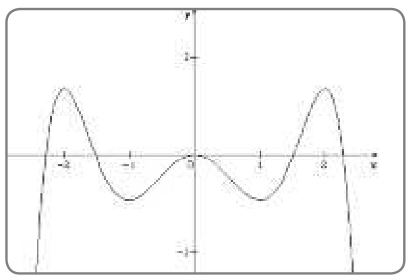
$$f'(a) = g'(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow b = -a - 8$ ou $b = a - 4$
Puis un logiciel de calcul formel permet d'obtenir que la seule solution à $f'(a) = \frac{f(-a-8) - f(a)}{(-a-8) - a}$ ou $f'(a) = \frac{f(a-4) - f(a)}{(a-4) - a}$ est $a = -4$.

83 **a. b.** $f'(x) = -x(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$.
c.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	
f		↗	$\frac{4}{3}$	↘	$-\frac{11}{12}$	↗	0	↘	$-\frac{11}{12}$	↗	$\frac{4}{3}$	↘	

d.



e. Le minimum de f sur $[-3 ; 3]$ est $-38{,}25$.

f. Le maximum de f sur $[-3 ; 3]$ est $\frac{4}{3}$.

g. La résolution de $f(x) = 0$ donne les 5 points

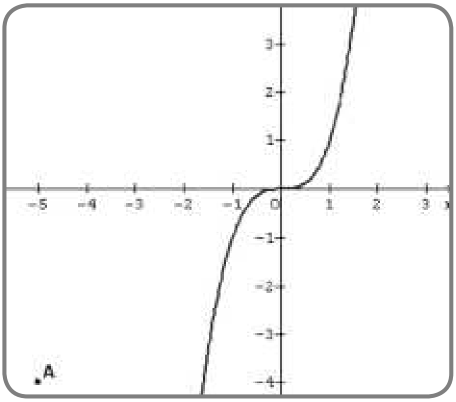
$\left(-\frac{\sqrt{15+\sqrt{33}}}{2} ; 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{15-\sqrt{33}}}{2} ; 0\right)$, $(0 ; 0)$, $\left(\frac{\sqrt{15-\sqrt{33}}}{2} ; 0\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{15+\sqrt{33}}}{2} ; 0\right)$.

84 **a.** $T_a : y = 2ax - a^2$.
b. $y_0 < x_0^2$
c. $y_0 = 2ax_0 - a^2$
d. Le discriminant vaut : $4(x_0^2 - y_0)$ qui est strictement positif. Les solutions : $x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - y_0}$.

e. Par un point de $M(x_0\,;y_0)$ passent deux tangentes à $\mathcal{P}$, aux points d'abscisse $x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - y_0}$. Ces deux points sont différents car $y_0 \neq x_0$.
Leurs équations :

$$y = 2\left(x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - y_0}\right)x - \left(x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - y_0}\right)^2.$$

85 **1.**



2. Tangente en M_1 à $\mathcal{C}$: $y = 0{,}75\,x - 0{,}25$.
3. **a.** Une tangente en $M(\alpha\,;\alpha^3)$ est :

$$y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 \Leftrightarrow 2\alpha^3 - 3\alpha^2 x + y = 0$$

b. $2\alpha^3 + 15\alpha^2 - 4 = 0$.
c. **d.** $2\alpha^3 + 15\alpha^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0{,}5$
ou $\alpha = -6 - 2\sqrt{3}$ $\alpha = -6 + 2\sqrt{3}$.
e. Les points d'abscisses $\alpha = 0{,}5$ ou $\alpha = -6 - 2\sqrt{3}$ ou $\alpha = -6 + 2\sqrt{3}$.
4. **a. b.** Comme en **partie 3.** : $B(-5\,;b)$ se trouve sur la droite d'équation

$$2\alpha^3 - 3\alpha^2 x + y = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 + 15\alpha^2 + b = 0.$$

c. $g'(\alpha) = 6\alpha^2 + 30\alpha$
d. Si $b > 0$ ou $b < -125$: une solution
Si $b = 0$ ou $b = -125$: deux solutions
Si $-125 < b < 0$: trois solutions.
e. En notant $C(-125\,;-5)$ et $D(-5\,;0)$:
Si B se trouve sur le segment $]CD[$, on peut tracer 3 tangentes à $\mathcal{C}$ passant par M.
Si B se trouve en C ou en D, on peut tracer 2 tangentes à $\mathcal{C}$ passant par M.
Si B se trouve sur Δ à l'extérieur du segment $[CD]$, on ne peut tracer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ passant par M.

86 On cherche f avec $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Les conditions sont : $f(0) = 0$; $f(6) = 2$; $f'(0) = 2{,}5$ et $f'(6) = -0{,}75$

Solution : $a = \dfrac{13}{432}$ and $b = -\dfrac{13}{24}$ and $c = \dfrac{5}{2}$ and $d = 0$ $f(x) = \dfrac{13}{432}x^3 - \dfrac{13}{24}x^2 + \dfrac{5}{2}x$

87 **1.** **a.** L'écart doit être supérieur à :

$$d_R + d_F = v \times \frac{1}{3600} \times 1000 + \frac{1}{200}v^2 = \frac{v}{3{,}6} + \frac{v^2}{200}$$

(en mètres)
b. $D = v \times 1$ (en km) $= 1000v$ (en mètres)
c. Nombre de voitures sur les D mètres :

$$\frac{D}{4 + d_R + d_F} = \frac{1000v}{4 + \dfrac{v}{3{,}6} + \dfrac{v^2}{200}}$$

d. $f'(x) = \dfrac{-16200000(x^2 - 800)}{\left(9x^2 + 500x + 7200\right)^2}$

x	0		$20\sqrt{2}$		130
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	≈ 17884	↘	≈ 1043

2. Avec un coefficient double de $\dfrac{1}{100}$:

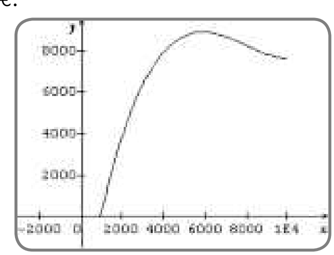
$$g(x) = \frac{1000x}{4 + \dfrac{x}{3{,}6} + \dfrac{x^2}{100}} \quad g'(x) = \frac{-810000(x^2 - 400)}{\left(9x^2 + 250x + 3600\right)^2}$$

Graphiquement il apparait bien que $2 \times g(x) \neq f(x)$. Un logiciel de calcul formel permet de montrer qu'il n'y a égalité que pour $x = 0$.

88 En Python :

```
##initialisation
n_maximum = 1
benefice_maximum = 0
##traitement
for n in range(1000,10001):
y = (n**3)/30000000.-(n**2)/1250.
    + 119*n/20.-15550/3.
if y > benefice_maximum :
benefice_maximum = y
n_maximum = n
##sortie
print “Benefice maximal “,benefice_
maximum,”pour n = «,n_maximum
```

Le bénéfice est maximal pour $n = 5879$ et vaut 8919,73 €.



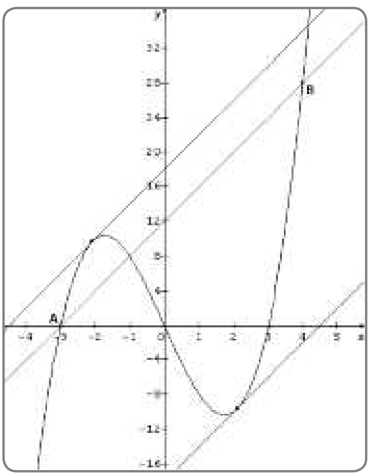
L'étude de la fonction et le calcul des valeurs autour de celle qui donne le maximum :
($8000 - 1500\sqrt{2} \approx 5879$) permet de se rendre compte que le bénéfice maximal arrondi au centime est le même pour les valeurs de n comprises entre 5871 et 5886.

89 **1. a.** $f'(x) = 3x^2 - 9$.
b. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.
c. Ces tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses et répondent dans ce cas au problème posé car A et B sont sur l'axe des abscisses.

2. a. $\dfrac{f(4) - f(-3)}{4 - (-3)} = \dfrac{28}{7} = 4$.

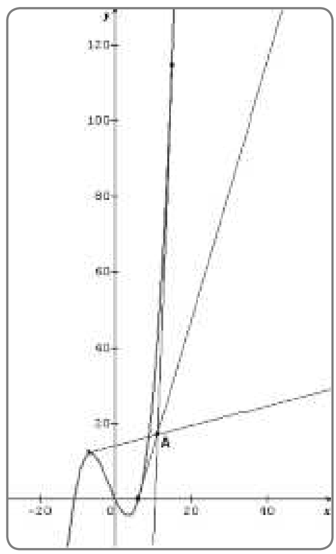
b. $f'(x) = 4 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{39}}{3}$ ou $x = \dfrac{\sqrt{39}}{3}$

c. Aux deux points de coordonnées :
$$\left(-\frac{\sqrt{39}}{3}\ ;\ \frac{14\sqrt{39}}{9}\right) \text{et} \left(\frac{\sqrt{39}}{3}\ ;\ -\frac{14\sqrt{39}}{9}\right).$$
d. Les tangentes ont comme équation :
$y = 4x - \dfrac{26\sqrt{39}}{9}$ et $y = 4x + \dfrac{26\sqrt{39}}{9}$

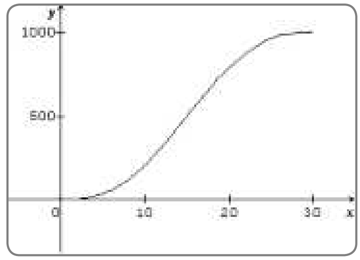


3. a.
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^3 - 9b - a^3 + 9b}{b - a}$$
$$= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2) - 9(b-a)}{b - a}$$
$$= a^2 + ab + b^2 - 9$$
Développer l'expression proposée.
b. $f'(x)$. Le coefficient de la tangente au point d'abscisse x est le nombre dérivé de f en x c'est-à-dire $f'(x)$
c. Il faut montrer que l'équation d'inconnue x,
$f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ a deux solutions.
$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{1}{4}b^2 .$$
Cette équation a bien deux solutions car le second membre est positif. Ces solution sont distinctes car $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ comme $a \neq b$.

90 $f'(x) = \dfrac{1}{10}x^2 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{11}{5}$
On recherche un point de coordonnées M (a ; $f(a)$) tel que la tangente en ce point d'équation :
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ passe par le point A(11 ; 17).
Ce qui revient à résoudre l'équation d'inconnue a :
$$17 = \left(\frac{1}{10}a^2 + \frac{1}{3}a - \frac{11}{5}\right)(11 - a) + \left(\frac{1}{30}a^3 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{11}{5}a\right)$$
$\Leftrightarrow a^3 - 14a^2 - 55a + 618 = 0$
Un logiciel de calcul formel ou de géométrie dynamique font apparaitre une solution $a = 6$.
Par la factorisation $(a - 6)(a^2 - 8a - 103)$, on en déduit qu'il y avait 3 possibilités pour la sortie de route (deux en parcourant la piste dans un sens, une en la parcourant dans l'autre sens) :
les points de coordonnées
$(0\,;6)$; ($4 + \sqrt{19} \approx 14{,}9$; $\approx 114{,}7$)
et ($4 - \sqrt{19}$ $\approx -6{,}9$; $\approx 12{,}2$).



91 **a.** $f'(x) = \dfrac{x^2(x - 30)^2}{810}$. f est croissante sur [0 ; 30].
b.



c. On étudie la variation de la fonction f'.

$$f''(x) = \frac{2x(x-15)(x-30)}{405}$$

x	0		15		30
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	62,5	↘	0

On en déduit que la vitesse maximale est atteinte à mi-parcours. Elle est de 62,5 $m.s^{-1}$, ou 225 $km.h^{-1}$, impossible à faire sur les autoroutes françaises.

92 **1.**

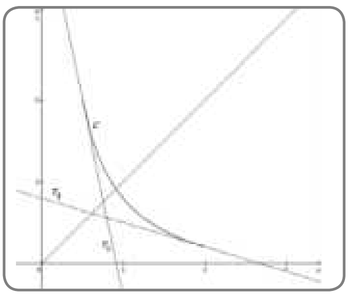
$$\begin{cases} a+\dfrac{b}{0,5}=2 \\ a+\dfrac{b}{2}=0,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ 2a+b=0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-0,4 \\ b=1,2 \end{cases}$$

2. a. $f'(x) = -\dfrac{1,2}{x^2}$.

b. f' négative sur $[0,5 ; 2]$ donc f décroissante sur $[0,5 ; 2]$.

c. $T_1 : y = -4,8x + 4,4$ $\qquad T_2 : y = -0,3x + 0,8$

d.



3.

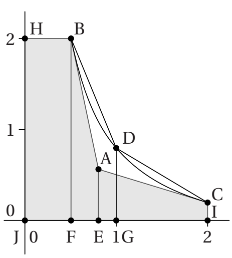


Fig. **A**

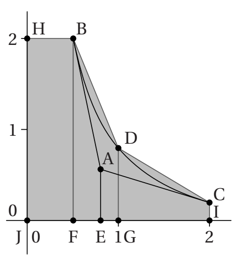


Fig. **B**

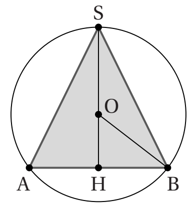
Les droites T_1 et T_2 se coupent au point de coordonnées (0,8 ; 0,56). L'aire jaune d'origine est donc minorée par la somme des 3 aires grises de la figure **A** et majorée par la somme des aires grises de la figure **B**.

$$1 + 0,3 \times \frac{(2 + 0,56)}{2} + 1,2 \times \frac{(0,56 + 0,2)}{2} \leqslant A$$

$$\leqslant 1 + 0,5 \times \frac{(2 + 0,8)}{2} + 1 \times \frac{(0,8 + 0,2)}{2}$$

$1,84 \leqslant A \leqslant 2,2$

93 **1.** *Cône*

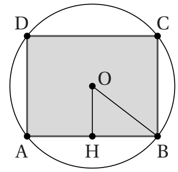


En posant OH = x, sur l'axe orienté [OH) :
pour $x \in [-10 ; 10]$

$$V_1(x) = \frac{1}{3}\pi HB^2 SH = \frac{1}{3}\pi\left(100 - x^2\right)\left(10 + x\right).$$

Remarque : si H est entre O et S, le volume est inférieure au volume de la navette construite avec S' symétrique de S par rapport à O.

Cylindre



Par raison de symétrie, le centre de la sphère est le centre du rectangle ABCD (coupe du cylindre passant par l'axe. En posant OH = x : pour $x \in [0 ; 10]$
$V_2(x) = \pi HB^2 \times 2OH = 2\pi x\left(100 - x^2\right)$

Parallélépipède rectangle à base carrée

On obtient la même coupe que celle du cas précédent en prenant un plan diagonal.

L'aire de la base est $\left(\dfrac{AB}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{HB^2}{2}$

$$V_3(x) = \frac{2}{\pi} V_2(x) = 4x(100 - x^2).$$

2. a. b.

Cône
$V_1'(x) = -\dfrac{\pi(x+10)(3x-10)}{3}$

x	−10		$\frac{10}{3}$		10
$V_1'(x)$		+	0	−	
V_1	0	↗	$\frac{32000\pi}{81}$	↘	0

rayon base : $\dfrac{20\sqrt{2}}{3} \approx 9,42$ hauteur : $\dfrac{40}{3} \approx 13,33$
Volume maxi : ≈ 1241

Cylindre				
$V_2'(x) = -2\pi\,(3x^2 - 100)$				

x	0		$\frac{10\sqrt{3}}{3}$		10
$V_1'(x)$		$+$	0	$-$	
V_1	0	$\nearrow$	$\frac{4000\pi\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

rayon base : $\frac{10\sqrt{6}}{3} \approx 8{,}2$

hauteur : $\frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}5$

Volume maxi : ≈ 2418

Parallélépipède rectangle à base carrée
$V_3'(x) = -4\,(3x^2 - 100)$

x	0		$\frac{10\sqrt{3}}{3}$		10
$V_1'(x)$		$+$	0	$-$	
V_1	0	$\nearrow$	$\frac{8000\pi\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

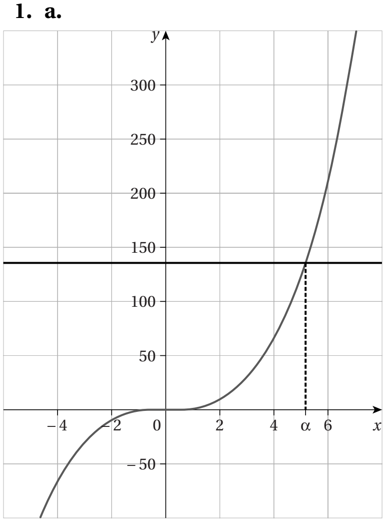
côté de la base : $\frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}5$

hauteur : $\frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}5$ (cube)

Volume maxi : ≈ 1540

c. Il faut choisir le cylindre pour avoir le plus grand volume.

94 **1. a.**



b. $5{,}13 < \alpha < 5{,}14$ par zoom à la calculatrice et $5{,}13^2 < \frac{425}{\pi} < 5{,}14^2$.

c. Développer.

d. $x^3 - \alpha^3 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \alpha$ car $x^2 + \alpha x + \alpha^2 > 0$ (discriminant négatif)

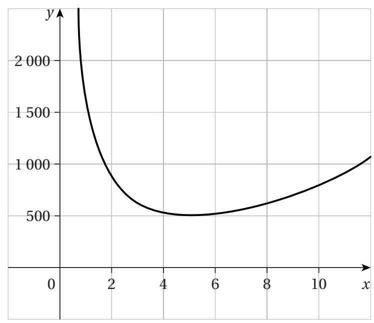
2. a. $\pi R^2 h = 850$ 1ml = 1cm^3

b. c. $A = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{850}{\pi R^2}$

$$= 2\pi R^2 + \frac{1700}{R}$$

d. $f'(x) = 4 \times \frac{\pi x^3 - 425}{x^2}$ du signe de $x^3 - \frac{425}{\pi}$

R	0		α		$+\infty$
$f'(R)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{2550}{\alpha}$	$\nearrow$	



e. $f(\alpha) = 2\pi\alpha^2 + \frac{1700}{\alpha} = 2\pi\frac{\frac{425}{\pi}}{\alpha} + \frac{1700}{\alpha} = \frac{2550}{\alpha}$.

$$496{,}1 < f(\alpha) < 497{,}08.$$

f. Celles de rayon $\alpha \approx 5{,}1$cm ont une aire minimale. (Diamètre 101 mm).

g. L'aire vaut cette fois-ci :

$2\pi(R + 0{,}5)^2 + 2\pi R(h + 0{,}6) = 2\pi(R + 0{,}5)^2 + \frac{1700}{R} + 1{,}2\pi R$

La dérivée de cette fonction vaut :

$$\frac{0{,}8(5\pi x^3 + 4\pi x^2 - 2125)}{x^2}$$

Le minimum est atteint pour $R \approx 4{,}88$ soit un diamètre de 97mm.

95 **1.** $y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a}} + b = \frac{ax}{x+a} + b = \frac{(a+b)x + ab}{x+a}$

2. a. $f'(x) = \frac{10000}{(x+100)^2}$. **b.** f est croissante sur $[0 ; +\infty[$

c. Sur $[0 ; 100]$, le minimum de f vaut $f(0) = 120$ et le maximum $f(100) = 170$.

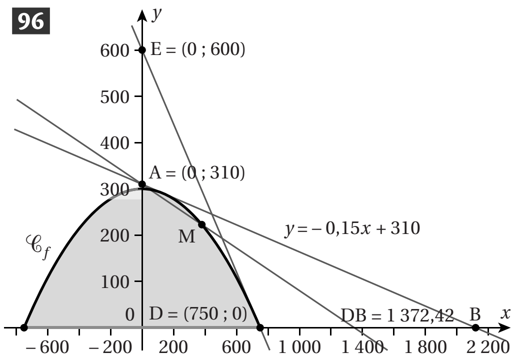
3. $f_{ab}'(x) = \dfrac{a^2}{(x+a)^2}$ $\quad f_{ab}$ est croissante sur [0 ; 100]

Sur [0 ; 100], le minimum de f_{ab} vaut f_{ab} (0) = b et le maximum f_{ab} (100) = $b + 100 - \dfrac{10000}{(a+100)}$.

Il faut regarder si pour une valeur donnée de b, ce maximum dépasse la valeur suivante de b.
Pour chaque valeur possible de b, les valeurs de f_{ab} décrivent l'intervalle $\left[b\ ;\ b + 100 - \dfrac{10000}{(a+100)}\right]$.

Cet intervalle a une amplitude maximum de 90,099 pour a = 910. La réunion de ces intervalles, pour b qui varie, est donc l'intervalle [100 ; 910 + 90,099] c'est-à-dire [100 ; 1000,099].

96



a. On cherche une fonction dont la courbe donne la forme de la colline.

$f(x) = 300 - \dfrac{1}{1875}x^2$

Recherche d'une tangente T_1 qui passe par le sommet A de l'antenne.
M(a, $f(a)$) tel que $f'(a) = \dfrac{f(a)-310}{a-0}$: $a = -25\sqrt{30}$ ou $a = 25\sqrt{30}$

$T_1 : y = -\dfrac{2\sqrt{30}}{75}x + 310$

T_1 coupe l'axe des abscisses en B$\left(\dfrac{775\sqrt{30}}{2}\ ;\ 0\right)$.

Il faut donc s'éloigner à plus de 2122 – 750 = 1372 m de la colline.
Pour le démontrer il faut montrer que toute segment [AN] avec $\mathbb{N}(c\ ;\ 0)$ et $750 \leqslant c \leqslant \dfrac{775\sqrt{30}}{2}$ admet au moins un point d'intersection avec l'arc de parabole. Cela se fait facilement avec un logiciel de calcul formel par résolution du système :

$$\begin{cases} y = 300 - \dfrac{1}{1875}x^2 \\ y = \dfrac{310}{-c}x + 310 \end{cases}$$ qui n'a une solution que si

$$-\frac{775\sqrt{30}}{2} \leqslant c \leqslant \frac{775\sqrt{30}}{2}.$$

b. Pour être visible de toute la plaine on considère la tangente en D(750 ; 0). C'est $T_2 : y = 600 - 0{,}8\,x$. Elle coupe l'axe des ordonnées en (0 ; 600). Pour être visible de partout, l'antenne devrait avoir 300 m de haut !

97 **A. 1.** Pour $4 \leqslant t \leqslant 10{,}1$ le nombre de cas est supérieur à 150000, c'est-à-dire 6 jours entiers.
2. $f'(0) = 11{,}25$
3. a. Pour $t = 7{,}5$, le nombre maximal de cas (250000) est atteint.
À ce moment là, la vitesse d'évolution est nulle.
b. Lorsque la tangente a la pente la plus grande c'est-à-dire pour $t \approx 3{,}5$.
B. 1.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(t)$	0	20,75	56,5	101,25	149	193,75	229,5	250,25	250	222,75	162,5	63,25

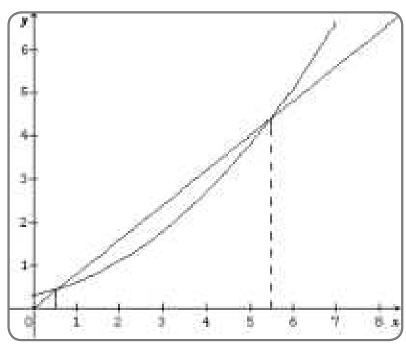
2. $f'(t) = -3t^2 + 21\,t + 11{,}25$.
Développer l'expression proposée.

x	0		7,5		11
$f'(x)$		+	0	–	
f	0	↗	253,125	↘	63,25

Ce tableau de variation est cohérent avec le courbe $\mathscr{C}_f$ car le maximum de f sur [0 ; 11] est atteint en $x = 7{,}5$ et vaut environ 253.
4. f' est maximal au milieu de ses deux zéros, c'est-à-dire en $\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{15}{2}}{2} = 3{,}5$.

98 **1. a.** 3800 € **b.** 43
2. a. $g(x) = 0{,}08(10 \times x) = 0{,}8x$ (en milliers d'euros) car 80 € = 0,08 milliers.

b.



c. $x \in [0{,}5\ ;\ 5{,}5]$.
3. a. $B(x) = 0{,}8x - f(x)$ **b.** $B'(x) = -0{,}2x + 0{,}6$ **c.** B maximal pour $x = 3$.

99 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
2. a. $f'(x)$ ne s'annule pas ⇔ discriminant stricte-

ment négatif $\Leftrightarrow 4a^2 - 12b < 0$
Pour $b \leqslant 0$, $4a^2 - 12b < 0$ est faux.
Pour $b > 0$, $4a^2 - 12b < 0 \Leftrightarrow a^2 < 3b$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3b} < a < \sqrt{3b}$$

Donc $f'(x)$ ne s'annule pas
$\Leftrightarrow b > 0$ et $-\sqrt{3b} < a < \sqrt{3b}$.

b. Dans ce cas f' est toujours du signe de 3. Donc f est croissante su $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	↗	

3. a. $f'(x)$ s'annule en une unique valeur
$\Leftrightarrow$ discriminant nul $\Leftrightarrow 4a^2 = 12b$

b. Dans ce cas : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{a}{3}$ et $f'(x) > 0$ pour $x \neq -\dfrac{a}{3}$ (signe de 3).

$$f\left(-\frac{a}{3}\right) = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = \frac{2a^3}{27} - \frac{a\dfrac{a^2}{3}}{3} + c = c - \frac{a^3}{27}$$

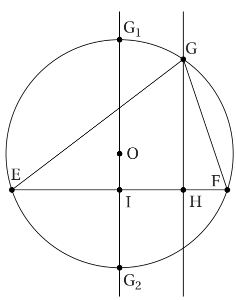
x	$-\infty$	$-\dfrac{a}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f	↗	$c - \dfrac{a^3}{27}$	↗

4. a. $f'(x)$ s'annule en deux valeurs distinctes
$\Leftrightarrow$ discriminant strictement positif $\Leftrightarrow 4a^2 - 12b > 0$
Pour $b < 0$, $4a^2 - 12b > 0$ est toujours vrai
Pour $b \geqslant 0$, $4a^2 - 12b > 0 \Leftrightarrow a^2 > 3b$

b.

x	$-\infty$	$-\dfrac{a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$		$-\dfrac{a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗		↘		↗

100 **1. a.**



b. Supposons GEF non isocèle en G. Considérons G_1 le point d'intersection de la médiatrice de [EF] avec le cercle, du même coté de (EF) que G.
$IG_1 > HG$ car la perpendiculaire à (HG) passant par G coupe le segment [IG_1] en son intérieur.
EFG d'aire maximale et pourtant EFG_1 a une aire plus grande que l'aire d'EFG.

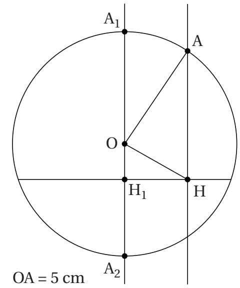
c. Si on suppose EFG d'aire maximale, il est isocèle en G, mais aussi de la même manière en F.

Donc EFG équilatéral.

d. $r = OG$ est égal aux $\dfrac{2}{3}$ d'une des hauteurs, une hauteur est égale à $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Donc $a = \sqrt{3}\, r$.

e. Aire $\dfrac{a \times a\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3r^2\sqrt{3}}{4}$.

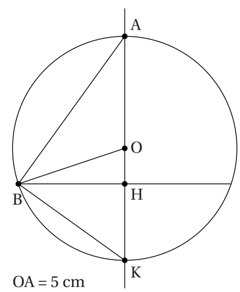
2. a.



b. A_1 et A_2 appartiennent au plan OAH. Quitte à échanger les noms des points A_1 et A_2, $AH \leqslant A_1H_1$.

c. Si on suppose que ABCD est de volume maximal et $A \neq A_1$ on arrive à une contradiction car le volume de A_1BCD est supérieur à celui de ABCD. Donc la hauteur (AH) d'un tétraèdre solution passe par O.

3. a.



Le point H est le pied de la hauteur passant par B dans ABK.

b. On sait que $r = BH$. Dans le triangle BHO :
$r^2 = R^2 - OH^2 = (R + OH)(R - OH) = AH \times HK = h(2R - h)$

c. $V = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4} r^2\right)h = \dfrac{\sqrt{3}}{4} h(h)(2R - h)$.

d. $f'(x) = x(-3x + 4R)$

x	0		$\frac{4}{3}R$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}R^3$	$\searrow$	0

e. D'après le tableau de variations, le volume est bien maximal pour $x = \frac{4}{3}R$.

4. a. $r^2 = \left(\frac{4}{3}R\right)\left(2R - \left(\frac{4}{3}R\right)\right) = \frac{8}{9}R^2$

$$\text{donc } r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R\ .$$

b. $BC = CD = BD = r\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

c. $AB^2 = h^2 + r^2 = \left(\frac{4}{3}R\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)^2 = \frac{24}{9}R^2$.

$$\text{donc } AB = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$$

d. Le tétraèdre est régulier de côté $\frac{2\sqrt{6}}{3}R$

101 **a.** $hx^2 = 1000$ (en cm^2) donc $h = \frac{1000}{x^2}$

b. Aire : $4x(h + x + 1,6) = 4x\left(\frac{1000}{x^2} + x + 1,6\right)$

$$= \frac{4000}{x} + 4x^2 + 6,4x$$

c. $f'(x) = -\frac{4000}{x^2} + 8x + 6,4 = 1,6\frac{(5x^3 + 4x^2 - 2500)}{x^2}$

d. Étude de g' : $g'(x) = x(15x + 8)$

x	$-\infty$		$-\frac{8}{15}$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$+$		$+$	
g		$\nearrow$	$-2499,6$	$\searrow$	-2500	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \approx 7,6$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

$f(\alpha) \approx 805,915$

e. Les dimensions trouvées ici sont donc 7,68 cm × 7,68 cm × 16,96, des dimensions proches des réelles.

102 **Traduction**

Destiné à une piscine de plein air, un toboggan devra avoir une forme simple et ne devra pas être très long.

Par contre pour que plusieurs baigneurs puissent l'utiliser en même temps, sa largeur devra être de 7 m.

L'espace sous le toboggan sera une butte de terre retenue des deux côtés par un mur vertical en béton.

Le maitre d'œuvre en a fait le croquis suivant :

La montée à gauche peut être modélisée par un arc de la parabole correspondant à la fonction p avec $p(x) = -0,1x^2 + 10$, courbe tracée dans un repère dont l'origine se situe sur le sol à la verticale du point le plus élevé du toboggan. (x est exprimé en m)

a. Montrer que la courbe de la fonction p correspond effectivement à ce qu'imagine le maitre d'œuvre et qu'elle admet au point le plus élevé du toboggan une tangente horizontale.

b. L'architecte veut décrire la courbe correspondant à descente par celle d'une fonction polynôme du troisième degré.

Dans un premier temps il impose les contraintes suivantes : le départ du toboggan a comme coordonnées (0 ; 10), l'arrivée a comme coordonnées (5 ; 0) et la pente en ces deux points est nulle.

Déterminer l'expression $f(x)$ de la fonction f. Après avoir donné un tableau de valeurs, tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. (une unité correspond à 1m)

On trouvera : $f(x) = 0,16x^3 - 1,2x^2 + 10$

c. Pour des raisons de sécurité, l'architecte souhaite connaitre la pente maximale du toboggan. Déterminer l'endroit du toboggan où sa pente est maximale. Calculer en ce point l'angle que fait la tangente au toboggan avec le sol.

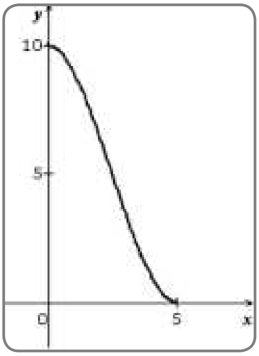
a. $\mathcal{P}(-10) = 0$; $\mathcal{P}(0) = 10$. La parabole passe par les points décrits dans l'énoncé.

$\mathcal{P}'(x) = -0,2x$. La tangente en $x = 0$ est donc horizontale.

b. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\begin{cases} f(0) = 10 \\ f(5) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 10 \\ 125a + 25b + 5c + d = 0 \\ c = 0 \\ 75a + 10b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 10 \\ c = 0 \\ 15a + 2b = 0 \\ 25a + 5b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 10 \\ c = 0 \\ a = 0,16 \\ b = -1,2 \end{cases}$$



x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	10	8,96	6,48	3,52	1,04	0

c. $f(x) = 0{,}16x^3 - 1{,}2x^2$ $\quad f'(x) = 0{,}48x^2 - 2{,}4x$
$f''(x) = 0{,}96x - 2{,}4$
Sur l'intervalle $[0 ; 5]$, f' a un minimum en $x = 2{,}5$ qui vaut -3.
Au point d'abscisse 2,5 le coefficient de la tangente vaut -3. En notant α l'angle que faut cette tangente avec l'horizontale, on a : $\tan \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha \approx 71{,}6°$.

4. Les suites

Objectifs et pré-requis

Dans ce chapitre on introduit la notion de suites en étudiant plus particulièrement les suites arithmétiques et géométriques. De nombreux phénomènes issus d'autres sciences peuvent être modélisés par des suites. L'observation du comportement des suites à l'aide de logiciels permet une première approche de la notion de limite qui sera développée en classe de terminale. L'étude des suites se prête tout particulièrement à la mise en place d'activités algorithmiques.

Extrait du programme (Bulletin officiel spécial n° 9 *du* 30 *septembre* 2010*)*

Contenus	Capacités attendues
Suites Modes de génération d'une suite numérique. Suites arithmétiques et suites géométriques. Sens de variation d'une suite numérique. Approche de la notion de limite d'une suite à partir d'exemples.	• Modéliser et étudier une situation à l'aide de suites. Mettre en œuvre des algorithmes permettant : - d'obtenir une liste de termes d'une suite ; - de calculer un terme de rang donné. Établir et connaître les formules donnant $1 + 2 + \ldots + n$ et $1 + q + \ldots + q^n$. • Exploiter une représentation graphique des termes d'une suite.

Corrigés des activités

1 Énergie renouvelable

❶ **a.** L'accroissement entre 2006 et 2007 est de 93 891 – 74 117 = 19 774 MW.

Le taux d'accroissement entre 2006 et 2007 est de $\dfrac{19774}{74117} \approx 0{,}2668 = 26{,}68\%$.

b. L'accroissement entre 2007 et 2008 est de 121 266 – 93 891 = 27 375 MW.

Le taux d'accroissement entre 2007 et 2008 est de $\dfrac{27375}{93891} \approx 0{,}2916 = 29{,}16\%$.

c. Le taux d'accroissement est le paramètre le plus stable.

❷ **a.** On a saisi en C3 la formule =C2–B2 et en C4 la formule =C3/B2.
b. L'année suivante, le taux d'accroissement reste lui aussi stable, proche de 30%.

❸ **a.** On a saisi en C8 la formule =B8*1.3.
b. Estimations :
– pour 2010 : 157 500 × 1,3 = 204 750.
– pour 2011 : 204 750 × 1,3 = 266 175.
– pour 2012 : 266 175 × 1,3 = 346 027,5.
c. Estimation pour 2016 : $346\,027{,}5 \times 1{,}3 \times 1{,}3 \times 1{,}3 \times 1{,}3 = 346\,027{,}5 \times 1{,}3^4 \approx 988\,289$

2 Suites de nombres

❶ **a.** On commence par 1 puis on ajoute 3 de terme en terme : le terme suivant est 10 + 3.
b. On fait la liste des multiples strictement positifs de 3 : le terme suivant est 3 × 5 = 15.
c. On commence par 1 puis on ajoute 2. On ajoute ensuite toujours un de plus qu'à l'ajout précédent : le terme suivant est 10 + 5 = 15.

d. On commence par 1 puis on ajoute le carré de 2. On ajoute ensuite au terme précédent le carré de l'entier suivant : le terme suivant est 30 + 25 = 55.

e. On commence par $\frac{1}{2}$ puis on ajoute ensuite 1 au numérateur et au dénominateur. Le terme suivant est $\frac{4+1}{5+1}=\frac{5}{6}$.

2 **a.** 33, 29, 25, 21, 17, 13.
b. 1, 2, 3, 5, 8, 13.
c. $-2, -1, 1, 4, 8, 13$.

3 **a.** (1) 1, 4, 7, 10, 13. (2) 3, 6, 12, 24, 48. (3) 0, 1, 3, 6, 10.
b. (1) et **1 a.** semblent identiques : le nombre suivant est 16 dans les deux suites.
(3) et **1 c.** semblent identiques : le nombre suivant est 15 dans les deux suites.
c. (1) $3+2n$ (2) 3^n (3) $\frac{n}{n+1}$

3 Gestion des ressources et effet de seuil

Partie A

1 $M_1 = M_0 \times 1{,}1 - 500 = 3000 \times 1{,}1 - 500 = 2800$.
$M_2 = M_1 \times 1{,}1 - 500 = 2800 \times 1{,}1 - 500 = 2580$.
$M_3 = M_2 \times 1{,}1 - 500 = 2580 \times 1{,}1 - 500 = 2338$.

2 La suite (M_n) semble décroissante.

3 En répétant cette opération, la forêt disparait en 10 ans, c'est-à-dire en 2020.

4 Pour rester constant, le volume prélevé doit correspondre à l'accroissement naturel, soit 10% de 3000 m^3, c'est-à-dire 300 m^3.

5 Pour que le volume soit croissant, il suffit de prélever moins de 300 m^3 par an.

Partie B

1 $P_1 = 300$. $P_2 = P_1 \times 0{,}8 + 80 = 300 \times 0{,}8 + 80 = 320$ patients le 2 septembre.
$P_3 = P_2 \times 0{,}8 + 80 = 320 \times 0{,}8 + 80 = 336$.

2 Le nombre de patients semble croissant.

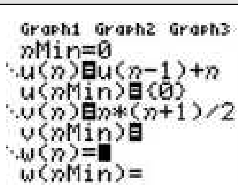
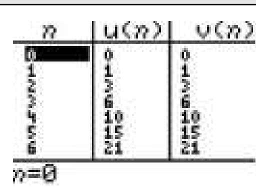
3 La différence avec le jour suivant est $(0{,}8p + 80) - p = 80 - 0{,}2p$, or si $p < 400$, $0{,}2p < 80$, d'où $-0{,}2p > -80$ et finalement $80 - 0{,}2p > 0$. La différence est positive donc le nombre de patients augmente.

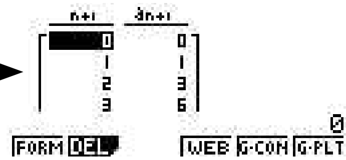
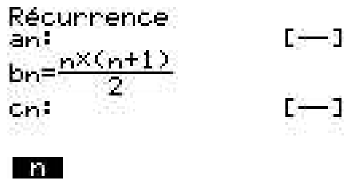
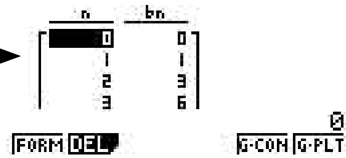
4 **a.** Non, le nombre de patients reste inférieur à 400.
b. La capacité d'accueil serait dépassée.

Corrigés des Travaux pratiques

Tice 1 Somme des cubes

1 **a.** un = 1 + 2 + 3 + … + (n – 1) + n = (1 + 2 + 3 + … + (n – 1)) + n = un–1 + n.
b. et **c.** La relation de récurrence doit s'accompagner d'un terme initial pour définir la suite. Ici, on peut définir $u_0 = 0$.

Avec TI 83plus.fr	
	

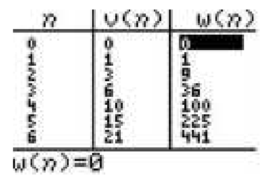
Avec Casio graph35+ *Il faut choisir le type de suite (définie par récurrence ou par un terme général), il n'est donc pas possible d'afficher simultanément u_n et v_n.*	
	
	

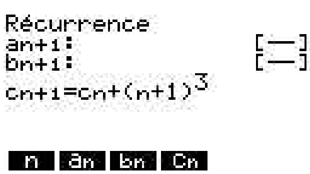
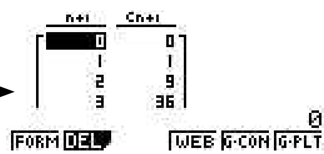
d. Comme $v_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on peut exprimer v_{n-1} en fonction de n :

$v_{n-1} = \dfrac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \dfrac{(n-1)\times n}{2}$.

On en déduit $v_{n-1} + n = \dfrac{(n-1)\times n}{2} + n = \dfrac{n^2 - n + 2n}{2} = \dfrac{n^2+n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2} = v_n$.

2 **a.**

Avec TI 83plus.fr	
	

Avec Casiograph35+	
	

b. On peut conjecturer que $w_n = v_n{}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Comme $v_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on peut conjecturer la formule suivante $w_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

d. Si $w_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ alors $w_{n-1} = \dfrac{(n-1)^2((n-1)+1)^2}{4} = \dfrac{(n-1)^2\times n^2}{4}$. On en déduit

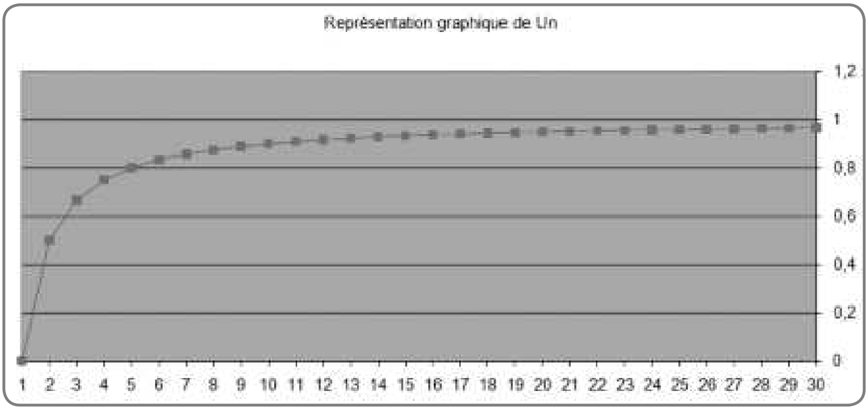
$w_{n-1} + n^3 = \dfrac{(n-1)^2\times n^2}{4} + n^3 = \dfrac{(n^2-2n+1)\times n^2 + 4n^3}{4} = \dfrac{n^4 - 2n^3 + n^2 + 4n^3}{4} = \dfrac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$.

Or $w_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \dfrac{n^2(n^2+2n+1)}{4} = \dfrac{n^4+2n^3+n^2}{4}$, d'où $w_n = w_{n-1} + n^3$.

Tice 2 Conjecturer une formule

1 Après avoir saisi dans la cellule B2 la valeur de $u_1 = 0$, on complète la colonne B en recopiant la formule de récurrence saisie en B3 : =1/(2–B2). (*Voir* **3 a.**)

2



On peut conjecturer graphiquement que la suite (u_n) est croissante et converge vers 1.

3 **a.** On saisit dans la cellule C2 la formule =1/(1–B2) puis on la recopie vers le bas jusqu'en C31.

b. On peut conjecturer que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = n$.

c. Si $v_n = n$, comme $v_n = \dfrac{1}{1 - u_n}$, on obtient $\dfrac{1}{1 - u_n} = n$. On en déduit que $1 - u_n = \dfrac{1}{n}$ puis que $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

d. On vérifie l'expression obtenue au **3 c.** en saisissant la formule =1–1/A2 dans la cellule D2 puis en la recopiant vers le bas jusqu'en D31. Les colonnes B et D sont identiques.

4 Si $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, on peut s'appuyer sur la fonction $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ pour vérifier les conjectures émises à la question **2.**
La fonction inverse étant décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$, la fonction f est croissante et tend vers 1 en $+\infty$.

	A	B	C	D
1	n	un	vn	vérif un
2	1	0	1	0
3	2	0,5	2	0,5
4	3	0,6666667	3	0,6666667
5	4	0,75	4	0,75
6	5	0,8	5	0,8
7	6	0,8333333	6	0,8333333
8	7	0,8571429	7	0,8571429
9	8	0,875	8	0,875
10	9	0,8888889	9	0,8888889
11	10	0,9	10	0,9
12	11	0,9090909	11	0,9090909
13	12	0,9166667	12	0,9166667
14	13	0,9230769	13	0,9230769
15	14	0,9285714	14	0,9285714
16	15	0,9333333	15	0,9333333
17	16	0,9375	16	0,9375
18	17	0,9411765	17	0,9411765
19	18	0,9444444	18	0,9444444
20	19	0,9473684	19	0,9473684
21	20	0,95	20	0,95
22	21	0,952381	21	0,952381
23	22	0,9545455	22	0,9545455
24	23	0,9565217	23	0,9565217
25	24	0,9583333	24	0,9583333
26	25	0,96	25	0,96
27	26	0,9615385	26	0,9615385
28	27	0,962963	27	0,962963
29	28	0,9642857	28	0,9642857
30	29	0,9655172	29	0,9655172
31	30	0,9666667	30	0,9666667

Tice 3 Intérêts simples et intérêts composés

1 Pour que le tableau s'actualise dès que les valeurs des cellules B1 à B3 sont modifiées, après avoir saisi dans les cellules E3 et F3 la formule =B1, on complète la colonne E en recopiant la formule saisie en E4 : =E3+B$2*B$1, on complète la colonne F en recopiant la formule saisie en F4 : =F3*(1+B$3).

Année	Capital avec intérêts simples	Capital avec intérêts composés
14	536	452,18
15	560	479,31
16	584	508,07
17	608	538,55
18	632	570,87
19	656	605,12
20	680	641,43
21	704	679,91
22	728	720,71
23	752	763,95
24	776	809,79
25	800	858,37
26	824	909,88
27	848	964,47
28	872	1 022,34
29	896	1 083,68
30	920	1 148,70

2 **a.** Les valeurs (fond gris clair) du tableau ci-contre permettent d'affirmer que le placement à intérêts simples est plus intéressant pour des placements de 15 et 20 ans, mais que le placement à intérêts composés est plus intéressant pour un placement de 30 ans.

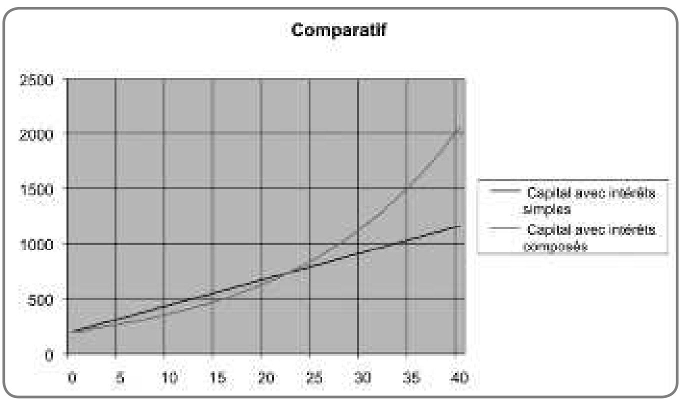
b. Les valeurs (fond gris foncé) permettent de situer l'année du changement.

• De 0 à 22 ans, le placement à intérêts simples est plus intéressant.

• De 23 à 40 ans, le placement à intérêts composés est plus intéressant.

3 Bien qu'un nuage de points semble plus approprié, le nombre de points et leur rapprochement pose des problèmes de lecture graphique.

Utiliser une courbe permet une lecture plus fine ; l'idée de continuité n'est pas en soit choquante si l'on regarde de plus près les pratiques bancaires.



On retrouve graphiquement que le placement à intérêt simple est plus intéressant jusqu'à 22 ans.

4 **a.** Il suffit de changer la valeur située en B1, le tableau et le graphique s'actualisent automatiquement.

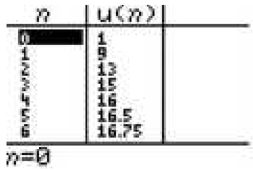
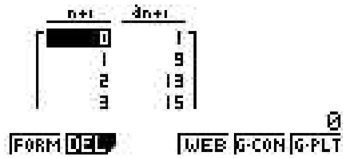
Les réponses à la question **2** sont les mêmes.

b. La valeur du capital n'influe pas sur les réponses car les capitaux sont proportionnels aux précédents. Avec un capital initial multiplié par 10, les intérêts acquis seront multipliés par 10 car les augmentations en pourcentage sont proportionnelles au capital.

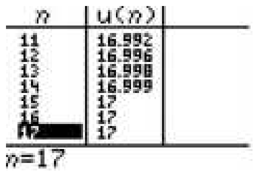
5 Par essais successifs, on obtient un taux minimal de 7,11 %.

Tice 4 Croissante mais convergente ?

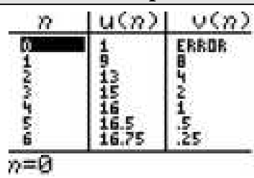
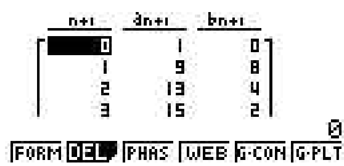
1 **a.**

Avec TI 83plus.fr	Avec Casio graph35+
	

b. En observant la table de valeurs, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 17.

Avec TI 83plus.fr	Avec Casio graph35+
	

2 **a.** $v_n = 17 - u_n = 17 - (0{,}5u_{n-1} + 8{,}5) = 17 - 0{,}5u_{n-1} - 8{,}5 = 8{,}5 - 0{,}5u_{n-1}$.
b. La calculatrice ne peut afficher les termes de la suite (v_n) que par la relation de récurrence définie en **a.**, d'où un terme v_0 absent car cette relation n'est fonctionnelle que pour $n \geqslant 1$.

Avec TI 83plus.fr	Avec Casio graph35+
	

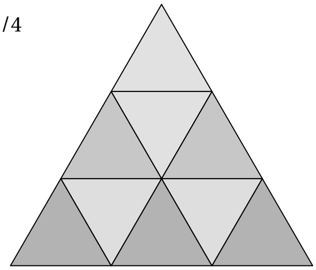
c. La suite (v_n) semble géométrique de raison 0,5.
Comme $v_0 = 17 - u_0 = 17 - 1 = 16$, le terme général de (v_n) est $v_n = 16 \times 0{,}5^n$.
d. Comme $v_n = 17 - u_n$, alors $u_n = 17 - v_n$. On en déduit le terme général $u_n = 17 - 16 \times 0{,}5^n$.
La suite (v_n) est géométrique de raison comprise entre 0 et 1 et de premier terme positif, elle est donc décroissante et converge vers 0.
On en déduit que la suite $u_n = 17 - v_n$ est croissante et converge vers 17.

Tice 5 Le flocon de Koch

1 **a.** Après avoir saisi dans les cellules B2, C2 et D2, les valeurs initiales 1, 3 et 3, on peut recopier vers le bas les formules suivantes saisies en :
– B3 : =B2/3 car à chaque étape, les cotés sont coupés en 3 ;
– C3 : =C2*4 car un coté est remplacé par quatre segments ;
– D3 : =B3*C3 car le périmètre s'obtient en multipliant le nombre de cotés par la longueur d'un coté.
b. Le périmètre est croissant mais il faut copier assez loin la formule pour se faire une opinion de la limite qui semble infinie.

2 **a.** L'opération effectuée sur un triangle est une réduction (division par 3), on sait alors que les aires subissent une réduction proportionnelle au carré (division par 3^2, donc par 9).
On peut aussi l'illustrer avec la figure ci-dessous.

Pour compléter la colonne E, on saisit en E2 la formule =RACINE(3)/4 afin de donner l'aire du triangle initial, puis on saisit dans E3 la formule =E2/9 avant de la recopier vers le bas.



b. Le nombre de triangles ajoutés à une étape n correspond au nombre de cotés du flocon à l'étape $n - 1$ (car chacun donnera naissance à un triangle ajouté).

• Pour compléter la colonne F, on initialise F2 avec la formule =RACINE(3)/4, puis on saisit en F3 la formule =E3*C2 avant de la recopier vers le bas (C2 contenant le nombre de cotés de l'étape précédente, qui coïncide avec le nombre de nouveaux triangles ajoutés).

• Pour compléter la colonne G qui doit contenir l'aire cumulée du flocon, on peut soit utiliser une fonction somme avec une plage semi-relative, soit calculer la somme de proche en proche :

– soit on saisit dans G2 la formule =SOMME(F$2;F2) et on la recopie vers le bas ;

– soit on initialise G2 avec la formule =RACINE(3)/4 puis on saisit en G3 la formule =G2+F3 avant de la recopier vers le bas.

c. On peut conjecturer la limite de l'aire du flocon se situant vers 0,692 820 323.

Tableau complété

	A	B	C	D	E	F	G
1	étape	longueur d'un côté	nombre de côtés	périmètre	aire d'un nouveau triangle ajouté	aire totale ajoutée	aire du flocon
2	1	1	3	3	0,433012702	0,433012702	0,433012702
3	2	0,33333333	12	4	0,048112522	0,144337567	0,577350269
4	3	0,11111111	48	5,33333333	0,005345836	0,06415003	0,641500299
5	4	0,03703704	192	7,11111111	0,000593982	0,028511124	0,670011424
6	5	0,01234568	768	9,48148148	6,5998E-05	0,012671611	0,682683034
7	6	0,00411523	3072	12,6419753	7,33311E-06	0,005631827	0,688314861
8	7	0,00137174	12288	16,8559671	8,1479E-07	0,002503034	0,690817896
9	8	0,00045725	49152	22,4746228	9,05322E-08	0,00111246	0,691930355
10	9	0,00015242	196608	29,9661637	1,00591E-08	0,000494427	0,692424782
11	10	5,0805E-05	786432	39,9548849	1,11768E-09	0,000219745	0,692644527
12	11	1,6935E-05	3145728	53,2731799	1,24187E-10	9,76645E-05	0,692742191
13	12	5,645E-06	12582912	71,0309065	1,37985E-11	4,34064E-05	0,692785598
14	13	1,8817E-06	50331648	94,7078754	1,53317E-12	1,92918E-05	0,69280489
15	14	6,2723E-07	201326592	126,277167	1,70352E-13	8,57411E-06	0,692813464
16	15	2,0908E-07	805306368	168,369556	1,8928E-14	3,81072E-06	0,692817274
17	16	6,9692E-08	3221225472	224,492742	2,10311E-15	1,69365E-06	0,692818968
18	17	2,3231E-08	12884901888	299,323656	2,33679E-16	7,52734E-07	0,692819721
19	18	7,7435E-09	51539607552	399,098207	2,59644E-17	3,34549E-07	0,692820055
20	19	2,5812E-09	2,06158E+11	532,130943	2,88493E-18	1,48688E-07	0,692820204
21	20	8,6039E-10	8,24634E+11	709,507924	3,20548E-19	6,60837E-08	0,69282027
22	21	2,868E-10	3,29853E+12	946,010566	3,56164E-20	2,93705E-08	0,6928203
23	22	9,5599E-11	1,31941E+13	1261,34742	3,95738E-21	1,30536E-08	0,692820313
24	23	3,1866E-11	5,27706E+13	1681,79656	4,39709E-22	5,80158E-09	0,692820318
25	24	1,0622E-11	2,11106E+14	2242,39541	4,88566E-23	2,57848E-09	0,692820321
26	25	3,5407E-12	8,44425E+14	2989,86055	5,42851E-24	1,14599E-09	0,692820322
27	26	1,1802E-12	3,3777E+15	3986,48074	6,03167E-25	5,0933E-10	0,692820323
28	27	3,9341E-13	1,35108E+16	5315,30765	6,70186E-26	2,26369E-10	0,692820323
29	28	1,3114E-13	5,40432E+16	7087,07687	7,44651E-27	1,00608E-10	0,692820323
30	29	4,3712E-14	2,16173E+17	9449,43582	8,2739E-28	4,47148E-11	0,692820323
31	30	1,4571E-14	8,64691E+17	12599,2478	9,19322E-29	1,98732E-11	0,692820323

3 **a.** • La suite (l_n) vérifie, pour tout $n \geqslant 1$, la relation de récurrence $l_{n+1} = \frac{1}{3}\ l_n$. La suite (l_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $l_1 = 1$. Son terme général est donc $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

• La suite (c_n) vérifie, pour tout $n \geqslant 1$, la relation de récurrence $c_{n+1} = 4c_n$. La suite (c_n) est donc géométrique de raison 4 et de premier terme $c_1 = 3$. Son terme général est donc $c_n = 3 \times 4^{n-1}$.

• La suite (a_n) vérifie, pour tout $n \geqslant 1$, la relation de récurrence $a_{n+1} = \frac{1}{9}\, a_{n.}$ La suite (a_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{9}$ et de premier terme $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Son terme général est donc $a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$.

b. Comme $p_n = l_n \times c_n$, on obtient $p_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \times 3 \times 4^{n-1} = 3 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$. (p_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{3} > 1$. Cela confirme la conjecture émise au **1. b.** indiquant que le périmètre tend vers l'infini.

c. $t_n = a_n \times c_{n-1} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1} \times 3 \times 4^{n-2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1} \times 3 \times \dfrac{4^{n-1}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$.

d. La suite (t_n) est géométrique de raison $\dfrac{4}{9}$ pour $n \geqslant 2$.

$$t_2 + t_3 + \ldots + t_n = t_2 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{\frac{5}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{9} \times \frac{9}{5} \times \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right).$$

e. L'aire du flocon à l'étape n est

$$f_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n = t_1 + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right).$$

Lorsque n tend vers l'infini $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$ tend vers 0 car $0 < \dfrac{4}{9} < 1$. On en déduit que f_n tend vers

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{5\sqrt{3}}{20} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{8\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

On peut vérifier que $\dfrac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}692\,820\,323$.

Algorithmique 1 Calculer les termes d'une suite définie par récurrence

1 **a.** La variable U contient successivement les valeurs du terme u_n pour n variant de 0 à N ; la variable N contient le rang du terme recherché.

b. Les données d'entrée nécessaires sont u_0 et le rang N du terme recherché.

c.

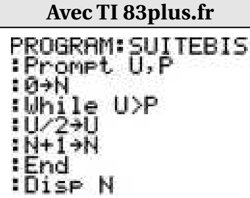
2 **a.** Les données d'entrée nécessaires à l'algorithme sont u_0 et le nombre p.

b. La variable à afficher en sortie est N.

c.

```
Entrées :        U et p
Traitement :     Initialiser à 0 le rang N
Sortie :         Tant que U > p
                 Affecter la valeur U/2 à U
                 Affecter la valeur N+1 à N
                 le rang N
```

d.

Avec TI 83plus.fr	Avec Casio graph35+
	

Algorithmique 2 Le meilleur salaire

1 **a.** L'algorithme proposé calcule et affiche les deux salaires jusqu'à ce que le salaire proposé chez Alphamat dépasse celui proposé chez Bétamat. Il affiche alors le nombre d'années écoulées.

b. Après 7 années, le salaire proposé chez Alphamat dépasse celui proposé chez Bétamat. L'algorithme aura affiché 15 nombres : les deux salaires des années 1 à 7, soit 14 nombres et ensuite le nombre d'années.

2 **a.** Les modifications à apporter ont été réalisées avec *Algobox* et *Scilab*.

```
//comparaison de salaires
A=20000;
B=18500;
Atotal=A;
Btotal=B;
n=0;
while Atotal>Btotal
    A=A+800;
    B=B*1.05;
    Atotal=Atotal+A;
    Btotal=Btotal+B;
    n=n+1;
    afficher(string(Atotal)+"      "+string(Btotal))
end
afficher("Nombre d''annees : "+string(n))
```

```
Code de l'algorithme
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  Atotal EST_DU_TYPE NOMBRE
  Btotal EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  A PREND_LA_VALEUR 20000
  B PREND_LA_VALEUR 18500
  Atotal PREND_LA_VALEUR A
  Btotal PREND_LA_VALEUR B
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (Atotal>Btotal) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    A PREND_LA_VALEUR A+800
    B PREND_LA_VALEUR B*1.05
    Atotal PREND_LA_VALEUR Atotal+A
    Btotal PREND_LA_VALEUR Btotal+B
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    AFFICHER Atotal
    AFFICHER "      "
    AFFICHER Btotal
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Nombre d'années  "
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

b. En exécutant ce programme, on obtient $n = 11$, ce qui indique que, bien que chez Alphamat le salaire devienne plus intéressant dès 7 années, il faut attendre 11 ans pour que les salaires cumulés rattrapent ceux proposés chez Bétamat.

3 En augmentant progressivement le salaire initial proposé chez Bétamat, on atteint (en s'arrêtant à l'euro près) un salaire cumulé meilleur dès la sixième année pour B = 19 259 €.

Algorithmique 3 Somme convergente ou divergente ?

1 Pour chaque suite, la formule de récurrence implicite peut être explicitée.

$$u_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} = u_{n-1}+\frac{1}{n^2}.$$

$$v_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n} = v_{n-1}+\frac{1}{n}.$$

$$w_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n} = w_{n-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

On en déduit les variations en déterminant le signe de la différence entre deux termes consécutifs.

$u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n^2} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$, donc la suite (u_n) est croissante.

$v_n - v_{n-1} = \dfrac{1}{n} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$, donc la suite (v_n) est croissante.

$w_n - w_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ n'est pas de signe constant donc la suite (w_n) n'est ni croissante ni décroissante.

2 **a.** $u_4 = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2} = \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16} = \frac{144}{144}+\frac{36}{144}+\frac{16}{144}+\frac{9}{16} = \frac{205}{144} \approx 1{,}423611111$.

b. $u_{1\,000\,000} - u_{10\,000} \approx 10^{-4}$.

c. La suite (u_n) semble converger.

❸

```
>>> sommeV(4)
2.08333333333
>>> sommeV(10000)
9.78760603604
>>> sommeV(1000000)
14.3927267229
>>> sommeW(4)
0.583333333333
>>> sommeW(10000)
0.69309718306
>>> sommeW(1000000)
0.69314668056
```

```
def sommeV(n):
    s=0
    for i in range (1,n+1):
        s=s+1.0/i
    print(s)

def sommeW(n):
    s=0
    for i in range (1,n+1):
        s=s+pow(-1,i+1)/i
    print(s)
```

$v_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{12}{12}+\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{25}{12}\approx 2{,}08333333$.

$w_4 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{12}{12}-\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{7}{12}\approx 0{,}58333333$

$v_{1\,000\,000} - v_{10\,000} \approx 4{,}6$. La suite ne semble pas converger.

$w_{1\,000\,000} - w_{10\,000} \approx 5 \times 10^{-5}$. La suite semble converger.

Algorithmique 4 Rapidité de convergence

❶ **a.** La première valeur de u affichée est $\frac{6}{5}$.

Elle correspond à $u_1 = 1 + \frac{1}{1+u_0}$. On en déduit que $\frac{1}{1+u_0} = \frac{1}{5}$ et $u_0 = 4$.

Huit termes sont affichés en commençant par u_1, donc $n = 8$.

b. Les nombres u_n sont des nombres rationnels car obtenus par sommes, produits et quotients de nombres rationnels.

c. $\frac{6}{5}=1{,}2$; $\frac{16}{11}\approx 1{,}4545$; $\frac{38}{27}\approx 1{,}4074$; $\frac{92}{65}\approx 1{,}4154$; $\frac{222}{157}\approx 1{,}4140$; $\frac{536}{379}\approx 1{,}41425$; $\frac{1294}{915}\approx 1{,}414208$; $\frac{3124}{2209}\approx 1{,}414215$.

La suite (u_n) semble converger vers $\sqrt{2}$.

d. La fenêtre *ci-dessous* (*Fig. 1*) montre une suite de distances entre u_n et $\sqrt{2}$ décroissante et convergente vers 0. Cela confirme la convergence de la suite (u_n) vers $\sqrt{2}$.

❷ **a.** et **b.** *Ci-dessous* (*Fig. 2*) l'exécution pour $v_0 = 4$ et $n = 8$.

L'affichage consécutif des deux distances permet de voir qu'à partir de v_4 la suite (v_n) converge nettement plus rapidement que (u_n).

❸ L'algorithme programmé ci-*dessous* (*Fig. 3*) a été exécuté pour diverses valeurs de n.

La suite (v_n) converge à chaque fois plus rapidement que (u_n) dès que $n \geqslant 4$.

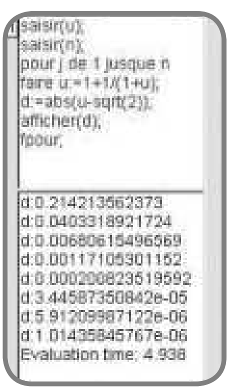


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Problème ouvert 1 Suite royale

En notant u_n le montant donné au $n^{\text{ème}}$ enfant, on a :

$$\begin{cases} u_1 = 200 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 40, \text{ pour } 1 \leqslant n \leqslant 3 \end{cases}$$

Calculons les termes de la suite :

$u_1 = 200$;

$u_2 = \dfrac{1}{2}\,u_1 + 40 = \dfrac{1}{2} \times 200 + 40 = 100 + 40 = 140$;

$u_3 = \dfrac{1}{2}\,u_2 + 40 = \dfrac{1}{2} \times 140 + 40 = 70 + 40 = 110$;

$u_4 = \dfrac{1}{2}\,u_3 + 40 = \dfrac{1}{2} \times 110 + 40 = 55 + 40 = 95$.

L'héritage du roi s'élève à $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 200 + 140 + 110 + 95 = 545$ pièces d'or.

Problème ouvert 2 Sur le chantier

Considérons une pile complète de n étages.

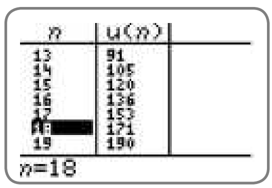
En notant u_n le nombre de tuyaux de cette pile à n étages, on a $u_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

On identifie la somme des termes d'une suite arithmétique : $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

On peut désormais soit étudier une table de valeurs de (u_n), soit résoudre une équation du second degré.

• Table de valeurs

Pour empiler 160 tuyaux, il faut placer 18 tuyaux sur la première ligne ; il en manquera 11 pour que la pile soit complète.



• Résolution de l'équation $\dfrac{n(n+1)}{2} = 160$

Cette équation équivaut à $n^2 + n - 320 = 0$.

Les solutions sont $n_1 \approx 17{,}4$ et $n_2 \approx -18{,}4$. La solution négative est exclue, la solution entière positive est supérieure à 17,4, soit $n = 18$.

Problème ouvert 3 Balle de match

• En notant u_n le nombre de joueurs présents au $n^{\text{ème}}$ tour en partant de la finale, la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison 2 (il y a deux fois plus de joueurs au tour « suivant »).

Le terme général de la suite (u_n) est $u_n = u_1 \times 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

Le nombre de joueurs présents au premier tour est $u_7 = 2^7 = 128$.

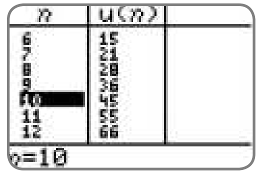
• Par le même raisonnement, on peut considérer la suite (v_n) des nombres de matchs disputés au $n^{\text{ème}}$ tour en partant de la finale.

$v_n = \dfrac{u_n}{2}$ car les joueurs jouent par 2. On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 2$ et de raison 2.

Le nombre de matchs joués est la somme $S_7 = v_1 + v_2 + \ldots + v_7 = v_1 \times \dfrac{1-2^7}{1-2} = 1 \times \dfrac{-127}{-1} = 127$.

Problème ouvert 4 **Intersections**

En notant u_n le nombre de droites tracées avec n points, on constate que $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$.
Au rang $n + 1$, en ajoutant un point, on crée n droites supplémentaires car ce point n'est sur aucune droite déjà créée (points deux à deux non alignés). On a donc la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + n$.
On peut ainsi déterminer u_{10} avec la calculatrice.



On peut aussi identifier la suite (u_n) comme somme des $n - 1$ premiers entiers :
$u_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$.
La suite (u_n) est alors la somme des termes d'une suite arithmétique et $u_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

On en déduit $u_{10} = \dfrac{(10-1)\times 10}{2} = 45$.

On construit donc 45 droites.

Corrigés des exercices et problèmes

QCM Pour bien commencer

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 344.

Exercices d'application

1 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

2 **a.** $u_0 = 10$, $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 1$, $u_4 = \dfrac{10}{17}$, $u_5 = \dfrac{5}{13}$.
b $v_0 = 0$, $v_1 = -1$, $v_2 = 2$, $v_3 = -3$, $v_4 = 4$, $v_5 = -5$.
c. $w_0 = 1$, $w_1 = \dfrac{1}{2}$, $w_2 = \dfrac{3}{4}$, $w_3 = \dfrac{7}{8}$, $w_4 = \dfrac{15}{16}$, $w_5 = \dfrac{31}{32}$.

3 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

4 **a.** $u_0 = 5$, $u_1 = 10$, $u_2 = 20$, $u_3 = 40$, $u_4 = 80$.
b. $v_0 = 4$, $v_1 = 8$, $v_2 = 32$, $v_3 = 512$, $v_4 = 131\,072$.
c. $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = \dfrac{1}{2}$, $w_3 = \dfrac{1}{6}$, $w_4 = \dfrac{1}{24}$.

5 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

6 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

7 **a.** $1 + 2{,}5n$
b. $(-1)^n$
c. $10^{n+1} - 1$
d. $2^{(-1)^n}$

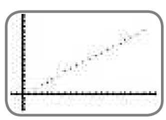
8 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

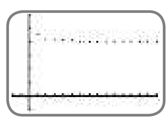
9 **a.** 55 **b.** 5
c. 385 **d.** 1,5498

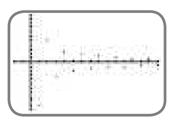
10 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

11 **a.** U représente le premier terme de la suite (u_n).
b. U = 10 est pair; U = $\dfrac{10}{2}$ = 5 est impair; ;
U = $\dfrac{3\times5+1}{2}$ = 8 est pair; U = $\dfrac{8}{2}$ = 4 est pair;
U = $\dfrac{4}{2}$ = 2 est pair; U = $\dfrac{2}{2}$ = 1 fin de l'algorithme;
U = 21 est impair; U = $\dfrac{3\times21+1}{2}$ = 32 est pair;
U = $\dfrac{32}{2}$ = 16 est pair; U = $\dfrac{16}{2}$ = 8 est pair; U = $\dfrac{8}{2}$ = 4 est pair; U = $\dfrac{4}{2}$ = 2 est pair; U = $\dfrac{2}{2}$ = 1 fin de l'algorithme;
c. U est un entier suffit.
d. U = 16 convient.

12 **a. b. c.**


Croissante


Décroissante


Ni croissante ni décroissante

13 **a.**

x	0		1		3,5		$+\infty$
f	4	↘	2	↗	5	↘	

b. La suite (u_n) est décroissante pour $n \geqslant 4$.

14 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

15 **a.** $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - (n+1)^2 - (5n - n^2)$
$= 5n + 5 - n^2 - 2n - 1 - 5n + n^2$
$= 4 - 2n.$

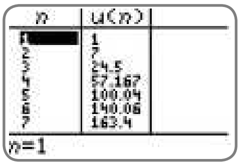
$4 - 2n < 0$ pour $n > 2$ donc la suite (u_n) est décroissante à partir de $n \geqslant 3$.

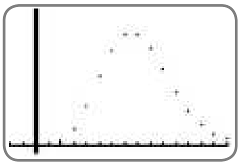
b. $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - 10(n+1) + 16 - (n^2 - 10n + 16)$
$= 2n - 9.$

$2n - 9 > 0$ pour $n > 4{,}5$ donc la suite (u_n) est croissante à partir de $n \geqslant 5$.

16 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

17 **a.**





La suite (u_n) semble décroissante à partir de $n \geqslant 8$.

b. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{7}{n} < 1$ pour $n > 7$.

c. Si tous les termes de la suite (u_n) sont positifs, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ équivaut à $u_{n+1} < u_n$.

Donc la suite (u_n) est décroissante à partir $n \geqslant 8$.

18 $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{n}{n+1} < 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Si tous les termes de la suite (u_n) sont positifs, $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} < 1$ équivaut à $u_n < u_{n-1}$.

Donc la suite (u_n) est décroissante à partir $n \geqslant 0$.

19 **a.** $i = 0$;

1ère boucle : V = 4; U = 0,5 × 4 + 1 = 3; U < V
donc $i = 1$.

2e boucle : V = 3; U = 0,5 × 3 + 1 = 2,5; U < V
donc $i = 2$.

3e boucle : V = 2,5; U = 0,5 × 2,5 + 1 = 2,25; U < V
donc $i = 3$.

$i = n$ est vérifié, on affiche « (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$ ».

b. La suite est définie par récurrence. u_0 est en entrée et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1$.

c. Cet algorithme teste si une suite est décroissante jusqu'à un rang n donné.

d. n représente le nombre de termes comparés.

e. L'algorithme donne en sortie « (u_n) n'est pas décroissante sur $\mathbb{N}$ ».

20 **a.** $u_0 = \dfrac{0^2}{2^0} = 0$, $u_1 = \dfrac{1^2}{2^1} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{2^2}{2^2} = \dfrac{4}{4} = 1$, $u_3 = \dfrac{3^2}{2^3} = \dfrac{9}{8}$.

b. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{2^n}} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n^2} = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$.

$\dfrac{(n+1)^2}{2n^2} < 1 \Leftrightarrow (n+1)^2 < 2n^2 \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 < 2n^2$
$\Leftrightarrow -n^2 + 2n + 1 < 0.$

Les racines du polynôme $-n^2 + 2n + 1$ sont $1 \pm \sqrt{2}$ et sont signe est négatif à l'extérieur des racines, donc le polynôme est négatif pour tout $n > 1 + \sqrt{2}$.

On en déduit que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout $n \geqslant 3$.

c. Comme la suite (u_n) est positive, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ équivaut à $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante à partir de $n = 3$.

21 **a.** $u_0 = 1 = 0$, $u_1 = 5$, $u_2 = \dfrac{25}{2}$, $u_3 = \dfrac{125}{6}$.

b. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5}{n+1}$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow 5 < n+1 \Leftrightarrow n > 4$.

c. Comme la suite (u_n) est positive, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ équivaut à $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante à partir de $n = 4$.

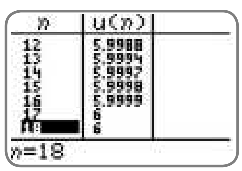
22 $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$, donc la suite (u_n) est décroissante.

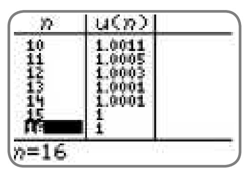
23 (u_n) semble converger vers 0.
(v_n) semble diverger.
(u_n) semble converger vers -2.

24 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

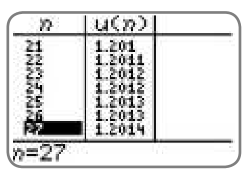
25 **a.** La suite (u_n) semble converger vers 6.

b. La suite (v_n) semble converger vers 1.





c. La suite (w_n) semble converger vers environ 1,202.



26 **a.** La suite (u_n) semble converger vers -1

b. $v_{n+1} = u_{n+1} + 1$

$$= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + 1\right) = \frac{1}{2}v_n .$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c. La suite (v_n) converge donc vers 0 car sa raison est strictement comprise entre 0 et 1, d'où la suite (u_n) converge vers -1 car $u_n = v_n - 1$.

27 **1.** b. **2.** a., b.

28 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

29 **a.** $u_n = 49 - 3n$.

b. $49 - 3n < 0 \Leftrightarrow n > \frac{49}{3}$, donc le premier terme négatif correspond à $n = 17$, soit

$$u_{17} = 49 - 3 \times 17 = -2.$$

30 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

31 **a.** $u_n = 10 + \frac{2}{3}n$.

b. $10 + \frac{2}{3}n > 81 \Leftrightarrow n > 106{,}5$, donc le premier terme supérieur à 81 correspond à $n = 107$,

$$\text{soit } u_{107} = 10 + \frac{2}{3} \times 107 = \frac{214}{3}.$$

32 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

33 **a.** $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$.

b. (u_n) semble arithmétique de raison 1 mais $u_3 = 8$ contredit cette hypothèse. Elle n'est donc pas arithmétique.

34 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

35 **a.** $u_{12} - u_5 = 59 - 150 = -91 = (12 - 5)r = 7r$, d'où $r = -\frac{91}{7} = -7$.

b. $u_5 = u_0 + 5r = u_0 - 35$ d'où $u_0 = u_5 + 35 = 150 + 35 = 185$.

c. $u_n = 185 - 7n < 0 \Leftrightarrow n > \frac{185}{7}$ donc le premier terme négatif correspond à $n = 27$,

$$\text{soit } u_{27} = 185 - 7 \times 27 = -4.$$

36 $u_n = v_n$ équivaut à $167 - 4n = 42 + 2{,}5n$, c'est-à-dire $1{,}5n = 125 \Leftrightarrow n = \frac{125}{1{,}5} = \frac{250}{3} \notin \mathbb{N}$. Il n'existe pas d'entier n tel que $u_n = v_n$.

37 **a.** $u_0 = 1$ et $r = \frac{1}{3}$.

b. $u_{100} = 1 + \frac{1}{3} \times 100 = \frac{103}{3}$.

38 **a.** $u_0 = 7$ et $r = 3$.

b. $3n + 7 = 500 \Leftrightarrow n = \frac{493}{3} \notin \mathbb{N}$. 500 n'est pas un terme de la suite (u_n).

$3n + 7 = 1000 \Leftrightarrow n = \frac{993}{3} = 331 \in \mathbb{N}$. 1000 est le terme de rang 331 de la suite (u_n).

39 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 344.

40 **a.** $u_n = 17 - 2n$.

b. On calcule $u_{17} = 17 - 2 \times 17 = -17$.

$$S_{17} = 18 \times \frac{(17 - 17)}{2} = 0.$$

41 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 345.

42 On identifie la raison 1 d'une suite arithmétique. En nommant $u_0 = 2011$, alors $u_n = 2011 + n$. Le dernier terme 2099 correspond à $n = 2099 - 2011 = 88$. Il y a donc 89 termes dans cette somme.

$$S = 89 \times \frac{(2011 + 2099)}{2} = 89 \times 2055 = 182\,895.$$

43 **a.** $u_n = 1 + 3n$.

b. $S_n = (n + 1) \times \frac{(1 + 1 + 3n)}{2} = (n + 1) \times \left(1 + \frac{3}{2}n\right) = \frac{3}{2} n^2 + \frac{5}{2} n + 1$.

c. $S_n = 145 \Leftrightarrow \frac{3}{2} n^2 + \frac{5}{2} n + 1 = 145$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 5n - 288 = 0.$$

Les racines du polynôme sont $-\frac{32}{3}$ et 9, comme n est un entier naturel, seul 9 convient.

44

1. **a.** =B2+3

b. =C2+B3

2. **a.** (u_n) est une suite arithmétique de raison 3.

b. $u_n = 18351 + 3(n - 1) = 18348 + 3n$.

c. $u_{365} = 18348 + 3 \times 365 = 19443$.

d. $S = 365 \times \frac{(18351 + 19443)}{2}$

$= 365 \times 18\,897$

$= 6\,897\,405$.

	A	B	C
1	jour	nombre de visiteurs	nombre total de visiteurs
364	363	19437	6858522
365	364	19440	6877962
366	365	19443	6897405

45 **a.** Avec 7 élèves de moins par semaine, la suite (u_n) est arithmétique de premier terme 620 et de raison -7.

b. $u_n = 620 - 7n$. **c.** $u_{15} = 620 - 7 \times 15 = 515$.

d. $u_1 = 620 - 7 \times 1 = 613$, $u_{36} = 620 - 7 \times 36 = 368$, d'où

$$S_{36} = 36 \times \frac{(613 + 368)}{2} = 36 \times \frac{981}{2} = 17658.$$

Chaque élève mangeant en moyenne 3 fois, il y aura $3 \times 17\,658 = 52\,974$ repas servis à la cantine.

46 En notant u_n le nombre de cigarettes fumées pendant l'arrêt progressif de Paul, la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 40$ et de raison – 2.

a. $u_n = 40 - 2n = 0$ pour $n = 20$. Il mettra 20 jours à arrêter.

b. $S_{20} = u_1 + \ldots + u_n = 20 \times \dfrac{(38+0)}{2} = 20 \times 19 = 380.$

Il aura fumé 380 cigarettes en trop.

47 $u_1 = 13$ et $u_{100} = 2011$.

La moyenne vaut :

$$\frac{S_{100}}{100} = \frac{u_1 + u_{100}}{2} = \frac{13+2011}{2} = 1012\ .$$

48 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 345.

49 **a.** $u_0 = 486$, $u_1 = 162$, $u_2 = 54$, $u_3 = 18$.

b. $u_n = 486 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

c. $u_6 = 486 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^6 = \dfrac{2}{3} < 1$.

50 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 345.

51 $u_0 = 2^{2^0} = 2^1 = 2$, $\quad u_1 = 2^{2^1} = 2^2 = 4$,

$u_2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$.

Comme $\dfrac{u_1}{u_0} = 2$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = 4$, la suite (u_n) ne peut être géométrique.

52 $u_n = u_0 + nr$.

$v_n = 2^{u_0+nr} = 2^{u_0} \times \left(2^r\right)^n = v_0 \times q^n$. (v_n) est une suite géométrique de premier terme 2^{u_0} et de raison 2^r.

53 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 345.

54 **a.** $u_n = 1 \times 1{,}5^n$.

$v_n = 10 \times 0{,}6^n$.

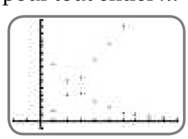
b. $w_n = u_n \times v_n = 1{,}5^n \times 10 \times 0{,}6^n = 10 \times 0{,}9^n$.

La suite (u_n) est géométrique de premier terme 10 et de raison 0,9.

55 **a.** La suite (u_n) est croissante car elle est arithmétique de raison positive. La suite (v_n) est décroissante car elle est géométrique de premier terme positif et de raison comprise strictement entre 0 et 1.

b. $u_n = -1 + 2{,}5n > 12 \Leftrightarrow n > \dfrac{13}{2{,}5}$, c'est-à-dire à partir de $n = 6$. Il existe donc n_0 (6 par exemple) tel que $u_{n_0} > v_0$ et par suite pour tout $n > n_0$, comme $u_n > u_{n_0}$ car la suite (u_n) est croissante et $v_0 > v_n$ car la suite (v_n) est décroissante, alors $u_n > v_n$ pour tout entier n.

c.



d. On peut lire la plus petite valeur de n_0 : 3.

56 **a.** La suite (u_n) est géométrique de premier terme 0,1 et de raison 2.

b. $u_n = 0{,}1 \times 2^n$. $u_5 = 0{,}1 \times 2^5 = 0{,}1 \times 32 = 3{,}2$ mm.

c. $u_7 = 0{,}1 \times 2^7 = 0{,}1 \times 128 = 12{,}8$ mm.

Et $u_8 = 0{,}1 \times 2^8 = 0{,}1 \times 256 = 25{,}6$ mm.

Elle a réalisé 7 pliages.

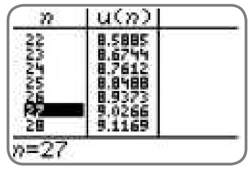
57 **a.** La suite (u_n) est géométrique car augmenter de 1% par an revient à multiplier par 1,01. Son premier terme est 6,9 et sa raison 1,01.

b. $u_n = 6{,}9 \times 1{,}01^n$.

c. L'année 2025 correspond à $n = 2025 - 2010 = 15$.

$u_{15} = 6{,}9 \times 1{,}01^{15} \approx 8{,}01$ milliards d'habitants.

d. La population dépassera 9 milliards d'habitants pour $n = 27$, c'est-à-dire en 2010 + 27 = 2037.



n	u(n)
22	8.5885
23	8.6744
24	8.7612
25	8.8488
26	8.9373
27	9.0266
28	9.1169

n=27

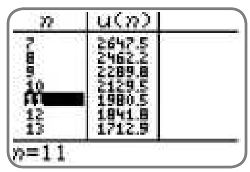
58 **a.** La suite (u_n) est géométrique car diminuer de 7% par an revient à multiplier par 0,93. Son premier terme est 4 400 et sa raison 0,93.

b. $u_n = 4\,400 \times 0{,}93^n$.

c. L'année 2015 correspond à $n = 2015 - 2009 = 16$.

$u_{16} = 4\,400 \times 0{,}93^{16} \approx 1\,378$ morts.

d. Le seuil des 2 000 victimes est franchi pour $n = 11$, c'est-à-dire en 2009 + 11 = 2020.



n	u(n)
7	2647.5
8	2462.2
9	2289.8
10	2129.5
11	1980.5
12	1841.8
13	1712.9

n=11

59 **a.** $u_2 = 100 \times \dfrac{5}{4} = 125$, $u_3 = 125 \times \dfrac{5}{4} = 156{,}25$.

b. La suite (u_n) est géométrique car on multiplie la hauteur précédente par $\dfrac{5}{4}$. $u_n = 100 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}$.

c. $u_6 = 100 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^{6-1} \approx 305$ cm.

d. On cherche n tel que $u_n > 900$ pour réaliser un triple saut périlleux. $u_{10} = 100 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^{10-1} \approx 745$ cm et $u_{11} = 100 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^{11-1} \approx 931$ cm. Il faut réaliser 11 bonds.

60 **a.** La suite (u_n) est géométrique car on multiplie par 5 le nombre de messages envoyés à chaque étape. Son premier terme est 1 et sa raison 5.

b. On cherche n tel que $u_n = 5^n > 6 \times 10^9$. $u_{13} \approx 1{,}22$ milliards et $u_{14} \approx 6{,}10$ milliards. Il faudra 15 étapes en comptant la première.

61 **1.** $u_0 = 1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 4$, $u_3 = -8$, $u_4 = 16$.
2. $u_n = (-2)^n$.
3. **a.** $v_n = u_{2n} = (-2)^{2n}$.
b. $v_n = (-2)^{2n} = 4^n$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison 4.

62 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 345.

63 **a.** $u_0 = 80$, $u_1 = 40$, $u_2 = 20$, $u_3 = 10$.

b. $S_n = 80 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 160 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

c. $S_{100} = 160 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right) \approx 160$.

$S_{200} = 160 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{200}\right) \approx 160$. On peut conjecturer que S_n converge vers 160.

d. S_n converge vers 160 car $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge vers 0 car $0 < \frac{1}{2} < 1$.

64 **a.** La suite (u_n) est la somme des termes d'une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $-\frac{1}{2}$.

b. $u_n = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

$u_{10} = \dfrac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \approx 0{,}667$.

c. $\lim u_n = \lim \dfrac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \dfrac{2}{3}$

car $0 < \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ d'où $\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

65 **a.** $u_0 = 1$ et $q = -2$. $u_n = (-2)^n$. $(-2)^n = 16384$ pour $n = 14$. Il y a donc 15 termes dans cette somme.

b. $S = \dfrac{1-(-2)^{15}}{1-(-2)} = \dfrac{1-(-2)^{15}}{3} = 10\,923$

66 **a.** La suite (u_n) est géométrique car diminuer de 2% revient à multiplier par 0,98. Son premier terme est 31 et sa raison 0,98.
b. $u_n = 31 \times 0{,}98^n$.
c. L'année 2025 correspond à $n = 2025 - 2007 = 18$.
$u_{18} = 31 \times 0{,}98^{18} \approx 21{,}55$ milliards de barils.
d. On étudie $S_n = 31 \times \dfrac{1-(0{,}98)^n}{1-0{,}98}$
$= 1550 \times (1 - 0{,}98^n)$.
$S_{18} = 1550 \times (1 - 0{,}98^{18}) \approx 472{,}5$ milliards de barils.
e. $u_{79} \approx 1235{,}8$ et $u_{80} \approx 1242{,}1$. Les réserves seront épuisées en 2007 + 80 = 2087.

67

a. $S = 2$;
$u > p \rightarrow 1^{\text{ère}}$ boucle : $u = 2 \times \frac{1}{2} = 1$; $S = 2 + 1 = 3$.

$u > p \rightarrow 2^{\text{e}}$ boucle : $u = 1 \times \frac{1}{2} = 0{,}5$;
$S = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$.

$u > p \rightarrow 3^{\text{e}}$ boucle : $u = 0{,}5 \times \frac{1}{2} = 0{,}25$;
$S = 3{,}5 + 0{,}25 = 3{,}75$.
$u < p \rightarrow$ fin de la boucle « tant que »,
afficher $S = 3{,}75$.
b. p est la précision, lorsque $u < p$, on stoppe le calcul. q est la raison de la suite géométrique.
c. Les valeurs successives de u sont les termes de la suite géométrique.
d. Si $|q| > 1$, la suite (u_n) diverge et donc à moins que $u < p$ au départ, la boucle ne s'arrêtera jamais.

68 **a.** La suite (C_n) est géométrique car augmenter d'un taux t revient à multiplier par $1 + t$. Son premier terme est 1000 et sa raison $1 + t$.
b. Au bout de 12 mois, l'augmentation est de 7%, ce qui équivaut à multiplier par 1,07. Or le capital aura été augmenté 12 fois du taux t, c'est-à-dire multiplié 12 fois par $1 + t$, d'où $(1 + t)^{12} = 1{,}07$.

$$1{,}07^{1/12} \approx 1{,}00565 \text{ d'où } t \approx 0{,}565\%.$$

c. Au bout de trois mois,
$$C_n = 1000 \times (1 + t)^3 \approx 1017{,}06 \text{ €}.$$

69 **1.** Les suites (B_n) et (C_n) sont géométriques. (B_n) a pour premier terme $B_0 = 2000$ et pour raison 1,02. (C_n) a pour premier terme $C_0 = 1500$ et pour raison 1,05.

2. **a.** $u_n = \dfrac{C_n}{B_n} = \dfrac{1500 \times 1{,}05^n}{2000 \times 1{,}02^n} = 0{,}75 \times \left(\dfrac{1{,}05}{1{,}02}\right)^n$.

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}75$ et de raison $\dfrac{1{,}05}{1{,}02}$.

b. (u_n) est une suite géométrique positive, de raison strictement supérieure à 1, elle diverge donc vers $+\infty$. Il existe donc un rang n à partir duquel $u_n > 1$. D'où $C_n < B_n$.
c. $C_n < B_n$ à partir de $n = 10$.
3. Il faudrait proposer 8% d'augmentation.

70 La suite (u_n) est arithmétique de premier terme -7 et de raison 5.

71 $u_1 - u_0 = 47 - 25 = 22$ et $u_2 - u_1 = 79 - 47 = 32$. $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{47}{25} \approx 1{,}88$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{79}{47} \approx 1{,}68$. $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) ne peut être géométrique.

72 **1.** **a.** $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_3 = 32$.
b. Cette suite ne peut être arithmétique car $u_2 - u_1 = 4$ et $u_3 - u_2 = 24$.
Cette suite peut être géométrique car $u_2 = 4 \times u_1$ et $u_3 = 4 \times u_2$.
2. **a.** et **b.**
$u_{n+1} = 4 \times u_n$
$\Leftrightarrow 9(n+1)^2 - 21(n+1) + 14 = 4(9n^2 - 21n + 14)$
$\Leftrightarrow 9n^2 + 18n + 9 - 21n - 21 + 14 = 36n^2 - 84n + 56$
$\Leftrightarrow 27n^2 + 81n + 54 = 0$
$\Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 = 0$.
c. Les solutions de cette équation sont 1 et 2. La relation. $u_{n+1} = 4 \times u_n$ n'est donc pas valable pour tout $n \geqslant 1$.

73 **a.** Sa raison est $u_1 - u_0 = 15 - 5 = 10$.
b. Sa raison est $\frac{u_1}{u_0} = \frac{15}{5} = 3$.

74 **a.** $u_8 - u_3 = 12 - 7 = 5 = (8-3)r = 5r$, d'où $r = 1$.
b. $\frac{v_5}{v_3} = \frac{12}{3} = 4 = q^2$, or $q < 0$ d'où $q = -2$.

Raisonnement logique

75 **a.** Vrai. Comme $f(n+1) > f(n)$ car f est croissante, alors $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Faux. $f(x) = (x - 0{,}5)^2$ n'est pas croissante sur $[0;+\infty[$ mais $u_n = f(n)$ si.

76 **a.** Faux, si sa raison est négative, le signe de deux termes consécutifs n'est jamais constant.
b. Vrai car si sa raison était positive, les termes de la suite seraient positifs à partir d'un certain rang.
c. Faux, si sa raison est inférieure ou égale à -1.
d. Faux, si sa raison est inférieure ou égale à -1.
e. Vrai. Elle diverge vers $+\infty$ si son premier terme est positif, vers $-\infty$ sinon.

77 **a.** Toutes les suites décroissantes sur $\mathbb{N}$ sont majorées.
b. Il existe des suites décroissantes sur $\mathbb{N}$ qui sont convergentes.
c. Il existe des suites convergentes sur $\mathbb{N}$ qui sont décroissantes.

78 **1.** **a.** (P_2) : Si la suite (v_n) est divergente alors la suite (u_n) est divergente.
b. (P_3) : Si la suite (v_n) n'est pas divergente alors la suite (u_n) n'est pas divergente.
c. (P_4) : Si la suite (u_n) n'est pas divergente alors la suite (v_n) n'est pas divergente.
2. $(P_1) \Leftrightarrow (P_3)$ et $(P_2) \Leftrightarrow (P_4)$.
3. (P_1) et (P_3) sont vraies car comme (u_n) est croissante, elle diverge vers $+\infty$ et comme $v_n > u_n$, (v_n) diverge aussi vers $+\infty$.
(P_2) et (P_4) sont fausses car comme (v_n) est croissante, elle diverge vers $+\infty$ mais (u_n) peut être croissante et convergente.

79 **a.** $u_n = -n$ **b.** $u_n = n - 5$ **c.** $u_n = (-1)^n$ **d.** $u_n = n^2$

80 **a.** Nécessaire
b. Nécessaire et suffisant.

Restitution des connaissances

81 **a.**
$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p + u_p \times q + u_p \times q^2 + \ldots + u_p \times q^{n-p}$$
$$= u_p\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-p}\right) = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$$
b. $n - p + 1$ est bien le nombre de termes de la somme de u_p à u_n, on retrouve ainsi la formule générale.

82 **a.** $u_n = u_0 + nr$ et $v_n = v_0 + nr'$, d'où $w_n = u_n - 2v_n$ $= u_0 + nr - (v_0 + nr') = u_0 - 2\,v_0 + n(r - r')$.
(w_n) est arithmétique de premier terme $u_0 - 2\,v_0$ et de raison $r - r'$.
b. $u_n = u_0 \times q^n$ et $v_n = v_0 \times q'^n$,
d'où $w_n = \frac{2u_n}{v_n} = \frac{2u_0}{v_0} \times \left(\frac{q}{q'}\right)^n$.
(w_n) est géométrique de premier terme $\frac{2u_0}{v_0}$ et de raison $\frac{q}{q'}$.

83 **a.** Si $u_n = u_0 + nr = u_0 \times q^n$ alors
$u_0 + r = u_0 \times q$ et $u_0 + 2r = u_0 \times q^2$
d'où par soustraction
$\mathrm{r} = u_0 \times q - u_0$ et r
$= u_0 \times q_2 - u_0 \times q$
$= (u_0 \times q - u_0) \times q$.
On en déduit que $q = 1$ et donc la suite est constante.

Se tester sur…

QCM : Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 345.

Prêt pour le contrôle ?

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 345

96 **a.** $u_0 = 2^0 - 4 \times 0 = 1$, $u_1 = 2^1 - 4 \times 1 = -2$, $u_2 = 2^2 - 4 \times 2 = -8$.
b. La suite n'est ni arithmétique ni géométrique car $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$
c. $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 4(n+1) - (2^n - 4n) = 2^{n+1} - 2^n - 4$
$= 2^n(2-1) - 4 = 2^n - 4$.

Or $2^n - 4 \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 2$, donc la suite (u_n) est croissante pour $n \geqslant 2$.

d. $u_4 = 2^4 - 4 \times 4 = 0$, or la suite (u_n) est croissante pour $n \geqslant 2$, donc pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant u_4$ c'est à dire $u_n \geqslant 0$.

Problèmes

97 **a.** $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ et $u_3 = 6$.
$v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 9$ et $v_3 = 36$.
On conjecture que $v_n = u_n{}^2$.

b. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c. $v_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

d. On vérifie par exemple que :
$$v_6 = \frac{6^2(6+1)^2}{4} = \frac{36 \times 49}{4} = 441 .$$

n	u(n)	v(n)
0	0	0
1	1	1
2	3	9
3	6	36
4	10	100
5	15	225
6	21	441

n=0

98 **1. a.** $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

b. $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} = \dfrac{6}{12} + \dfrac{2}{12} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.

c. $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \dfrac{1}{4\times 5} = \dfrac{30}{60} + \dfrac{10}{60} + \dfrac{5}{60} + \dfrac{3}{60}$
$$= \frac{48}{60} = \frac{4}{5}.$$

2. a. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

On vérifie par exemple $u_7 = \dfrac{7}{8} = 0{,}875$.

n	u(n)
1	.5
2	.66667
3	.75
4	.8
5	.83333
6	.85714
7	.875

n=7

99 **1.** $u_6 = \dfrac{7}{6}$. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

2. a. $v_2 = 2 - \dfrac{1}{v_1} = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $v_3 = 2 - \dfrac{1}{v_2} = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$,

$v_4 = 2 - \dfrac{1}{v_3} = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$.

On conjecture que $v_n = u_n$ pour tout $n \geqslant 2$.

b. $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$.

$$2 - \frac{1}{u_n} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

Donc $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

100 **a.** On définit une suite par un premier terme u0 = 0 et par la relation un +1 = un + $\dfrac{4\times(-1)^n}{2n+1}$ pour $n \geqslant 0$.
La suite (u_n) tend vers 3,14, une approximation de π.

n	u(n)
400	3.1391
401	3.1441
402	3.1391
403	3.1441
404	3.1391
405	3.1441
406	3.1391

n=400

b. La suite variant d'un terme à l'autre de l'ordre de $\dfrac{4}{n}$, on peut assurer des variations inférieures à 0,01 pour $n \geqslant 400$.
Mais pour un chiffre significatif supplémentaire il faut que $n \geqslant 4000$.

101 **1.** $\sqrt{x} - x$ est positif sur $[0;1]$ et négatif sur $[1;+\infty[$.

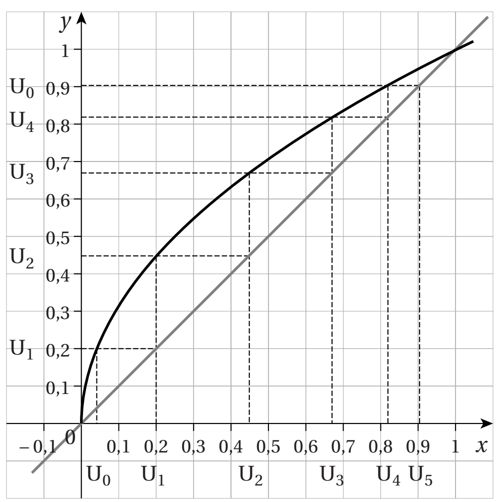
2. a. $u_0 = 4$, $u_1 = 2$, $u_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}414$, $u_3 = \sqrt{\sqrt{2}} \approx 1{,}189$.

b. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{u_n}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$. Si $u_n > 1$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, d'où la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. Si $u_n < 1$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}} > 1$, d'où la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

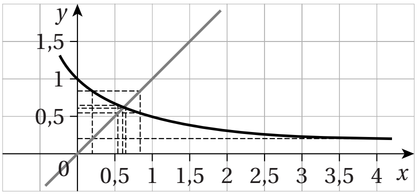
3. a. On vérifie que $u_0 = 4$, $u_1 = 2$ et $u_2 \approx 1{,}414$.

b. Courbe *ci-dessous.*



c. On conjecture comme limite 1. Ce résultat ne semble pas dépendre tu terme initial.

4. a. On peut conjecturer que la limite est environ 0,6.



b. La limite semble atteinte à l'intersection des courbes, pour x vérifiant : $\frac{1}{x+1} = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$.

La solution positive de cette équation est :

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618.$$

102 On note (u_n) la suite des distances en mètres parcourues à chaque essai, (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 40$ et de raison 5.

a. $u_n = 40 + 5(n-1) = 35 + 5n$. On cherche n tel que $u_n \geqslant 300$. $35 + 5n \geqslant 300 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{265}{5} \Leftrightarrow n \geqslant 53$. Il fera 53 tentatives pour arriver au sommet.

b. $S_{53} = u_1 + \ldots + u_{53} = 53 \times \frac{(40+300)}{2}$

$= 53 \times 170 = 9010$ mètres.

À 4 mètres par seconde, il passera :

$\frac{9010}{4} = 2252{,}5$ secondes sur le téléski, soit 37 minutes et 32,5 secondes.

103 **a.** Un pilier comporte 2 cartes, il faut p piliers au premier étage. Pour lier ces piliers il faut $p-1$ cartes horizontales. Au total il y a $2p + p - 1 = 3p - 1$ cartes au premier étage.

b. Un étage est composé d'autant de cartes que le précédant moins un pilier et une liaison horizontale, soit 3 carte : $u_{n+1} = u_n - 3$.

c. (u_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme : $u_1 = 3p - 1$.

d. $u_n = u_1 - 3(n-1) = 3p - 1 - 3n + 3 = 3p - 3n + 2$.

e. $u_p = 3p - 3p + 2 = 2p$. Il y a 2 cartes au dernier étage.

f. $S_p = u_1 + \ldots + u_p = p \times \frac{(3p-1+2)}{2} = p \times \frac{(3p+1)}{2}$.

g. $S_5 = 5 \times \frac{(3\times 5+1)}{2} = 40$ et $S_6 = 6 \times \frac{(3\times 6+1)}{2} = 57$.

Avec 52 cartes, on peut faire un château de 5 étages.

104 **a.**

$$u_n = \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n} = \frac{n\left(\frac{1+2n-1}{2}\right)}{n\left(\frac{2+2n}{2}\right)} = \frac{n}{n+1}.$$

b. $\frac{1+3+5+\ldots+999}{2+4+6+\ldots+1000} = \frac{500}{501}$.

105 La suite de ses devoirs est arithmétique de raison 1,5. En notant u sa plus mauvaise note, on a

$S_9 = 9 \times \frac{(u+u+1{,}5\times 9)}{2} = 9 \times \frac{(2u+13{,}5)}{2}$

or $S_9 = 13 \times 9 = 117$, d'où $9 \times \frac{(2u+13{,}5)}{2} = 117$

$\Leftrightarrow 2u + 13{,}5 = 26 \Leftrightarrow u = 6{,}25$.

106 **a.** $u_1 = 100 - 4 = 96$ mètres.

$v_1 = 100 \times 0{,}9 = 90$ mètres.

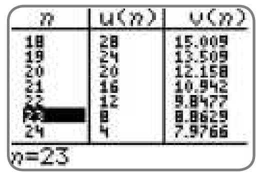
b. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison -4. $u_n = 100 - 4n$.

c. (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 100$ et de raison $1 - 10\% = 0{,}9$.

$v_n = 100 \times 0{,}9^n$.

d. et **e.**

La tortue dépassera le lièvre au bout de 23 minutes.



n	u(n)	v(n)
18	28	15.009
19	24	13.509
20	20	12.158
21	16	10.942
22	12	9.8477
23	8	8.8629
24	4	7.9766

n=23

f. $u_n = 100 - 4n = 0$

$\Leftrightarrow n = 25$.

La tortue arrivera en 25 minutes.

Le lièvre n'arrivera jamais car $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

107 ***Traduction***

La fête

Dans un immeuble triangulaire, les appartements sont numérotés à partir du dernier étage comme indiqué ci-dessous.

Le propriétaire du N° 2007 se plaint de ce que son voisin du dessus n'arrête pas de faire la fête. Quel est le Numéro de l'appartement de ce voisin bruyant ?

Résolution

L'appartement le plus à droite de l'immeuble a pour numéro la somme des appartements depuis le sommet. Au $n^{\text{ième}}$ étage, il porte le numéro

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n \times \frac{1+2n-1}{2} = n^2$ car c'est la somme des termes d'une suite arithmétique.

On peut ensuite identifier l'étage du n°2007 en regardant la suite des carrés d'entiers.

$44^2 = 1936$ et $45^2 = 2025$.

2007 est donc 18 appartements à gauche du 2025 et son voisin du dessus à 17 appartements à gauche du 1936, soit le n°1919.

108 **1. a.** $1800 \times (1 + 0{,}018) = 1832{,}4$€.

b. $1800 \times (1 + 0{,}005) = 1809$€.

2. $1800 \times (1 + 0{,}018)^{10} \approx 2151{,}54$€. $1800 \times (1 + 0{,}005)^{10} \approx 1892{,}05$€.

3. Le retard mensuel est de :

$$2151{,}54 - 1892{,}05 = 259{,}49€.$$

4. $\dfrac{259{,}49}{1892{,}05} \approx 13{,}7\%$.

109 **1. a.** $u_0 = 200$,
$u_1 = u_0 \times 0{,}5 + 180 = 200 \times 0{,}5 + 180 = 280$,
$u_2 = u_1 \times 0{,}5 + 180 = 280 \times 0{,}5 + 180 = 320$,
$u_3 = u_2 \times 0{,}5 + 180 = 320 \times 0{,}5 + 180 = 340$.
b. Oui, les objectifs de Marc sont atteints.
c. $u_{n+1} = u_n \times 0{,}5 + 180$.
2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 360 = u_n \times 0{,}5 + 180 - 360$

$$= u_n \times 0{,}5 - 180 = \frac{1}{2}(u_n - 360) = \frac{1}{2} v_n.$$

b. $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -160 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$u_n = v_n + 360 = 360 - 160 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c. La suite (u_n) est croissante et converge vers 360 car $0 < \dfrac{1}{2} < 1$.

3. a. $u_n = 360 - (C - 360) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b. Le montant de C influe sur les variations ((u_n) est décroissante si $C > 360$, croissante sinon) mais n'influe pas sur sa limite.

110 **a.** $u_3 = 2$, $u_4 = 3$.
b. Au mois $n + 2$, il y a tous les lapins du mois précédent (u_{n+1}) et tous les nouveaux lapins issus des lapins présents depuis deux mois (u_n), donc

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

c. Les algorithmes 1 et 2 conviennent mais ne correspondent pas à la même valeur de n.

111 **1. a.** $u_1 = 300 - 50 = 250$,
recette : $50 \times 25 = 1250$ €. $v_2 = \dfrac{7500}{250} = 30$.

b. $u_2 = 250 - 30 = 220$, recette : $30 \times 30 = 900€$.

$$v_3 = \frac{7500}{220} \approx 34{,}09.$$

c. Le nombre de places vendues la $n^{\text{ième}}$ semaine est $u_{n-1} - u_n$. Or $u_{n-1} = \dfrac{7500}{v_n}$. La recette est donc de

$(u_{n-1} - u_n) \times v_n = \left(\dfrac{7500}{v_n} - u_n\right) \times v_n = 7500 - u_n \times v_n$.

2. a. $u_n = 300 - 15n$. Les billets seront vendus en 20 semaines.

b. $v_n = \dfrac{7500}{u_{n-1}} = \dfrac{7500}{300 - 15(n-1)} = \dfrac{7500}{315 - 15n}$.

La 20e semaine, le prix du billet est

$$v_n = \frac{7500}{315 - 15 \times 20} = 500 \text{ €}.$$

3. a. $u_n = 300 \times 0{,}6^n$. $u_1 = 300 \times 0{,}6 = 180$,
$u_2 = 300 \times 0{,}6^2 = 108$ b.

$v_n = \dfrac{7500}{u_{n-1}} = \dfrac{7500}{300 \times 0{,}6^n} = \dfrac{25}{0{,}6^n}$.

c. Le nombre de places invendues est
$u_{11} = 300 \times 0{,}6^{11} \approx 1{,}09$, soit environ une place.
La 10e semaine, le prix du billet est

$$v_{10} = \frac{25}{0{,}6^{10}} = 4134{,}54 \text{ €}.$$

PARTIE B

GÉOMÉTRIE

5. Vecteurs et droites

Objectifs et pré-requis

L'objectif de ce chapitre est de réinvestir les notions de vecteurs, de repérage dans le plan et d'équations de droites étudiées en classe de seconde. On utilisera le critère analytique de colinéarité et on proposera une version unifiée d'équation pour pouvoir caractériser toute droite du plan. La décomposition d'un vecteur suivant une base sera abordée afin de préparer tout doucement les élèves aux prémisses de l'algèbre linéaire.

On trouvera également dans ce chapitre l'occasion de proposer aux élèves des activités mettant en œuvre des démarches algorithmiques et de les encourager à manipuler différents logiciels (de type tableurs, de type géométrie dynamique) afin de proposer des conjectures lors des problèmes ouverts par exemple.

Extrait du programme (*Bulletin officiel spécial n°* 9 *du* 30 *septembre* 2010)

Contenus	Capacités attendues
Condition de colinéarité de deux vecteurs : $xy' - yx' = 0$. Vecteur directeur d'une droite. Équation cartésienne d'une droite. Expression d'un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires.	• Utiliser la condition de colinéarité pour obtenir une équation cartésienne de droite. • Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un vecteur directeur et un point. • Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie par une équation cartésienne. • Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problème.

Corrigés des activités

1 Une condition de colinéarité de deux vecteurs

1 **a.** La direction ; le sens ; la norme.

b. Ils sont colinéaires.

c. Il existe un réel k tel que $\vec{u} = \mathrm{k}\vec{v_i}$.

d. $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$ Les coordonnées sont proportionnelles.

2 **a.** $\vec{u} = \dfrac{1}{3}\vec{v}$

b. $-11{,}25\vec{u} = \vec{v}$ ou $-\dfrac{45}{4}\vec{u} = \vec{v}$.

3 **a.** $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$ donc $\begin{cases} xy' = kx'y' \\ yx' = ky'x' \end{cases}$ puis en soustrayant membre à membre $xy' - yx' = 0$.

b. Posons $k = \dfrac{x'}{x}$. (on a donc que : $\boldsymbol{x' = kx}$)

De $xy' - yx' = 0$, on tire que : $y' = \dfrac{yx'}{x}$, soit : $y' = \left(\dfrac{x'}{x}\right) \times y$, donc : $\boldsymbol{y' = ky}$.

Les deux égalités en gras forment un système prouvant que les coordonnées sont proportionnelles. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

c. $\vec{u}\,(0\,;0)$ $\vec{v}\,(x\,;y)$ on obtient : $0 \times y - x \times 0 = 0$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

2 Une caractérisation unifiée pour toutes les droites

1. a. b. et **c.** On conjecture que la nature du lieu est une droite.

d. Si $a = b = c = 0$, on obtient le plan.

Si $a = b = 0$ et c non nul, on obtient l'ensemble vide.

Si $a = 0$ et b non nul, on obtient une droite horizontale.

Si a non nul et $b = 0$, on obtient une droite verticale.

Si a et b non nuls et $c = 0$, on obtient une droite passant par l'origine.

2. a. $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où k décrit $\mathbb{R}$.

b. $\overrightarrow{AM}(x - x_0 ; y - y_0)$ et $\vec{u}(\alpha ; \beta)$. On obtient : $\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$

En développant : $\beta x - \alpha y + (-\beta x_0 + \alpha y_0) = 0$

Ce qui est de la forme désirée avec $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = -\beta x_0 + \alpha y_0$.

c. Car $kax + kby + kc = 0$ (avec k non nul) en est une autre !

Les droites de la forme $y = mx + p$ s'écrivent $mx - y + p = 0$.

Les droites de la forme $x = m$ s'écrivent $x + 0y - m = 0$.

3. a. et **b.** On reconnaît paraboles, cercles et ellipses.

3 Décomposition d'un vecteur du plan

Partie A

$\vec{w}_1 = 2\vec{u}$.

$\vec{w}_2 = -2\vec{v}$.

$\vec{w}_3 = -\frac{3}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$.

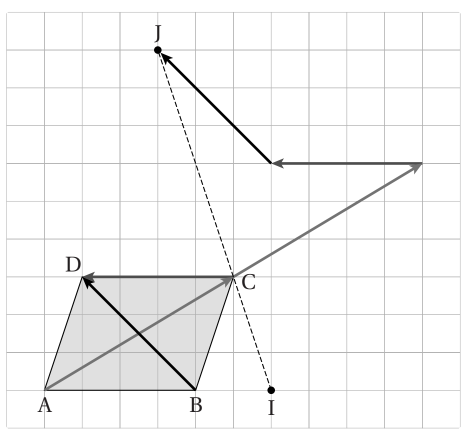
$\vec{w}_4 = -\frac{3}{2}\vec{v}$.

$\vec{w}_5 = \vec{u} - 2\vec{v}$.

$\vec{w}_6 = -\frac{5}{4}\vec{u} + 4\vec{v}$.

Partie B

1



2 a. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AD} + \vec{0} = 3\overrightarrow{AD}$.

b. $\overrightarrow{IJ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

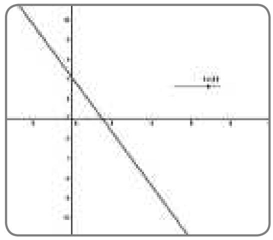
Donc : $3\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ}$ ce qui prouve la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ et donc l'alignement des points I, J et C.

Corrigés des Travaux pratiques

TICE 1 Équation définie à l'aide d'un paramètre k (k réel)

Pour une correction avec les élèves, les fichiers fournis sur le CD permettent à l'aide de *GeoGebra* de montrer comment on a établi les différentes conjectures.

Partie A



b. On conjecture que la nature de E_k est une droite en manipulant à la souris le curseur.

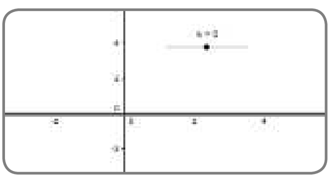
c. L'équation de E_k sous la forme appropriée est $-3kx + (k^2 - 9)y = 1 - 2k^2$.

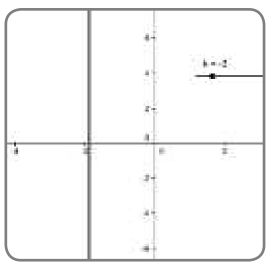
Si $k = 3$ ou $k = -3$: la courbe obtenue est une droite verticale d'équation $x = \frac{17}{9}$ (ou $x = -\frac{17}{9}$) un vecteur directeur est donc $\vec{j}$.

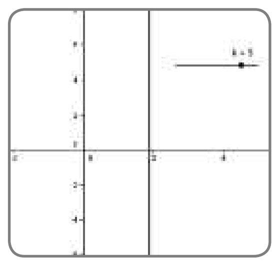
Sinon, on obtient $y = \frac{3k}{k^2 - 9}x + \frac{1 - 2k^2}{k^2 - 9}$ qui est l'équation réduite d'une droite de coefficient directeur $\frac{3k}{k^2 - 9}$. Un vecteur directeur est donc $\vec{u}\left(1\ ;\ \frac{3k}{k^2 - 9}\right)$.

Partie B

1 **a.** Les valeurs de k pour que E_k soit parallèle aux axes sont :
$k = 0$ pour l'axe (Ox) ; $k = 3$ ou $k = -3$ pour l'axe (Oy).



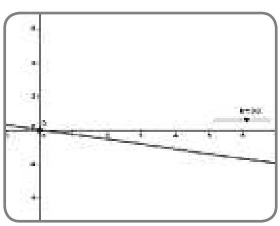


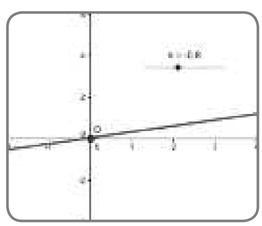


b. Les conditions que cela impose sur les coefficients des variables x et y dans l'équation cartésienne sont $k = 0$ pour obtenir y = constante et $k^2 - 9 = 0$ pour obtenir x = constante.

2 **a.** On conjecture que les valeurs de k pour que E_k passe par l'origine du repère sont :

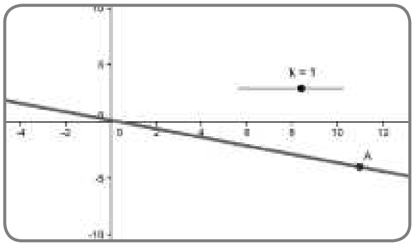
$k = 0{,}8$ ou $k = -0{,}8$.





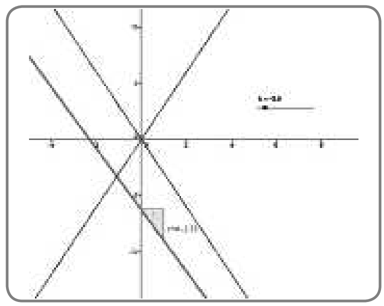
b. Par le calcul, les valeurs de k sont solutions de $1 - 2k^2 = 0$, soit $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $k = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3 **a.** On expérimente que la droite E_1 passe par A.



b. Par le calcul, il s'agit de résoudre l'équation $-33k - 4(k^2 - 9) = 1 - 2k^2$ ce qui équivaut à résoudre l'équation du second degré $-2k^2 - 33k + 35 = 0$ dont le discriminant est égal à 1 369 (soit 37^2) et dont les solutions sont 1 et $-17{,}5$.
La configuration du logiciel ne donne pas toutes les solutions car il faut modifier les bornes du curseur k (ce qui montre les limites du logiciel…) et les mettre par exemple de -20 à 20.

4 **a.** On expérimente les valeurs de k pour lesquelles le coefficient directeur de E_k est compris entre -3 et 3 (on peut rajouter le coefficient directeur de la droite E_k).
k dans $]-\infty\,;-3{,}5] \cup [-2{,}5\,;2{,}5] \cup [3{,}5\,;+\infty[$.



b. Par le calcul, k étant différent de 3 et de -3, on va résoudre :

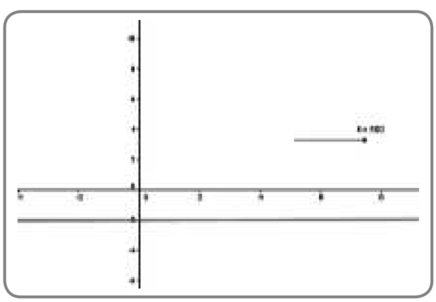
$$-3 \leqslant \frac{3k}{k^2-9} \leqslant 3 \text{ soit } -1 \leqslant \frac{k}{k^2-9} \quad \text{ET} \quad \frac{k}{k^2-9} \leqslant 1.$$

On fait l'étude du signe des deux quotients $\left(\dfrac{k^2+k-9}{k^2-9} \geqslant 0 \text{ ET } \dfrac{-k^2-k+9}{k^2-9} \leqslant 0\right)$ et on compile les deux tableaux de signes obtenus.

k dans $\left]-\infty\,;-\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1-\sqrt{37}}{2}\,;\dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\,;+\infty\right[$.

5 **a.** E_k semble tendre vers la droite d'équation $y = -2$ lorsque le réel k devient de plus en plus grand.
b. Ce phénomène s'explique en utilisant l'équation réduite de E_k (k différent de 3 et de -3) :

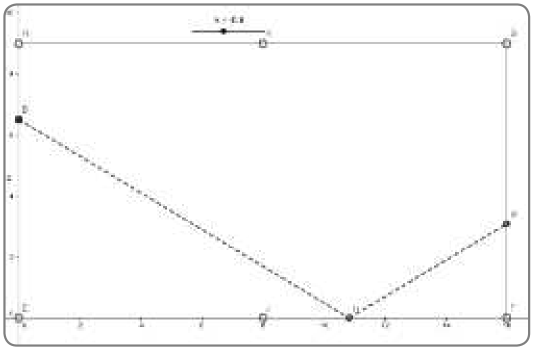
$$y = \underbrace{\left(\frac{3k}{k^2-9}\right)}_{\text{tend vers } 0} x + \underbrace{\left(\frac{1-2k^2}{k^2-9}\right)}_{\text{tend vers } -2}$$



TICE 2

Pour une correction avec les élèves, les fichiers fournis sur le CD permettent à l'aide de *Geogebra* de montrer la réalisation du billard virtuel et de visualiser comment on a établi les différentes conjectures.
Aller dans *Affichage* puis *Protocole de construction* pour avoir la liste des actions à réaliser pour construire le billard virtuel.

PARTIE A : Construction

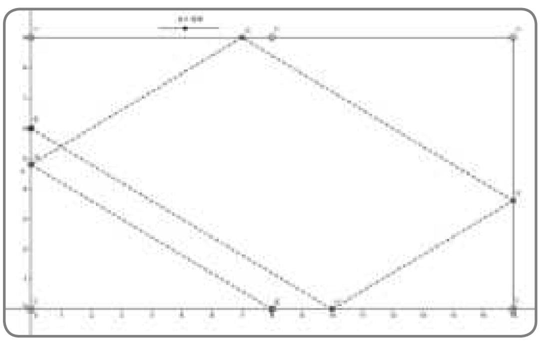


PARTIE B : Conjectures

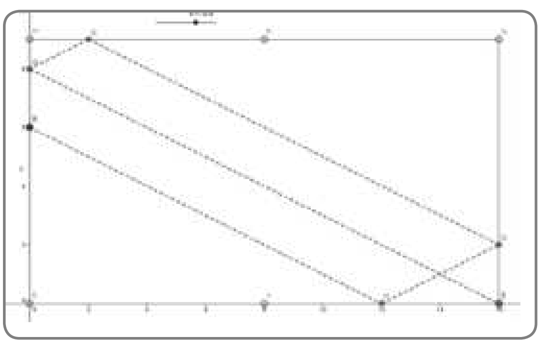
1 **a.** Le chemin complet apparaît lorsque k vaut par exemple $-0{,}6$ ou $-0{,}7$…

b. Pour trouver des bornes plus adéquates pour le curseur k, on cherche les coefficients directeurs des droites (BJ) et (BF) à savoir $-\dfrac{6}{8} = -\dfrac{3}{4} = -0{,}75$ et $-\dfrac{6}{16} = -\dfrac{3}{8} = -0{,}375$.

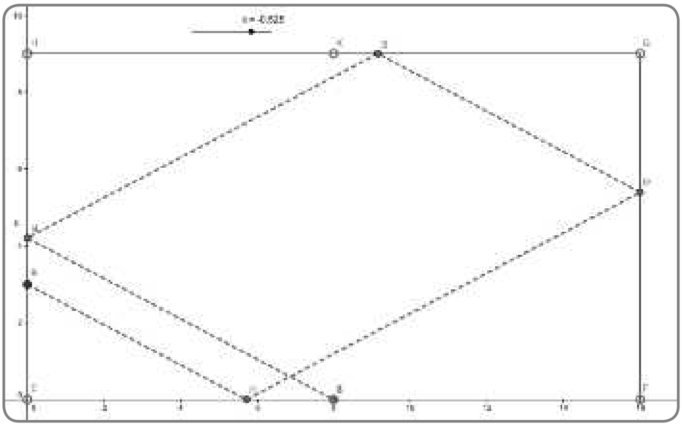
2 **a.** On conjecture que la valeur de k pour laquelle la boule sort au trou J après 4 bandes consécutives est $-0{,}6$ et les coordonnées du point I_1 sont (10 ; 0).



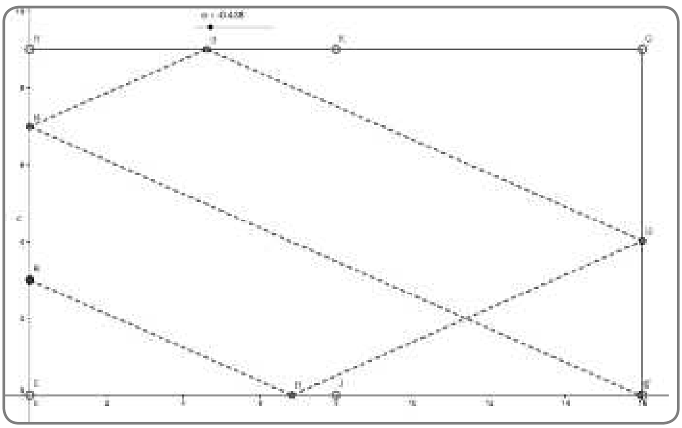
b. On conjecture que la valeur de k pour laquelle la boule sort au trou F après 4 bandes consécutives est $-0{,}5$ et les coordonnées du point I_1 sont (12 ; 0).



❸ **a.** $-0{,}53 < k < -0{,}52$.



b. $-0{,}44 < k < -0{,}43$.



PARTIE B : Résolution géométrique

❶ La méthode du « *dépliage* » du billard consiste à lui appliquer 4 symétries axiales successives bien choisies. Cela permet de transformer le chemin « ligne brisée » parcouru par la boule en le segment [BS'] (conservation des angles et des distances par les symétries).

❷ Les coordonnées du point J_4 sont $(40\,;-18)$.

Si $B(0\,;\,6)$, la droite (BJ_4) a pour équation $y = -\dfrac{3}{5}x + 6$ et son point d'intersection avec l'axe des abscisses est $I_1(10\,;\,0)$. Si $B(0\,;\,3)$, la droite (BJ_4) a pour équation $y = -\dfrac{21}{40}x + 3$ et son point d'intersection avec l'axe des abscisses est $I_1\left(\dfrac{40}{7}\,;\,0\right)$.

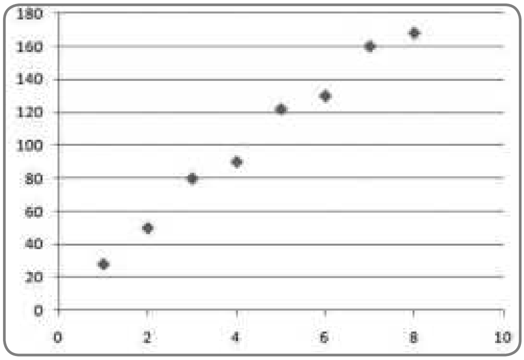
TICE 3

Pour une correction avec les élèves, le fichier fourni sur le CD permet à l'aide d'Excel de visualiser la réalisation des différents tableaux et les réponses aux questions.

PARTIE A : Construction

❶ et ❷

Année	2009				2010				G
Trimestre	1	2	3	4	5	6	7	8	4,5
Nombre d'amis	28	50	80	90	122	130	160	168	103,5



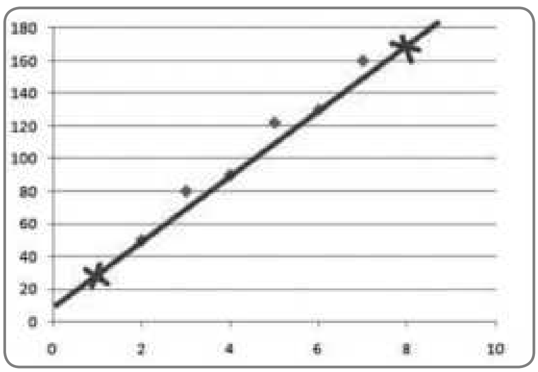
Le type de fonction permettant d'approcher ce nuage de points est de la forme $ax + by + c = 0$.

Partie B

❶ **Première idée : « la droite des extrêmes »**

a. et **c.**

		ax + by + c = 0			
	point 1	point 2	vecteur directeur	a	-140
abscisse	1	8	-7	b	7
ordonnée	28	168	-140	c	-56
		si x est égal	54		
		alors y est égal	1088		



Cliquer deux fois sur les cases pour faire apparaître « les formules tableurs » permettant de calculer les coordonnées d'un vecteur directeur et les valeurs de a, b et c.

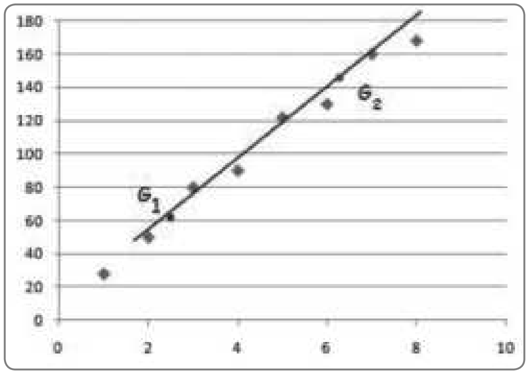
b. Une équation cartésienne de « la droite des extrêmes » est :
$140x - 7y + 56 = 0$.

d. Le tableur permet de dire que le nombre d'amis au 1er juillet 2022 correspond au 54e trimestre. Le nombre d'amis prévus avec cette droite est 1088.

❷ **Deuxième idée : la droite des points moyens**

a.

				ax + by + c = 0	
	point 1	point 2	vecteur directeur	a	-83
abscisse	2,5	7	-4	b	4
ordonnée	62	145	-83	c	-40,5
		si x est égal	4,5		
		alors y est égal	103,5		



Une équation cartésienne de *la droite de Mayer* est :

$$-83x + 4y - 40{,}5 = 0.$$

c. Le tableur permet de dire que le nombre d'amis prévus avec cette droite est 1131.

❸ Troisième idée : ajouter une courbe de tendance

b. Voir la capture d'écran dans l'énoncé.

c. Le tableur permet de dire que le nombre d'amis prévus avec cette droite est 1112.

❹ Comparaison des trois solutions

Année	2009				2010				
Trimestre	1	2	3	4	5	6	7	8	
Nombre d'amis	28	50	80	90	122	130	160	168	valeurs relevées
prévisions	28	48	68	88	108	128	148	168	droite des extrêmes
	30,9	51,6	72,4	93,1	114	135	155	176	droite de Mayer
	32,2	52,5	72,9	93,3	114	134	154	175	droite proposée par le tableur
écarts	0	2	12	2	14	2	12	0	droite des extrêmes
	2,88	1,63	-7,63	3,13	-8,13	4,63	-4,63	8,13	droite de Mayer
	4,17	2,55	-7,07	3,31	-8,31	4,07	-5,55	6,83	droite proposée par le tableur
écarts au carré	0	4	144	4	196	4	144	0	droite des extrêmes
	8,27	2,64	58,1	9,77	66	21,4	21,4	66	droite de Mayer
	17,4	6,49	50	11	69	16,6	30,8	46,7	droite proposée par le tableur

SOMME	496	droite des extrêmes
	254	droite de Mayer
	248	droite proposée par le tableur

Cliquer deux fois sur les cases pour faire apparaître « les formules tableurs » permettant les calculs.

Algorithmique 1

Pour une correction avec les élèves, le fichier au format .pdf fourni sur le CD permet de vidéo projeter les réponses.

❶

```
Entrée          Les réels x, y, x', y'.
Traitement      Si xy' − x'y = 0
et sortie          alors afficher « Les vecteurs sont colinéaires. »
                   Sinon afficher « Les vecteurs ne sont pas colinéaires. »
```

❷ a.

```
Traitement      Si  (x = 0 et y = 0)  ou  (x' = 0 et y' = 0)
                   alors afficher « Le coefficient de colinéarité vaut 0. »
```

b.

```
Entrée            Les réels x, y, x', y'.
Traitement        Si xy' – x'y = 0
et sortie         alors afficher « Les vecteurs sont colinéaires. »
                      Si  (x = 0 et y = 0)  ou  (x' = 0 et y' = 0)
                      alors afficher « Le coefficient de colinéarité vaut 0. »
                      Sinon  si x ≠ 0
                          alors afficher « Le coefficient de colinéarité est », x'/x
                          Sinon afficher « Le coefficient de colinéarité est », y'/y
                  Sinon  afficher « Les vecteurs ne sont pas colinéaires. »
```

Algorithmique 2

Pour une correction avec les élèves, le fichier au format .pdf fourni sur le CD permet de vidéo projeter les réponses. Les fichiers Python permettent de faire tourner le programme sur un ordinateur.

1 **a.** `>>> droite (5,4,-2,-1)`

Les coordonnées des points avec lesquels elle a essayé son programme sont A(5 ; 4) et B(–2 ; –1).

b. Si on saisit par exemple droite(5,4,5,–1), le programme retourne :

`>>> droite (5,4,5,-1)`

$-5\,x + 0y + 25 = 0$

2 **a.** Ces instructions réalisent le test d'appartenance du point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ à la droite d dont on a déterminé une équation avec le programme précédent.

b. Alix ne connaît pas la différence entre le symbole `=` qui, en langage Python, permet d'affecter à une variable une valeur et le symbole `==` qui permet la vérification de l'égalité entre deux expressions.

c. Il manque le symbole `:` après l'instruction `else`. Pensez à ne pas mettre le symbole `'` à l'intérieur d'une phrase car sinon Python pense que votre phrase est finie et vous met le message « erreur de syntaxe » ou encore mettre un espace entre les deux symboles `=`.

3 print 'Un vecteur directeur de *d* a pour coordonnées (',– *b*,' ; ', *a*,'). '

```
def droite (xa,ya,xb,yb) :
    a=yb-ya
    b=xa-xb
    c=-a*xa-b*ya
    print  a,'x+ ',b,'y+ ',c,'= 0'
    x=input('x= ')
    y=input('y= ')
    if a*x+b*y+c == 0:
        print 'M se trouve sur d'
    else:
        print 'M ne se trouve pas sur d'
    print 'Un vecteur directeur de d a pour coordonnées (',-b,' ;',a,').'
```

Algorithmique 3

1 **a.** Les inconnues sont les réels k et m.

Le système à résoudre est : $\begin{cases} a = kx + mx' \\ b = ky + my' \end{cases}$ avec les constantes réelles a, b, x, x', y et y'.

b. Le fait que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base implique qu'ils sont non nuls et non colinéaires et donc que : $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,0)$ et $(x'\,;\,y') \neq (0\,;\,0)$ et $xy' - yx' \neq 0$.

2

Entrée	les réels x, y, x', y', a, b
Traitement	$m = (x*b - a*y) / (x*y' - x'*y)$
	$k = (a - m*x')/x$
Sortie	Afficher « $\vec{w}$ = »,k,« $\vec{u}$ + »,m,« $\vec{v}$ »

3 Système(2,5,3,–1,4,–7) $\vec{w} = -1\vec{u} + 2\vec{v}$

4 Système(0,4,5,2,5,10)

```
def systeme(x,y,x1,y1,a,b):
    m=(x*b-a*y)/(x*y1-x1*y)
    k=(a-m*x1)/x
    print 'w =',k,' u + ',m,' v '
```

Erreur car on divise par x qui vaut ici 0 !
Avec le message d'erreur suivant :
ZeroDivisionError: integer division or modulo by zero.

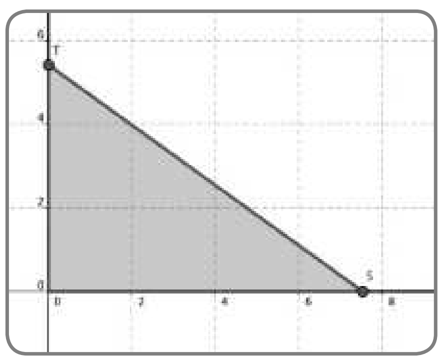
```
def systeme(x,y,x1,y1,a,b):
    if x==0:
        m=a/x1
        k=(b-m*y1)/y
    else:
        m=(x*b-a*y)/(x*y1-x1*y)
        k=(a-m*x1)/x
    print 'w =',k,' u + ',m,' v '
```

5 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et ne forment pas une base.
Programme final :

```
def systeme(x,y,x1,y1,a,b):
    if x*y1-x1*y==0:
        print 'vos vecteurs ne forment pas une base'
    else:
        if x==0:
            m=a/x1
            k=(b-m*y1)/y
        else:
            m=(x*b-a*y)/(x*y1-x1*y)
            k=(a-m*x1)/x
        print 'w =',k,' u + ',m,' v '
```

Algorithmique 4

1 Le point S situé sur]Ox) implique que $s = 0$. Le point T situé sur]Oy) implique que $t > 0$.



2

• M(x ; y) un point du plan appartient aux frontières du domaine lorsque :
côté horizontal : $y = 0$ et $0 \leqslant x \leqslant s$.
côté vertical : $x = 0$ et $0 \leqslant y \leqslant t$.
côté oblique : $tx + sy - ts = 0$ et $0 \leqslant y$ et $0 \leqslant x$.
• M(x ; y) un point du plan appartient à l'intérieur du domaine lorsque : $tx + sy - ts < 0$ et $0 < y$ et $0 < x$.

3 $s = 2{,}5$ et $t = 3{,}25$.
On rajoute l'hypothèse « coordonnées entières ».

```
Initialisation    k = 0
Traitement        Pour x = 0 à 2
                  Pour y = 0 à 3
                  si 3,25x + 2,5y – 8,125 ≤ 0 alors incrémenter k d’une unité
Sortie            Afficher k
```

• $x = 0$

$y = 0$	test positif	$k = 1$;	$y = 1$	test positif	$k = 2$.
$y = 2$	test positif	$k = 3$;	$y = 2$	test positif	$k = 4$.

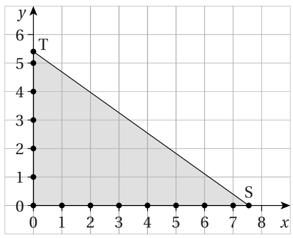
• $x = 1$

$y = 0$	test positif	$k = 5$;	$y = 1$	test positif	$k = 6$.
$y = 2$	test négatif	$k = 6$;	$y = 2$	test négatif	$k = 6$.

• $x = 2$

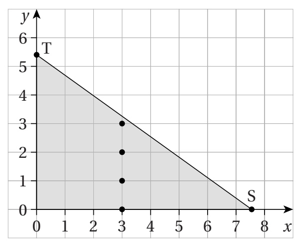
$y = 0$	test positif	$k = 7$;	$y = 1$	test négatif	$k = 7$.
$y = 2$	test négatif	$k = 7$;	$y = 2$	test négatif	$k = 7$.

4 Les points à coordonnées entières situés sur les axes font toujours partie du domaine ; ils sont au nombre de $[s] + [t] + 1$. On peut donc initialiser k à $[s] + [t] + 1$.



Pour une abscisse x fixée, on ne comptabilise que les points dont l’ordonnée est un entier naturel inférieur ou égal à $[-\frac{t}{s}x+t]$. On peut donc faire varier x de 1 à $[s]$ et y de 1 à $[-\frac{t}{s}x+t]$.

Rajouter un test pour éviter le cas où $[s] = 0$ ou $[-\frac{t}{s}x+t] = 0$.

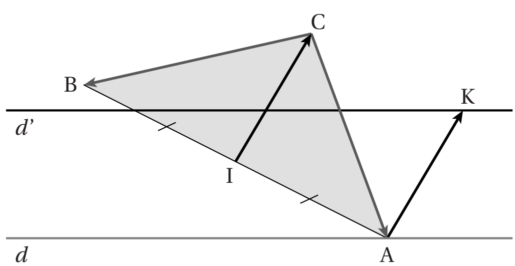


Problème ouvert 1

Pour une correction avec les élèves, les fichiers fournis permettent de vidéo projeter les réponses.
Manipuler le point A avec la souris pour faire apparaître la trace du point K.
On introduit le point A avec la relation de Chasles dans les vecteurs et on obtient :

$\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{IC}$ où I est le milieu de [AB].

Lorsque A décrit une droite fixée (notée d), K décrit la droite d', image de d par la translation de vecteur $\overrightarrow{IC}$.



Problème ouvert 2

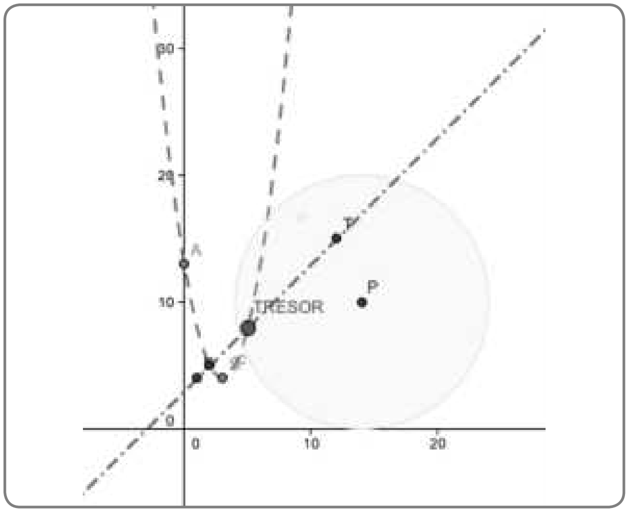
Pour une correction avec les élèves, le fichier fourni sur le CD permet de vidéo projeter les réponses.

• On détermine l'équation de la droite (FT) : $x - y + 3 = 0$ ou encore $y = x + 3$.

• L'équation de la parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

S étant le sommet de la parabole, son abscisse vaut $-\dfrac{b}{2a}$, soit $3 = -\dfrac{b}{2a}$ ou encore $b = -6a$.

Le fait que la parabole passe par A(0 ; 13) entraîne que $c = 13$.
Le fait que la parabole passe par S(3 ; 4) entraîne que $4 = 9a + 3b + c$.
En utilisant les résultats précédents, on obtient que $a = 1$, puis $b = -6$.
Finalement : $y = x^2 - 6x + 13$.



• Les points d'intersection de la droite et de la parabole ont leurs abscisses x solutions de :
$x + 3 = x^2 - 6x + 13$ soit d'une équation du second degré $x^2 - 7x + 10 = 0$.
Les solutions sont 2 ou 5. Les points d'intersection ont donc pour coordonnées (2 ; 5) et (5 ; 8).

• Reste à calculer la distance séparant ces points de P(14 ; 10) et à choisir celui qui se trouve à une distance inférieure à 10. Le candidat pour l'emplacement du trésor a pour coordonnées (5 ; 8).

Problème ouvert 3

Pour une correction avec les élèves, le fichier fourni sur le CD permet de vidéo projeter les réponses.

Posons x le nombre de chevaux et y le nombre de poneys.

Traduction de l'énoncé et mise en (in)équations :

« Elle dispose de 330 m^2 pour réaliser les box et elle prévoit 16 m^2 par box cheval et 9 m^2 par box poney »

$16x + 9y \leqslant 330$ (1)

« un budget de 62 200 € pour l'achat de sa cavalerie et elle compte 3 500 € par cheval et 1 000 € par poney »

$3\,500x + 1\,000y \leqslant 62\,200$ (2)

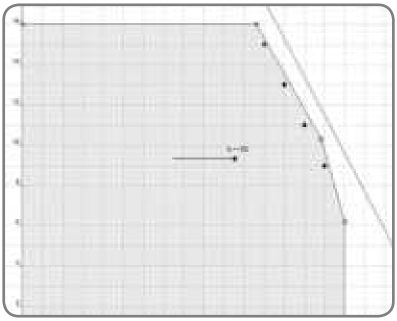
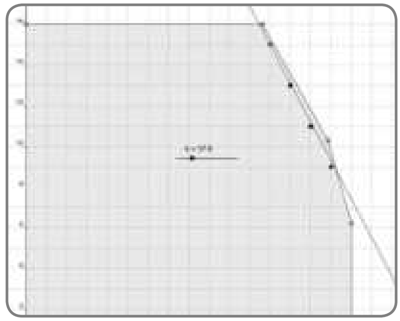
« elle doit se limiter à un maximum de 16 chevaux et de 16 poneys. »

$0 \leqslant x \leqslant 16$ avec x entier $0 \leqslant y \leqslant 16$ avec y entier (3)

« Sachant qu'un cheval sera 1,9 fois plus rentable qu'un poney »

$1{,}9x + y = k$ avec k à maximiser tout en respectant les contraintes (1), (2) et (3)

On obtient un domaine du plan (en couleur) et une droite mobile (en vert; ces éléments sont ici grisés). Il s'agit de trouver le point à coordonnées entières de ce domaine se trouvant le premier sur la droite lorsqu'on manipule le curseur k avec la souris.

Avec un tableau Excel, on arrive plus facilement à déterminer le couple solution.

◇	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	chevaux
2	1	2,9	4,8	6,7	8,6	10,5	12,4	14,3	16,2	18,1	20	21,9	23,8	25,7	27,6	29,5	31,4	
3	2	3,9	5,8	7,7	9,6	11,5	13,4	15,3	17,2	19,1	21	22,9	24,8	26,7	28,6	30,5	32,4	
4	3	4,9	6,8	8,7	10,6	12,5	14,4	16,3	18,2	20,1	22	23,9	25,8	27,7	29,6	31,5	33,4	
5	4	5,9	7,8	9,7	11,6	13,5	15,4	17,3	19,2	21,1	23	24,9	26,8	28,7	30,6	32,5	34,4	
6	5	6,9	8,8	10,7	12,6	14,5	16,4	18,3	20,2	22,1	24	25,9	27,8	29,7	31,6	33,5	35,4	
7	6	7,9	9,8	11,7	13,6	15,5	17,4	19,3	21,2	23,1	25	26,9	28,8	30,7	32,6	34,5	36,4	
8	7	8,9	10,8	12,7	14,6	16,5	18,4	20,3	22,2	24,1	26	27,9	29,8	31,7	33,6	35,5	37,4	
9	8	9,9	11,8	13,7	15,6	17,5	19,4	21,3	23,2	25,1	27	28,9	30,8	32,7	34,6	36,5	38,4	
10	9	10,9	12,8	14,7	16,6	18,5	20,4	22,3	24,2	26,1	28	29,9	31,8	33,7	35,6	37,5	39,4	
11	10	11,9	13,8	15,7	17,6	19,5	21,4	23,3	25,2	27,1	29	30,9	32,8	34,7	36,6	38,5	40,4	
12	11	12,9	14,8	16,7	18,6	20,5	22,4	24,3	26,2	28,1	30	31,9	33,8	35,7	37,6	39,5	41,4	
13	12	13,9	15,8	17,7	19,6	21,5	23,4	25,3	27,2	29,1	31	32,9	34,8	36,7	38,6	40,5	42,4	
14	13	14,9	16,8	18,7	20,6	22,5	24,4	26,3	28,2	30,1	32	33,9	35,8	37,7	39,6	41,5	43,4	
15	14	15,9	17,8	19,7	21,6	23,5	25,4	27,3	29,2	31,1	33	34,9	36,8	38,7	40,6	42,5	44,4	
16	15	16,9	18,8	20,7	22,6	24,5	26,4	28,3	30,2	32,1	34	35,9	37,8	39,7	41,6	43,5	45,4	
17	16	17,9	19,8	21,7	23,6	25,5	27,4	29,3	31,2	33,1	35	36,9	38,8	40,7	42,6	44,5	46,4	
18	poneys																	

La configuration optimale pour la cavalerie de Julia est de 12 chevaux et 15 poneys.

Corrigés des exercices et problèmes

QCM Pour bien commencer

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 345.

Exercices d'application

1 **a.** Colinéaires car $2\vec{u} = \vec{v}$.
b. Non colinéaires (critère analytique de colinéarité).
c. Non colinéaires (critère analytique de colinéarité).

2 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 345.

3 **a.** Critère analytique de colinéarité :
$k^2 + k - 5 = 0 \qquad \Delta = 21$
Deux solutions :

$$k_1 = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{21}\right) \text{ ou } k_2 = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{21}\right)$$

b. Critère analytique de colinéarité :
$-3k^2 + 9k + 30 = 0 \qquad \Delta = 441$
Deux solutions : $k_1 = 5$ ou $k_2 = -2$

4 Critère analytique de colinéarité : le système obtenu possède une unique solution $k = -7$.

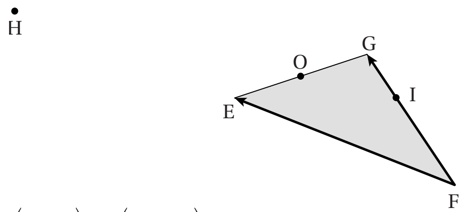
5 **a.** Faux, car $\vec{u} = 10\vec{i} - 15\vec{j}$.
b. Vrai, par le critère analytique de colinéarité.
c. Vrai, par le critère analytique de colinéarité ($\vec{u} - 7\vec{v}(34,5\,;-51,75)$ et $-2\vec{i} + 3\vec{j}(-2\,;3)$).
d. Vrai, $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires au vecteur de coordonnées $(2\,;-3)$.

6 **a.** Par le critère analytique de colinéarité :
$3 - 6\sin x = 0$.
Un réel solution : $x = 30°$ ou $\frac{\pi}{6}$ rad.
b. Non, car $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
c. Par exemple : $\frac{5\pi}{6}$.
Toutes les solutions : $\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

7 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 345.

8 Par le critère analytique de colinéarité :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $k^3 - 1 = 0$.
Une unique solution réelle $k = 1$.

9 **a.**



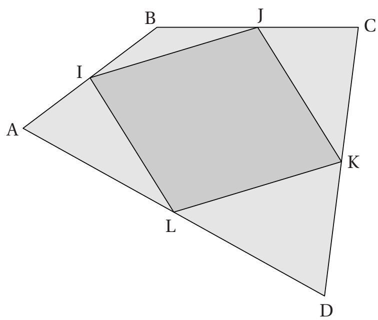
b. $I\left(\frac{2}{3}\ ;0\right)$ $O\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ $H(0\ ;2)$

$\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{OH}$ colinéaires donc les points I, O et H sont alignés.

10 **a.** $\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AB}$.

b. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

11 **a.**

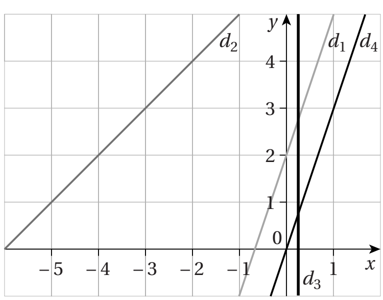


b. Théorème des milieux dans ABD puis DBC :
$2\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{KJ}$. Donc $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{KJ}$ et IJKL parallélogramme.

12 Par Pythagore, la hauteur dans un triangle équilatéral de côté a mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

On obtient : $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EF}$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires et les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

13



14 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 345.

15 **a.** $-10x - 3y + 44 = 0$
b. $2x + \sqrt{2}\ y + \sqrt{2} - 8 = 0$
c. $-15x - 24y + 53 = 0$

16 **a.** $3x - y - 14 = 0$
b. $2x + y - 10 = 0$

17 **a.** $7x - 4y + 1 = 0$
b. $x - 3y + 3 = 0$
c. $8x + 5y - 210 = 0$

18 **a.** $24x + 21y - 1 = 0$
b. $-52x + 25y - 49\pi = 0$

19 **a.** $4x - y - 8 = 0$
b. Les coordonnées de C vérifient bien l'équation de (AB) donc les points A, B et C sont alignés.

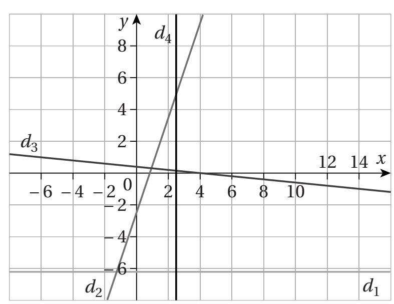
20 **a.** Le milieu I de [KL] a pour coordonnées (0 ; 3). La droite (OI) (la médiane issue de O de OKL) est l'axe des ordonnées.
b. $x - 2y + 4 = 0$
c. G est l'intersection des deux médianes dont l'une est l'axe des ordonnées : $G(0\ ;y_G)$.
On trouve $y_G = 2$ donc $G(0\ ;2)$.

21 **a.** Médiane issue de A : $-7{,}5x - 12y + 51 = 0$
Médiane issue de B : $x - 2 = 0$
Médiane issue de C : $13{,}5x + 12y - 63 = 0$
b. Le système obtenu a une unique solution. On trouve : G(2 ; 3).

22 **a.** E_1 : droite d'équation cartésienne $35x + y + 10 = 0$
b. E_2 : $-2 = 3$ donc c'est l'ensemble vide.
c. E_3 : y doit être différent de 0 et x doit être différent de 2. C'est une droite privée de deux points.

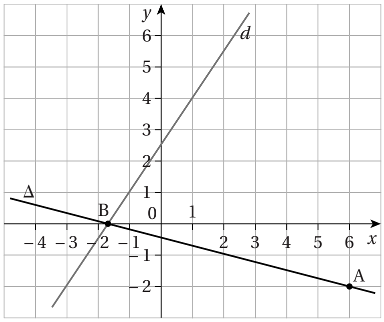
23 $d_1 : -3x + y - 4 = 0$ dirigée par $\vec{a}$.
$d_2 : 6x - 2y + 15 = 0$ dirigée par $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{b}$.
$d_3 : y + 4 = 0$ dirigée par $\vec{c}$.
$d_4 : -x + 4 = 0$ dirigée par $\vec{u}$.

24



25 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 345.

26



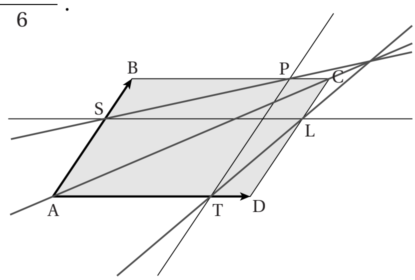
Une équation de la droite Δ est $6x + 23y + 10 = 0$.

27 **1. a.** $\overrightarrow{AB}(10\,;-15)$.
b. d et d' sont parallèles car $-5\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
2. Une équation de la droite d est $3x + 2y - 1 = 0$.
Une équation de la droite d' est $3x + 2y = 0$.
3. a. d_1 est sécante à d et à d' car $\vec{u}$ n'est pas colinéaire à $\vec{v}$.
b. Coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d' : $(4\,;-6)$.
Coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d : $(2\,;-2{,}5)$.

28 **a.** $a = -19$.
b. $a^2 + 2a - 15 = 0$ donc $a = -5$ ou $a = 3$.
c. $a = -12$.
d. $-\dfrac{a}{2} = -\dfrac{a^2}{3}$ donc $a = 0$ ou $a = \dfrac{3}{2}$.

29 **a.** La droite d est parallèle à (Ox) :
$1 - k = 0$ donc $k = 1$.
La droite d est parallèle à (Oy) :
$4k^2 - 9 = 0$ donc $k = \dfrac{3}{2}$ ou $k = -\dfrac{3}{2}$.
b. $1 - k + 2(4k^2 - 9) - 8 = 0$, donc $8k^2 - k - 25 = 0$
$k = \dfrac{1+3\sqrt{89}}{16}$ ou $k = \dfrac{1-3\sqrt{89}}{16}$.
c. $-(1-k)(1+k) + (4k^2-9)\left(\dfrac{1}{9}\right)k^2 - 8 = 0$
donc $k^4 = \dfrac{81}{4}$: $k = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ou $k = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.
d. $6k^2 - 2k - 9 = 0$ donc $k = \dfrac{1+\sqrt{55}}{6}$
ou $k = \dfrac{1-\sqrt{55}}{6}$.

30 **1.**



2. a. A(0 ; 0), C(1 ; 1), T(0 ; t), S(s ; 0), L(s ;1) et P(1; t).
b. $\overrightarrow{TL}(s\,;1-t)$ $\overrightarrow{AC}(1\,;1)$ et $\overrightarrow{SP}(1-s\,;t)$.
3. a. Par le critère analytique de colinéarité :
$s + t = 1$.
b. Équation de (TL) : $(1-t)x - sy + st = 0$.
Équation de (AC) : $x - y = 0$ soit $x = y$.
Équation de (SP) : $tx - (1-s)y - st = 0$.
Le point d'intersection de (TL) et (AC) a pour coordonnées $\left(\dfrac{-st}{1-t-s}\,;\dfrac{-st}{1-t-s}\right)$ et existe si $t + s$ est différent de 1.
Les coordonnées de ce point vérifie l'équation de (SP) : $tx - (1-s)y - st = 0$.
Conclusion : si $t + s \neq 1$ alors les trois droites sont concourantes au point de coordonnées

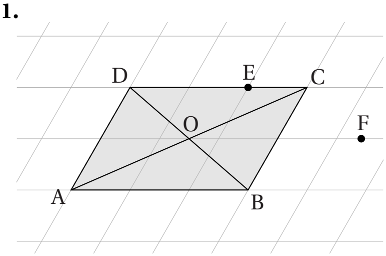
$$\left(\frac{-st}{1-t-s}\ ;\ \frac{-st}{1-t-s}\right).$$

31 **a.** $\vec{w} = \dfrac{3}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$.
b. $\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{u} + 3\vec{v}$.

32 **a.** $\vec{w}_1 = \dfrac{1}{3}\vec{u} + \dfrac{1}{2}\vec{v}$.
b. $\vec{w}_2 = -\dfrac{2}{3}\vec{u} + (-\dfrac{1}{2})\vec{v}$.
c. $\vec{w}_3 = -\dfrac{1}{3}\vec{u} + \vec{v}$.

33 **a.** $\overrightarrow{OA} = 6\vec{i} - \vec{j}$
b. $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$
c. $\overrightarrow{AB} = -8\vec{i} + 4\vec{j}$

34 **1.**



2.
a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{DF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{DC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OE} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{DC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

b. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AO} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{DF} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OE} = -\dfrac{1}{6}\overrightarrow{CA} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

c. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OE} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

35 **a.** $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IG}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CH} = 2\,\overrightarrow{IH}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IG} - \overrightarrow{IH}$ $\qquad$ $\overrightarrow{FE} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{IH}$

$\overrightarrow{ED} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{IG}$.

b. $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AF} - \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{HC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{HC}$

$\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AF}$ $\qquad$ $\overrightarrow{FE} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{HC}$

$\overrightarrow{ED} = -\dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AF} + \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{HC}$.

c. $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{GB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{GB} - 4\,\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AI} = 2\,\overrightarrow{CD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{FE} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{CD}$

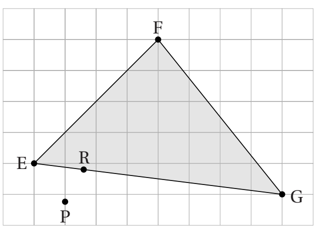
$\overrightarrow{ED} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{GB}$.

36 Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 345.

37 Vrai ! Vérifions que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ on a :
$\vec{u}(3\,;\,1)$ et $\vec{v}(6\,;\,-2)$ et ils sont clairement non colinéaires !

38 Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ on a : $\vec{u}(7 + \sqrt{13}\ ;\,-6)$ et $\vec{v}(6\,;\,\sqrt{13}\ -7)$.
Par le critère analytique de colinéarité, on obtient que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

39 **a.**



b. Dans la base $(\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GE})$ on a :
$\overrightarrow{EP} = -\dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{GF}$; $ER = -\dfrac{1}{5}\,\overrightarrow{GE}$; $\overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GE}$

Donc : $\overrightarrow{FR} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ER} = -\overrightarrow{GF} + \dfrac{4}{5}\,\overrightarrow{GE}$

$\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EP} = -\dfrac{5}{4}\,\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GE}$

Et finalement : $\dfrac{5}{4}\,\overrightarrow{FR} = \overrightarrow{FP}$

Les vecteurs $\overrightarrow{FR}$ et $\overrightarrow{FP}$ sont colinéaires donc les points F, R et P sont alignés.

40 **a.** Faux (devient vrai si ABCD est un rectangle).
b. Faux (par exemple si $\vec{v}$ est nul…).
c. Faux (devient vrai si k dans $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$.
d. Faux (les droites parallèles à l'axe (Oy)).
e. Faux ($\vec{u}(0\,;\,1)$ est un vecteur directeur).
f. Faux (le sens direct est vrai, la réciproque est fausse).
g. Vrai (le milieu de [KL] a pour coordonnées (0 ; 3) est sur (Oy)).
h. Faux ($\overrightarrow{AM} = 118\overrightarrow{CB}$ mais A, B et C sont non alignés).

41 **a.** (P) et (Q) sont équivalentes.
b. (Q) implique (P).
c. (Q) implique (P).
d. (P) implique (Q).

42 L(0 ; l) avec l non nul.
K(k ; 0) avec k non nul.
$\overrightarrow{LK}(k\,;\,-l)$
Une équation de la droite (LK) est :
$-lx - ky + kl = 0$.
l non nul et k non nul, donc kl est non nul et on divise les membres de l'équation par kl pour obtenir le résultat désiré.

Se tester sur…

QCM : Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 345.

Prêt pour le contrôle ?

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 345.

Problèmes

50 **a.** N est l'intersection de deux médianes du triangle KIC (à savoir les médianes issues de C et de I).
N est donc le centre de gravité du triangle KIC et est situé au $\dfrac{2}{3}$ de la médiane [CJ] en partant du sommet :

$$\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CJ}.$$

b. Dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AL})$:

$M\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ $\quad$ $N\left(2\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$ $\quad$ $G\,(5\,;\,1)$.

Donc, $\overrightarrow{MN}\left(1{,}5\ ;\ \dfrac{1}{6}\right)$ et $\overrightarrow{MG}\left(4{,}5\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

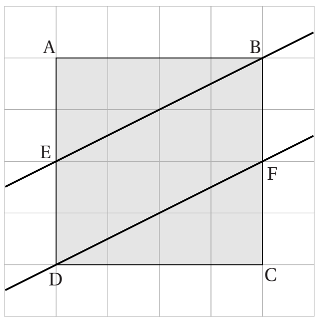
Par le critère analytique de colinéarité, on obtient que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires donc que les points M, N et G sont alignés.

51 **a.** T(0; t) $\qquad$ S(s ; 0) $\qquad$ $\overrightarrow{ST}(-s\,;\,t)$
Équation de (ST) : $tx + sy - st = 0$.
b. d passe par l'origine du repère : $y = mx$
(ST) et d sont parallèles lorsque $t + ms = 0$ c'est-à-dire lorsque $m = -\dfrac{t}{s}$.

Si m est différent de $-\frac{t}{s}$, les droites (ST) et d sont donc sécantes et leur point d'intersection K a pour coordonnées : $\left(\frac{st}{t+sm}\ ;\ \frac{mst}{t+sm}\right)$.

c. Soit I le milieu de [OS]. Si le point K, intersection des droites (ST) et d, se trouve sur le cercle de diamètre [OS], le triangle OKS est rectangle en K et les droites (ST) et d sont perpendiculaires.
En écrivant que KI = OI avec les coordonnées, on trouve la condition $m = \frac{s}{t}$.

52 **1.**



2. a. $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Comme $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DF}$, les droites (EB) et (DF) sont parallèles.

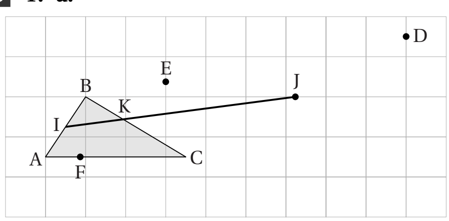
b. D(0 ; 0) , C(1 ; 0) , B(1 ; 1) , A(0 ; 1) , E$\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et F(1; $\frac{1}{2}$). $\overrightarrow{EB}$(1 ; 1) et $\overrightarrow{DF}$(1 ; 1).

Comme $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$, les droites (EB) et (DF) sont parallèles.

c. Équation de (EB) : $y = 2x$.
Équation de (FD) : $y = 2x - 1$.
Comme les droites ont le même coefficient directeur, (EB) et (DF) sont parallèles.

d. ABE est un triangle rectangle de côté a et $\frac{1}{2}a$. De même pour le triangle DFC.
Leurs angles sont donc complémentaires et les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{ADF}$ sont égaux :
les droites (EB) et (DF) sont parallèles.

53 **1. a.**



1. b. $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

c. $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

2. Dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$: en utilisant la relation de Chasles, on obtient,

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\qquad \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ d'où : $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Puis : $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

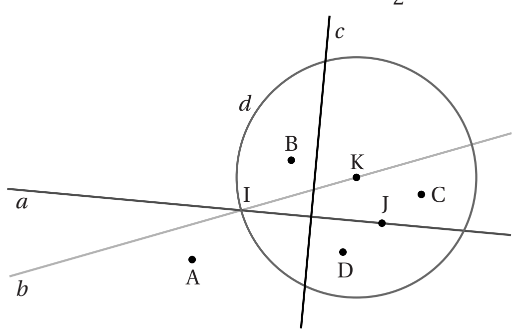
Conclusion : $\overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires : les points I, K et J sont alignés et le point K se trouve au quart du segment [IJ] en partant de I.

54 **a.** Soit I le milieu de [AB] et J celui de [CD].
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ sont colinéaires lorsque $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MI}$ le sont.
L'ensemble recherché est donc la droite (IJ).

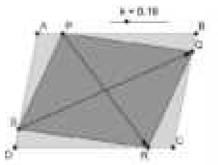
b. Soit K le milieu de [BC]
$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$ sont colinéaires lorsque $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{AC}$ le sont.
L'ensemble recherché est donc la droite passant par K et parallèle à (AC).

c. On obtient : MI = MJ. L'ensemble recherché est donc la médiatrice de [IJ].

d. On obtient : $MK = \frac{AC}{2}$. L'ensemble recherché est donc le cercle de centre K et de rayon $\frac{AC}{2}$.

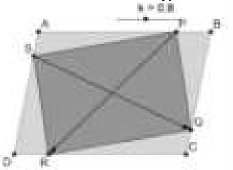


55 **1. a.**

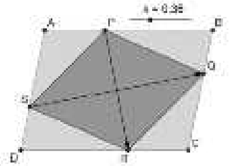


1. b.
On conjecture que le quadrilatère SRQP est toujours un parallélogramme :

un rectangle



un losange



2. Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$: en utilisant la relation de Chasles, on obtient,

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AR} = (1-k)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ $\quad$ $\overrightarrow{AS} = (1-k)\overrightarrow{AD}$

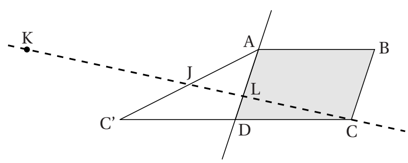
D'où :

$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AB} + (k-1)\overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB} + (k-1)\overrightarrow{AD}$

Comme $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{SP}$, SRQP est un parallélogramme.

56 **1.**



2. a. Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on obtient :

$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ $\quad$ $\overrightarrow{AK} = -2\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ $\quad$ d'où : $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL} = 2\,\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

Conclusion : $\overrightarrow{KL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont colinéaires ce qui prouve l'alignement des points K, L et C.

b. L centre de gravité donc L est sur la médiane issue de C : L, J et C sont alignés.
On montre facilement que C'CAK est un parallélogramme donc J est le milieu de la diagonale [KC] : K, J et C sont alignés.
Finalement L, K et C sont alignés.

c. Equation de (CK) : $-x + 3y - 2 = 0$.
Intersection avec (Oy) : $x = 0$ entraîne $y = \frac{2}{3}$.
Or $L(0\,;\,\frac{2}{3})$ donc L appartient à la droite (CK) et finalement L, K et C sont alignés.

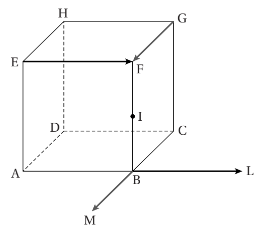
d. $K(-2\,;\,0)$, $L(0\,;\,\frac{2}{3})$, $C(1\,;\,1)$, $\overrightarrow{KL}(2\,;\,\frac{2}{3})$ et $\overrightarrow{KC}(3\,;\,1)$.
Par le critère analytique de colinéarité, on obtient que $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont colinéaires donc que les points L, K et C sont alignés.

57 **1.** $m = -\frac{a}{b}$ et $m' = -\frac{a'}{b'}$.

2. a. Comme les vecteurs de base sont conservés : d a pour équation $y = mx$ et d' a pour équation $y = m'x$.

b. $A(x_A\,;\,mx_A)$ et $B(x_B\,;\,m'x_B)$
On va écrire le théorème de Pythagore avec les coordonnées : O_1AB est rectangle si $AB^2 = O_1A^2 + O_1B^2$.
En développant avec les coordonnées, on obtient : $-2x_Ax_B - 2mm'x_Ax_B = 0$
soit $mm' = -1$.

58 **a.**



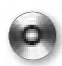
b. $\overrightarrow{DL} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ donc :
$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BL} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ et finalement $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$.
Dans le plan contenant la face avant, $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{EF}$ ce qui signifie que EFLB est un parallélogramme et que les diagonales [FB] et [EL] ont même milieu, à savoir I.
Les points E, I et L sont donc alignés.

c. Même démonstration, I étant le milieu de la diagonale [GM] du parallélogramme FGBM.

d. $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$.

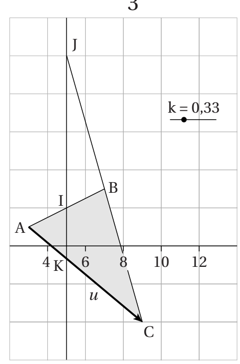
Donc : $\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HE}$

$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{EG}$.

59 

1. d. K est un point mobile sur (AC).
Par définition, $\overrightarrow{AK} = k\,\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires ce qui prouve que les points K, A et C sont alignés.

e. On conjecture que $k = \frac{1}{3}$.



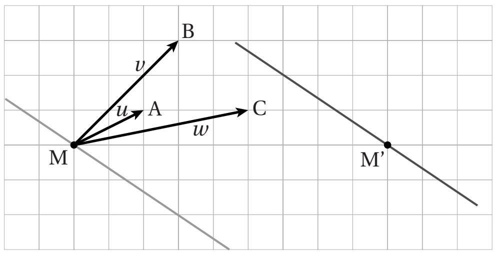
2. $I\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$ $J(2\,;-1)$ $K(0\,;k)$

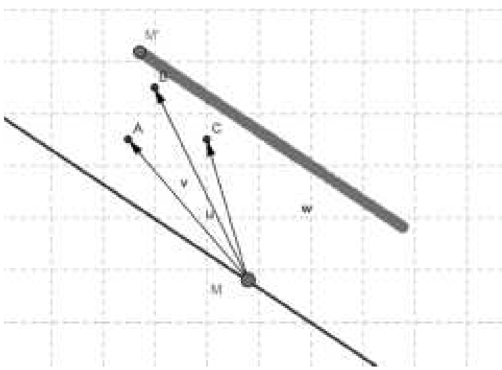
donc $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{3}{2}\,;-1\right)$ et $\overrightarrow{JK}(-2\,;k+1)$

Par le critère analytique de colinéarité, on obtient que $\frac{3}{2}(k+1)-2=0$ soit $\frac{3}{2}k=\frac{1}{2}$ ou encore $k=\frac{1}{3}$.

60

1.





On conjecture que le lieu de M' est une droite.

2. a. Dans la relation $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, on introduit le point C dans les deux premiers vecteurs par Chasles.

On obtient $\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ce qui définit un unique point que l'on notera K.

On a : $\overrightarrow{CK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

b. Dans la relation $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$, on introduit le point K dans tous les vecteurs par Chasles.

On obtient $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MK}$ (car $\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$).

Cette relation vectorielle traduit le fait que K est le milieu du segment [MM'].

c. La symétrie centrale de centre K transforme donc M en M'. Le point M' circule sur la droite *d'*, image de la droite *d* par la symétrie centrale de centre K.

61

a. Un algorithme en langage naturel :

```
Pour i allant de 1 à 3
  demander « abscisse » , x_i
  demander « ordonnée » , y_i
Si (x_2 - x_1)*(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)*(y_2 - y_1) = 0
  alors afficher « Les points sont
                alignés »
  sinon afficher « Les points ne sont pas
                alignés »
```

b. Par exemple, en langage Python :

Si les coordonnées sont entières ou décimales :

```
def aligne (x_a,y_a,x_b,y_b,x_c,y_c) :
  if (x_b - x_a)*(y_c - y_a)
     - (x_c - x_a)*(y_b - y_a) == 0:
  print 'Les points sont alignés'
  else :
  print  'Les points ne sont pas alignés'
```

Plus généralement, si les coordonnées sont réelles :

```
def aligne (x_a,y_a,x_b,y_b,x_c,y_c) :
  x_1 = float(x_c - x_a)
  y_1 = float(y_c - y_a)
  x_2 = float(x_b - x_a)
  y_2 = float(y_b - y_a)
if round(x_2*y_1 - x_1*y_2,11) == 0:
  print 'Les points sont alignés'
else :
  print  'Les points ne sont pas alignés'
```

Sur calculatrice Casio

```
======ALIGNE  ======
?→X↵
?→Y↵
?→S↵
?→T↵
?→U↵
?→V↵
If (S-X)×(V-T)=(U-S)×
(T-Y)↵
Then ↵
"A,B,C alignés"↵
Else ↵
"A,B,C non alignés"↵
```

Sur calculatrice TI

```
PROGRAM:ALIGNE
:Prompt X,Y,S,T,
U,V
:If (T-Y)*(U-S)=
(V-T)*(S-X)
:Then
:Disp "A,B,C ALI
GNES"
:Else
:Disp "A,B,C NON
 ALIGNES"
:End
```

62

Affiche les coordonnées de 5 points situés sur la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans le cas où l'équation du type x = constante (cas où $b = 0$) et dans le cas où l'équation du type $y = mx + p$.

63 ***Traduction de l'énoncé***

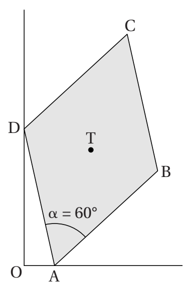
Comportement d'une pièce dans une machine

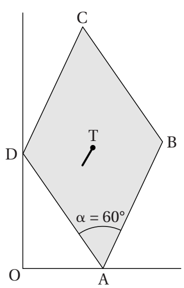
Dans la machine que Pierre vient de démonter se trouve une pièce métallique qui a la forme d'un losange. Elle coulisse le long de parois comme l'indique le dessin ci-dessous.

Trouée en son centre, la pièce laisse passer un rayon lumineux. Quelle courbe dessine le rayon sur un écran mis face à ce dispositif ?

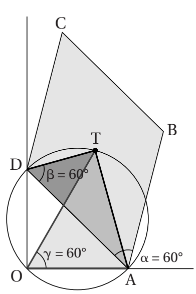
Résolution

On peut faire des conjectures grâce au logiciel *GéoGebra* : la courbe obtenue est un segment.





Pour la démonstration, on peut s'aider de la figure suivante :



Le point T symbolise le trou. Le triangle DTA est rectangle en T, le triangle DAO est rectangle en O. Le cercle de diamètre [DA] passe donc par T et par O.

En utilisant les angles inscrits dans un cercle, on a :

$\widehat{TDA} = \widehat{TOA}$.

Or l'angle $\widehat{TDA}$ est constant ce qui implique que l'angle $\widehat{TOA}$ est constant !

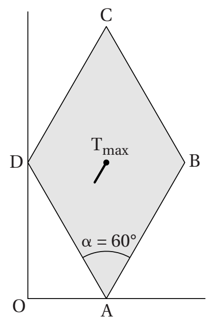
Si on note α la mesure de l'angle géométrique $\widehat{DTA}$, on a :

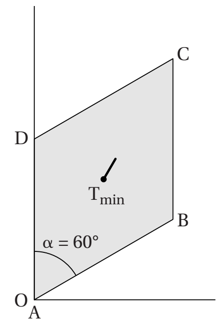
T circule sur la droite d'équation $y = (\tan\alpha)x$.

Le lieu de T est un segment dont les extrémités correspondent aux positions limites :

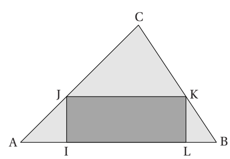
T_{max} (DT ; TA)

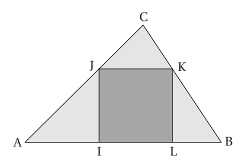
T_{min} (DTsin(α) ; DA – DTcos(α))





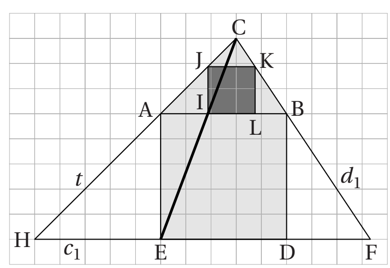
64 On peut faire des conjectures grâce au logiciel *GéoGebra*.





Soit ABDE le carré de côté [AB] construit à l'extérieur de ABC, on construit le triangle CFH dans le prolongement de CAB.

On obtient un agrandissement de la situation désirée.



Il ne reste plus qu'à tracer (CE). Son intersection avec [AB] donne la position du point I candidat pour que IJKL soit un carré.

Les coordonnées de E sont (2 ; – 4).

Une équation de la droite (CE) est :
$8x - 3y - 28 = 0$
Son intersection avec (AB) d'équation $y = 1$ est le point I de coordonnées $\left(\frac{31}{8}\ ;1\right)$.

65 **a.** $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PO}$
$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN}$
par propriétés d'un pavé droit.

b. $\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MQ}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM}) + \overrightarrow{MQ}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{ML} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}.$

c. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IQ}.$

d. $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IQ}$

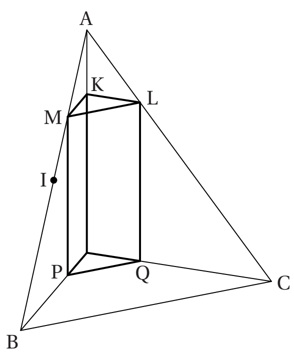
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ML}) + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}\overrightarrow{ML} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ})$

Donc : $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MQ}).$

e. $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MO}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MO}$ sont colinéaires et on en déduit l'alignement des points O, G, M.

66 On peut faire des conjectures grâce au logiciel *Géospace.*

a.



b. x varie dans l'intervalle [0 ; 4]

M est sur [AB] donc $y = -\frac{5}{4}x + 5$.

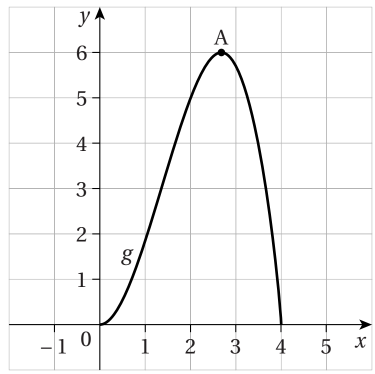
c. $V(x) = \frac{1}{2}x^2\left(-\frac{5}{4}x + 5\right) = -\frac{5}{8}x^3 + \frac{5}{2}x^2$

Au tiers de [AB] :

Thalès $x = \frac{4}{3}$ donc $V\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{80}{27}$.

A la moitié de [AB] :
Thalès $x = 2$ donc $V(2) = 5$.

d. Si la dérivation n'a pas été vue :
$V_{max} = 5{,}925925$
pour OP = 2,6671 et AM = 4,269443.



Si la dérivation a été vue :

$V'(x) = x\left(-\frac{15}{8}x + 5\right)$

Donc un maximum pour $OP = x = \frac{8}{3}$

qui vaut $V\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{160}{27}$ $\quad AM = \frac{2}{3}\sqrt{41}$.

6. Trigonométrie

Objectifs et pré-requis

Extrait du programme (Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010)

Contenus	Capacités attendues
Cercle trigonométrique. Radian. Mesure d'un angle orienté, mesure principale.	• Utiliser le cercle trigonométrique notamment pour : – déterminer les cosinus et sinus d'angles associés ; – résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x : $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$

Corrigés des activités

1 À La pêche

1 **a.** Périmètre de la bobine B : $2\pi \times 1 = 2\pi \approx 6{,}28$ dm.

Nombre de tours : $\dfrac{1}{2\pi} \approx 0{,}159$ tours

b. Nombre de tours : $\dfrac{10}{2\pi} \approx 1{,}59$ tours

1 Nombre de tours : $\dfrac{50}{2\pi} \approx 7{,}96$ tours

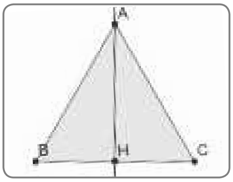
2 **a.** $2\pi \approx 6{,}28$ dm

b. $2\pi \times k$ avec k un entier naturel ; Il faut trouver k pour que $45 \leqslant 2\pi \times k \leqslant 55$.

Seule valeur possible pour k est 8. Longueur de fil enroulée : $2\pi \times 8 = 16\pi \approx 50{,}27$dm.

2 De remarquables irrationnels!

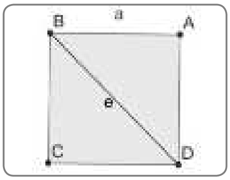
Partie A



1 **a.** (*Ci-contre*)

b. Hauteur en fonction de a : $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$; $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 30° = \dfrac{1}{2}$



2 **a.** (*Ci-contre*)

b. Diagonale en fonction de a : $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Partie B

2 $A(1\ ;\ 0\ )$ $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ $C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $D\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $E(0\ ;\ 1)$ $F\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

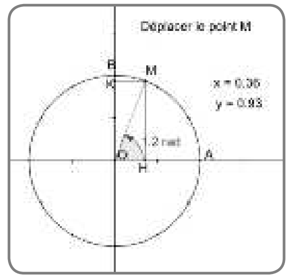
$G\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $H\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ $I(-1\ ;\ 0\ )$ $J\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ $K\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$L\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad$ $M(0\ ;-1)$ $\quad$ $N\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad$ $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $M(0\ ;\ -1)$ $\quad$ $N\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad$ $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad$ $R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$

Corrigés des Travaux pratiques

TICE 1 Variation du cosinus et du sinus



Partie A : Construction

❶ Dans le logiciel, pour faire apparaitre l'abscisse de H et l'ordonnée de K, on peut par exemple faire afficher les équations des droites (KM) et (HM).

❷ Les nombres a et b sont respectivement le cosinus et le sinus de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

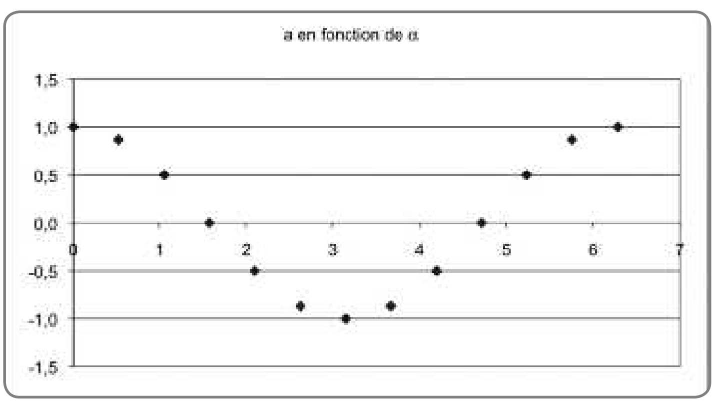
Partie B : Observation

❶ **a.** Réponse attendue : sur les 1[er], 2[e], 3[e] et 4[e] quarts de cercle, la fonction qui, à la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.), associe le nombre a est respectivement décroissante, décroissante, croissante et croissante.

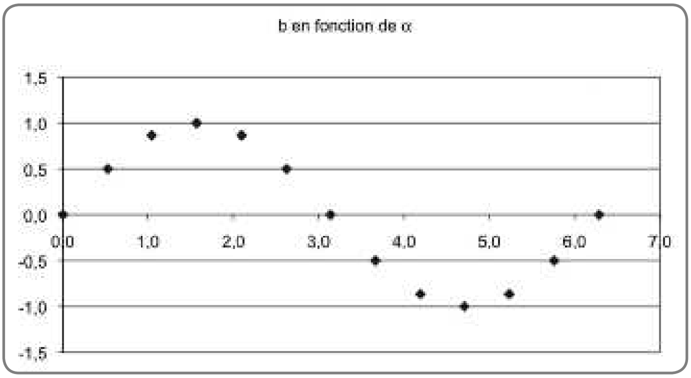
b. On peut demander aux élèves de compléter le tableau donné. Mais il est bien plus rapide pour cette question d'utiliser un tableur qui permettra de reporter toutes les mesures d'angle et leur cosinus par copie de formule.

Angle α en degrés	Angle α en radians	$a = \cos\alpha$	$b = \sin\alpha$
0	0,000	1,000	0,000
30	0,524	0,866	0,500
60	1,047	0,500	0,866
90	1,571	0,000	1,000
120	2,094	−0,500	0,866
150	2,618	−0,866	0,500
180	3,142	−1,000	0,000
210	3,665	−0,866	−0,500
240	4,189	−0,500	−0,866
270	4,712	0,000	−1,000
300	5,236	0,500	−0,866
330	5,760	0,866	−0,500
360	6,283	1,000	0,000

c.



2 **a.** Réponse attendue : sur les 1er, 2e , 3e et 4e quarts de cercle, la fonction qui, à la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ associe le nombre b, est respectivement croissante, décroissante, décroissante et croissante.



TICE 2 Valeurs exactes ou approchées

Partie A

1 $\cos(a - (-a)) = \cos a \cos(-a) + \sin a \sin(-a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$
$= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$

2 On en déduit que $\cos^2 a = \dfrac{\cos 2a + 1}{2}$. Donc $\cos a = \sqrt{\dfrac{\cos 2a + 1}{2}}$ ou $\cos a = -\sqrt{\dfrac{\cos 2a + 1}{2}}$.

3 D'où, comme $\cos \dfrac{\pi}{8}$ est positif, $\cos \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$.

Partie B

1 **a.**

n	pi/2^n	cos(n)	Avec la formule
1	1,570796327	6,12574E-17	0
2	0,785398163	0,707106781	0,707106781
3	0,392699082	0,923879533	0,923879533
4	0,196349541	0,98078528	0,98078528
5	0,09817477	0,995184727	0,995184727
6	0,049087385	0,998795456	0,998795456
7	0,024543693	0,999698819	0,999698819
8	0,012271846	0,999924702	0,999924702
9	0,006135923	0,999981175	0,999981175
10	0,003067962	0,999995294	0,999995294
11	0,001533981	0,999998823	0,999998823
12	0,00076699	0,999999706	0,999999706
13	0,000383495	0,999999926	0,999999926
14	0,000191748	0,999999982	0,999999982
15	9,58738E-05	0,999999995	0,999999995

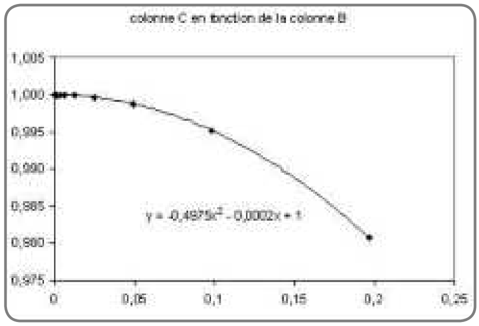
2 La différence de résultat entre les deux méthodes est due aux approximations faites par le tableur pour les calculs.

PARTIE C

1

Colonne A	Colonne B	Colonne C	Colonne D
n	pi/2^*n*	cos(pi/2^*n*)	= 1–(B1)^2/2
4	0,196349541	0,98078528	0,980723429
5	0,09817477	0,995184727	0,995180857
6	0,049087385	0,998795456	0,998795214
7	0,024543693	0,999698819	0,999698804
8	0,012271846	0,999924702	0,999924701
9	0,006135923	0,999981175	0,999981175
10	0,003067962	0,999995294	0,999995294
11	0,001533981	0,999998823	0,999998823
12	0,00076699	0,999999706	0,999999706
13	0,000383495	0,999999926	0,999999926
14	0,000191748	0,999999982	0,999999982

2 **a.** et **b.** Une fonction du second degré semble adaptée pour modéliser la situation avec un coefficient négatif devant le terme x^2.



3 **b.** On remarque que les valeurs des colonnes C et D sont presque identiques.

4 La fonction $x \mapsto 1 - \dfrac{x^2}{2}$ semble donner de bonnes valeurs approchées de $\cos x$ lorsque x est petit.

Algorithmique 1 — Autre mesure ?

PARTIE A

1 **a.** Pour les valeurs de a en entrée 0 ; π ; 3π et 10, les sorties sont respectivement 0 ; –3,14 ; 3,14 et –2,56.

b. Cet algorithme soustrait des multiples de 2π au nombre entré tant que le nombre obtenu est strictement supérieur à π. Par exemple, l'entrée 7 donne en sortie $7 - 2\pi \approx 0{,}71$.

c. La sortie de l'algorithme pour $a = -3\pi$ est -3π.

2 **a.** Il faut ajouter un test :

- Si $a > -\pi$ alors tant que $a > \pi$ affecter à a la valeur a – tour
- Sinon tant que $a \leqslant -\pi$ affecter à a la valeur a + tour

b.

```
PROGRAM:MESURE
:Input A
:2*π→T
:If A>-π:Then
:While A>π
:A-T→A:End
:Else
:While A≤-π
:A+T→A:End
:End:Disp A
```

```
## import des fonctions du module math pour utliser la valeur pi
from math import *

## Entrée
a=input ('Entrer un nombre réel a : ')

## Traitement
tour=2*pi

if a>-pi :
    while a>pi :
        a=a-tour
else :
    while a<=-pi :
        a=a+tour

## Affichage du résultat
print "Le résultat vaut : ",a
```

Partie B

Soit x_1 et x_2 deux nombres réels quelconques.

1

```
Entrée :        Les nombres a, x1 et x2
Traitement :    Rechercher la plus petite mesure de a supérieure ou égale à x1
                Vérifier si cette mesure est dans l'intervalle (sinon il n'y a
                pas de solution)
                Calculer les autres mesures éventuelles
Sortie :        Afficher les mesures trouvées
```

```
## import des fonctions du module math pour utliser la valeur pi
from math import *

## Entrée
a=input ('Entrer un nombre réel a : ')

## Traitement
tour=2*pi

if a>-pi :
    while a>pi :
        a=a-tour
else :
    while a<=-pi :
        a=a+tour

## Affichage du résultat
print 'Le résultat vaut : ',a
```

```
PROGRAM:MESURES
:Input A:Input X
:Input Y:2*π→T
:If A≥X:Then
:While A-T>X
:A-T→A:End
:Else
:While A<X
:A+T→A:End:End
:If A≤Y:Then
:Disp A
:While A+T<Y
:A+T→A:Disp A
:End
:Else:Disp "PAS
DE SOLUTION":End
```

Algorithmique 2 — Équation trigonométrique

1 **a.**

```
Entrée :        Le nombre a
Traitement :    Si |a| > 1 alors l'équation n'a pas de solution ; affecter 0 à la
                variable N
                Si |a| = 1 alors l'équation a une solution ; affecter 1 à la
                variable N
                Si |a| < 1 alors l'équation a deux solutions ; affecter 2 à la
                variable N
Sortie :        Afficher le nombre de solutions c'est-à-dire la variable N
```

b.

```
## import des fonctions du module math
from math import *

## Entrée
a=input ('Entrer un nombre réel a : ')

## Traitement et affichage du résultat
if abs(a)>1 :
        N=0
else :
        if a == 1 or a == -1 :
                N=1
        else :
                N=2
##Affichage
print 'L'équation cos x = ',a, ' a ',N,'solutions dans [0 ; 2.pi[.'
```

```
PROGRAM:EQTRIG
:Input "A ? ",A
:If abs(A)>1:The
n:0→N:Else
:If abs(A)=1:The
n:1→N:Else:2→N:E
nd:End
:Disp "N SOL",N
```

2 Avec la condition $\sin x > 0$, sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$, il n'y a, pour $|a| < 1$, qu'une solution qui est donnée par la touche Arccos de la calculatrice.

Dans le cas $a = 1$, le système n'a pas de solution.

```
Entrée :           Le nombre a
Traitement         Si |a| ⩾ 1 alors afficher que l'équation n'a pas de solution
et sortie :        Si |a| < 1 alors afficher le nombre Arccos a
```

```
## import des fonctions du module math pour utiliser la valeur pi
from math import *

## Entrée
a=input ("Entrer un nombre réel a : ")

## Traitement et affichage du résultat

if abs(a)>=1 :
        print "Le système cos x =",a, "ET sin x < 0"
        print "n'a pas de solution dans [0 ; 2.pi[."
else :
        print "Le système cos x =",a, "ET sin x < 0"
        print "a une solution dans [0 ; 2.pi[ qui vaut x = ",acos(a)
```

```
PROGRAM:EQTRIG2
:Input "A ? ",A
:If abs(A)≥1:The
n:Disp "PAS DE S
OLUTION":Else
:Disp Arccos(A)
:End
```

❸ Avec la condition $\sin x < 0$, sur l'intervalle $[0\ ;2\pi[$, il n'y a, pour $|a| < 1$, qu'une solution.
À partir de ce que donne la calculatrice (Arccos a), il faut prendre son opposé puis ajouter un tour pour obtenir la solution dans l'intervalle imposé $[0\ ;2\pi[$.

```
Entrée :           Le nombre a
Traitement         Si |a| ⩾ 1 alors afficher que l'équation n'a pas de solution
et sortie :        Si |a| < 1 alors afficher le nombre 2π − Arccos a
```

```
## import des fonctions du module math
from math import *

## Entrée
a=input ("Entrer un nombre réel a : ")

## Traitement et affichage du résultat

if abs(a)>=1 :
        print "Le système cos x = ",a, "ET sin x >0"
        print "n'a pas de solution dans [0 ; 2.pi[."
else :
        print "Le système cos x = ",a, "ET sin x >0"
        print "a une solution dans [0 ; 2.pi[ qui vaut x = ",2*pi-acos(a)
```

```
PROGRAM:EQTRIG3
:Input "A ? ",A
:If abs(A)≥1:The
n:Disp "PAS DE S
OLUTION":Else
:Disp 2*π-Arccos
(A):End
```

Problème ouvert 1

Méthode algorithmique

L'angle indiqué est $\dfrac{\pi}{45}$, soit 4°.

Soit M(x ; y) un des point où l'escargot tourne avec $\vec{i}\ ;\overrightarrow{OM} = \alpha$.

La fois suivante, il se trouvera au point $M'\left(x + 6\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{45}\right) ; y + 6\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{45}\right)\right)$.

L'algorithme qui permet de trouver la position de l'escargot au bout de 2 heures est le suivant :

```
Traitement :    Affecter 0 à la variable sorti (booléen)
Sortie :        Affecter 0 à la variable x (abscisses successives)
                Affecter 0 à la variable y (ordonnées successives)
                Affecter 0 à la variable α (angles par rapport à vect i)
                Répéter 120 fois
                •  Affecter x+6*cos(α+π/45) à x
                •  affecter y+6*sin(α+π/45) à y
                •  affecter α + π/45 à α
                •  Si |x| > 150 ou |y| > 200 alors affecter 1 à la variable sorti
                Si sorti vaut 0 alors afficher « pas sorti » sinon afficher
                « sorti »
```

La mise en œuvre de l'algorithme permet de voir que l'escargot ne sortira pas en 2 heures, ni d'ailleurs en plus de temps.

```
## import des fonctions du module math pour utiliser la valeur pi, cos, sin
from math import *

## Entrée
n=input ("Entrer un entier (nombre de minutes) : ")

##Initialisation
x=0 ; y=0 ; angle=0 ; sortie=0

##parametres
# 6 centimetres par minute convertie en m/min
vitesse=0.06
# temps en ligne droite 1 minute
temps=1
# 4? angle duquel on tourne
```

```
PROGRAM:ESCARGOT
:Radian:0→X:0→Y:
0→A:0→S
:For(I,1,120)
:X+6*cos(A+π/45)
→X:Y+6*sin((A+π/
45)→Y:A+π/45→A
:If abs(X)>150 o
r abs(Y)>200:The
n:1→S:End:End
:If S=1:Then:Dis
p "SORTI":Else:D
isp "PAS SORTI":
End
```

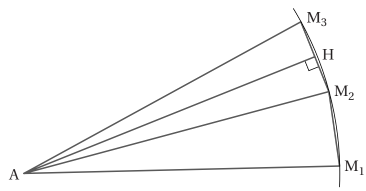
```
## pour le dessin
from turtle import *

## Entrée
n=input ("Entrer un entier (nombre de minutes) : ")

## Dessin des murs
color("red") ; up() ; forward(150) ; down()
left(90) ; forward (200) ; left(90) ; forward (300)
left(90) ; forward (400) ; left(90) ; forward (300)
left(90) ; forward (200) ; left(90)
up() ; forward (150) ; down() ; left(180) ; color("blue")

##Dessin du trajet
for i in range(n):
    forward(6)
    left(4)
```

Méthode du polygone (de rayon *R*)

Sur le schéma *ci-dessous*, l'escargot parcourt les segments successifs $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$..., côtés d'un polygone de centre A. L'angle $\widehat{AM_2H}$ mesure $\dfrac{\pi - \dfrac{\pi}{45}}{2} = \dfrac{22\pi}{45}$ et $M_2H = 3$cm.

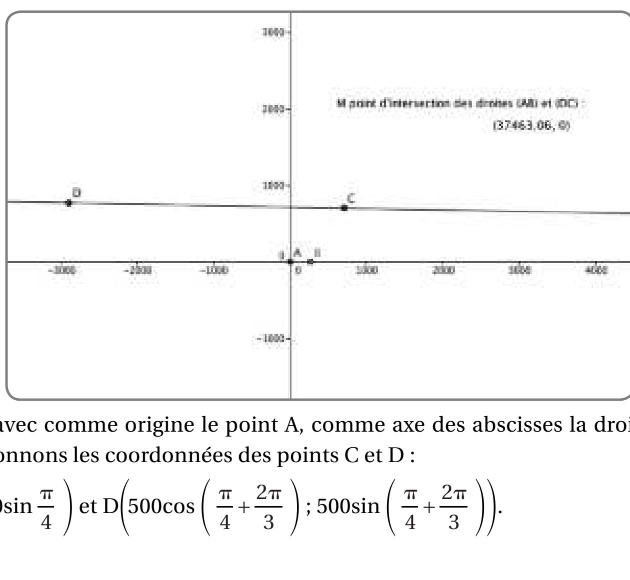
Comme $\dfrac{M_2H}{R} = \cos\dfrac{22\pi}{45}$, on a $R = \dfrac{3}{\cos\dfrac{22\pi}{45}} \approx 85{,}7$ cm.

On peut montrer que ce cercle de centre A et de rayon 85,7 ne touche pas les murs.



Problème ouvert 2

Un logiciel de géométrie peut donner le schéma suivant.



Dans un repère avec comme origine le point A, comme axe des abscisses la droite (AB) et comme unité le mètre, donnons les coordonnées des points C et D :

$C\left(500\cos\dfrac{\pi}{4}\ ;\ 500\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $D\left(500\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}\right) ; 500\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

En notant M(x ; 0) le point d'intersection de droite (DC) avec la droite (AB), on peut écrire, par égalité des coefficients directeurs des droites (DC) et (CM) :

$$\frac{1000\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-3000\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}{1000\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-3000\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)}=\frac{-1000\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-1000\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

On en déduit que : $x = 1000\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-1000\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\dfrac{1000\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-3000\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)}{1000\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-3000\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)} \approx 37\,463$ m.

Il faut donc se placer à 37,4 km de A, du côté de B, ce qui finalement n'est guère possible ! Constater l'alignement de deux bateaux qui se trouvent à plus de 30km n'est pas possible !

Problème ouvert 3

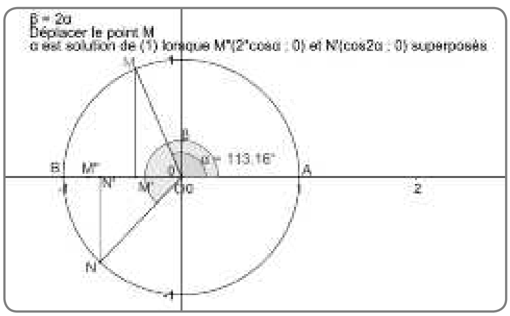
• Étude de l'équation (1) $\cos 2a = 2\cos a$

Cette formule est vraie pour « quelques » valeurs de a. Ce sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k'\pi$ avec k et k' deux entiers relatifs quelconques et $\alpha \approx 111{,}5°$.

– Par calcul, on montre que α est solution de l'équation $\cos a = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

car $\cos 2a = 2\cos a \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 = 2x \\ x = \cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x = \cos a \end{cases} \Leftrightarrow \cos a = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

– À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture ces solutions :



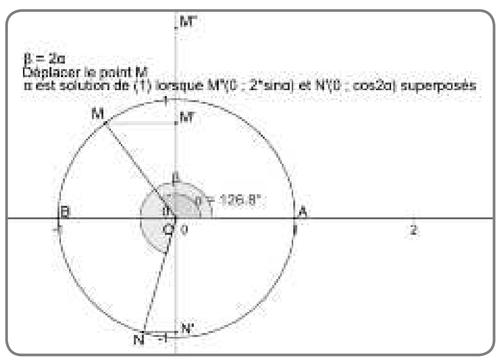
• Étude de l'équation (2) $\sin 2a = 2\sin a$

Cette formule est vraie pour « quelques » valeurs de a. Ce sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $k\pi$ avec k entier relatif quelconque.

– En admettant la formule $\sin 2a = 2\sin a\cos a$, par calcul, on résout l'équation :

$\sin 2a = 2\sin a \Leftrightarrow 2\sin a\,(\cos a - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin a = 0$ ou $\cos a = 1 \Leftrightarrow a = k\pi$.

– À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture ces solutions :



Corrigés des exercices et problèmes

QCM Pour bien commencer

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 346.

Exercices d'application

1 **a.** $\alpha = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$; $\beta = \frac{2\pi}{3}$; $\gamma = \frac{3\pi}{4}$

b. $\alpha = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$; $\beta = \frac{17\pi}{18}$; $\gamma = \frac{\pi}{180}$

2 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 345.

3 **1. a.** $\frac{\pi}{4}$ **b.** $-\frac{7\pi}{6}$

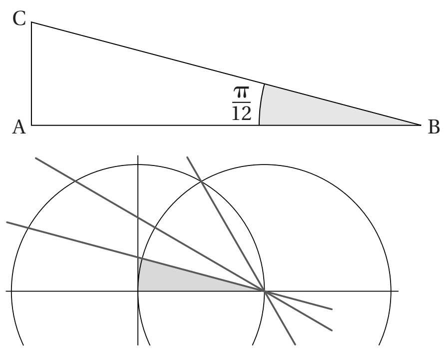
c. $\frac{49\pi}{6}$ **d.** 14π

2. a. $\approx 171{,}9°$ **b.** $\approx 143{,}5°$

c. $-630°$ **d.** $36°$

4 **a.** mesure de $\widehat{C}$: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

b.



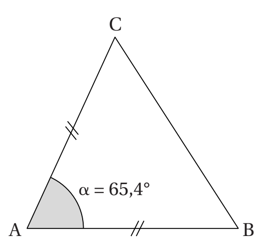
Un angle de $\frac{\pi}{3}$ s'obtient en traçant un triangle équilatéral de côté AB. Pour tracer l'angle de $\frac{\pi}{12}$, il suffit de tracer une bissectrice, puis une deuxième bissectrice.

L'angle droit s'obtient en traçant B' le symétrique de B par rapport à A, puis la médiatrice de (B'B).

5 **a.** Mesure en radians de l'angle $\widehat{A}$: $\pi - 2$

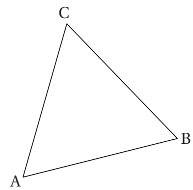
b. Angle $\widehat{A} \approx 65{,}4°$; angle $\widehat{B}$ = angle $\widehat{C} \approx 57{,}3°$

c.



6 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 345.

7 **a.**



$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$;

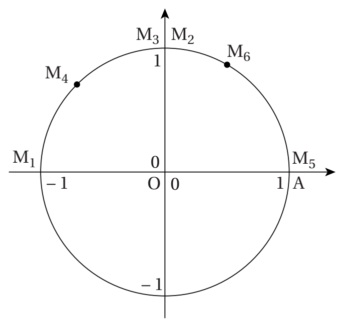
$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}$.

8 **2. a.** $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{2\pi}{3}$. **b.** $-\frac{2\pi}{3}$; π ; $-\frac{\pi}{3}$.

9 **2. a.** $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; π. **b.** 0 ; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$.

c. $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$.

10 **a.**



b. π ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{3}$.

11 **a.** π **b.** 0

c. $-\frac{\pi}{4}$ **d.** $-\frac{2\pi}{3}$

e. $100 - 32\pi$ **f.** $-25+8\pi$

12 **a.** $-\frac{7\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$

b. 4

$0 \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant 8\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant 2k$

$\leqslant 8 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0{,}25 \leqslant k \leqslant 3{,}75$.

Comme k entier, il existe donc 4 mesures différentes pour k valant 0, 1, 2 ou 3 :

$\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{2}$.

13 **a.** 11 **b.** 16 **c.** 16.

14 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 345.

15 $S_1 = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) \quad (2\pi)$

$S_2 = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AD})$

$= (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CA}) + \pi$

$= (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) \quad (2\pi)$

$S_3 = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$

$= (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}) + \pi$

$= (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) + \pi$

$= (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) \quad (2\pi).$

16 $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$
$= (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$
$+ (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}) + 2\pi$
$= (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}) + \pi$
$= 0 \ (2\pi)$

17 **a.** $\frac{\pi}{2}$ **b.** $-\frac{2\pi}{3}$

c. π **d.** $\frac{2\pi}{3}$

e. $-\frac{\pi}{12}$ **f.** $-\frac{\pi}{6}$

18 $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; π

19 **a.** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{6}$ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}) = \frac{2\pi}{3}$

b. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{4}$ $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{4}$

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{6}$

20 **a.** Par l'absurde.

En supposant que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$, on a :

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) =$

$-\frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$

Donc les points B, A et C sont alignés dans cet ordre.

Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq \frac{\pi}{3}$.

b. Démonstration par l'absurde similaire :
$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\alpha + \pi + \alpha$
$= \pi + 2k\pi$

21 **b.** $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB})$

$= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

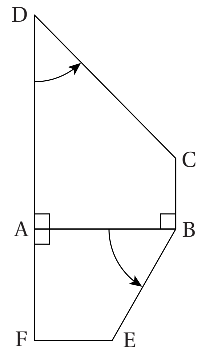
$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD})$

$= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

c. Immédiat par la relation de Chasles.

d. $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{9\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

22 **1.** et **2.**



3. **a.** $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$
$= \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, DA)$
$+ (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}) = \pi + \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} + \pi$
$+ \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4} \quad (+2k\pi)$

b. de la même manière $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}) = \frac{2\pi}{3}$.

23 ***Traduction***

Le côté d'un octogone régulier mesure 12m. Déterminer le rayon de son cercle inscrit ainsi que le rayon de son cercle circonscrit.

Résolution

Dans le triangle OAC, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{8}$ et AC = 6m.

$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{AC}{OA}$ donc OA le rayon du cercle circonscrit vaut $\frac{6}{\sin\frac{\pi}{8}} \approx 15{,}68$m.

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{OC}{OA}$ donc OC le rayon du cercle inscrit vaut $\frac{6}{\sin\frac{\pi}{8}} \times \cos\frac{\pi}{8} \approx 14{,}49$m

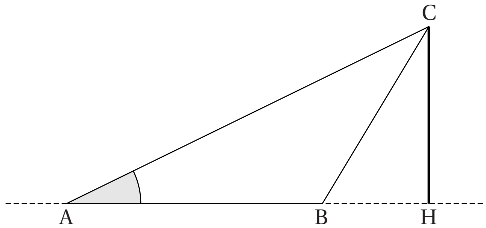
24 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 345.

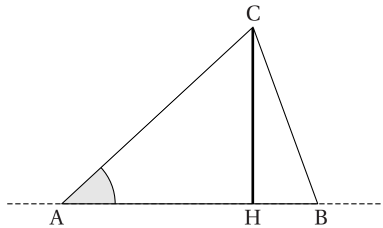
25 **a.** ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0.$

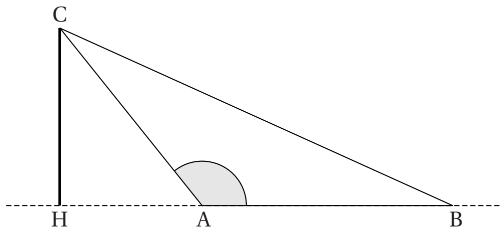
b. ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -1$ ou $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 \Leftrightarrow |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = 1.$

26 Dans un plan orienté muni d'un repère orthonormé, ABC est un triangle quelconque non aplati.

a. L'aire est égale à $\frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$.







$AH = AC \times \sin\widehat{A} = AC \times |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.

Dans le cas où le point H ne se trouve pas sur la demi-droite [AB), il faut remarquer que les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$, qui sont correspondants, ont même sinus.

Donc l'aire vaut $\frac{1}{2} AB \times AC \times |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.

b. $\frac{1}{2} BA \times BC \times |\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})|$

et $\frac{1}{2} CA \times CB \times |\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})|$.

c. En divisant l'égalité $AB \times AC \times |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = BA \times BC \times |\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})| = CA \times CB \times |\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})|$ par $AB \times BC \times AC$, on obtient :

$$\frac{|\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|}{BC} = \frac{|\sin(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})|}{AC} = \frac{|\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})|}{AB}$$

27 **1. a.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** 0

c. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. a. $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ et $OK = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ (Théorème de Pythagore).

b. $\sin\widehat{KOA} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

3. 40,89° ou 0,71 rad

28 **a.** $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = \frac{13\pi}{20}$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{19\pi}{20}$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{11\pi}{20}$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OE}) = -\frac{3\pi}{20}$.

b. $A(3\sqrt{2}\ ;\ 3\sqrt{2})$, $B\left(6\cos\frac{13\pi}{20}\ ;\ 6\sin\frac{13\pi}{20}\right)$,

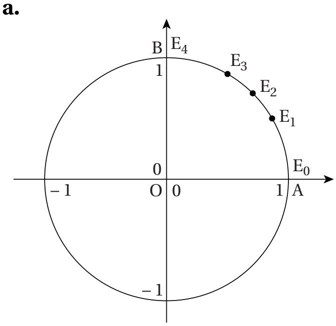
$C\left(6\cos\left(-\frac{9\pi}{20}\right); 6\sin\left(-\frac{19\pi}{20}\right)\right)$,

$D\left(6\cos\left(-\frac{11\pi}{20}\right); 6\sin\left(-\frac{11\pi}{20}\right)\right)$,

$E\left(6\cos\left(-\frac{3\pi}{20}\right); 6\sin\left(-\frac{3\pi}{20}\right)\right)$.

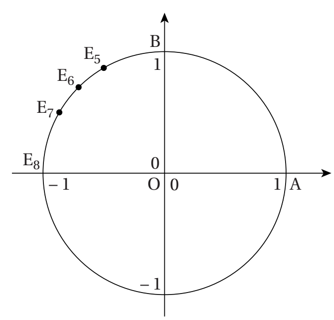
c. A(4,24 ; 4,24), B(–2,72 ; 5,35), C(–5,93 ; –0,94), D(–0,94;–5,93), E(5,35 ; –2,72).

29 2. **a.**



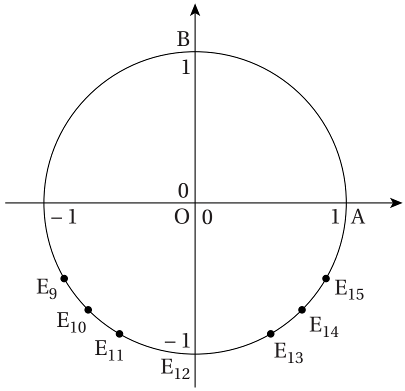
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

b.



$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
$\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

c.



$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{1}{2}$	0

30 A = 0 ; B = 1

31 ***1re méthode* :** $= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

***2e méthode* :** $= \cos\frac{11\pi}{12}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{11\pi}{12}\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times -\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

32 **a.** $2\cos x$ **b.** $2\sin x$

c. $2\cos x$ **d.** 0

33 **a.** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k'\pi$

b. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi$

c. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi$

d. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k'\pi$

34 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

35 **a.** $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ car :

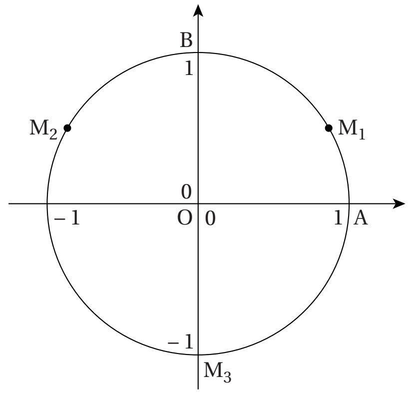
$\sin\alpha = \cos\frac{5\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{3}\right) = \sin -\frac{7\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$

b. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k'\pi$

36 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

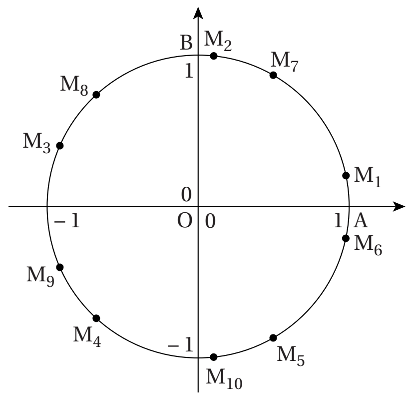
37 **a.** $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$

b.



38 **a.** $x = -\frac{2\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5}$ ou $x = \frac{2\pi}{15} + k'\frac{2\pi}{5}$

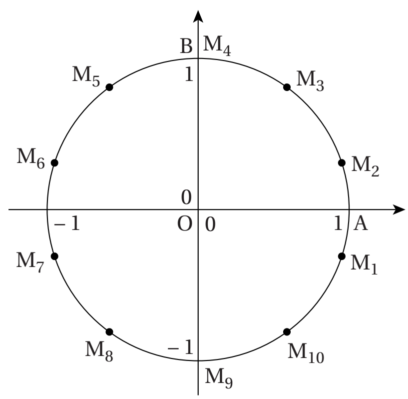
b.



39 **a.** $\alpha = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$ ou $\alpha = -\frac{3\pi}{10} + k'\frac{2\pi}{5}$

ou encore $\alpha = -\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}$

b.



40 **a.** $\alpha \approx -2{,}41 + 2k\pi$ ou $\alpha \approx -0{,}72 + 2k'\pi$ donc dans l'intervalle $]\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2}[$ la solution est $\alpha \approx 3{,}87$.

b. $\alpha \approx -2{,}29 + 2k\pi$ ou $\alpha \approx -0{,}84 + 2k'\pi$ donc dans l'intervalle $]\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi[$ la solution est $\alpha \approx 5{,}43$.

41 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

42 **a.** $2u^2 + u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = -1$ ou $u = 0{,}5$.

b. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sin x \\ 2u^2 + u - 1 = 0 \end{cases}$

3. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sin x \\ u = -1 \end{cases}$

ou $\begin{cases} u = \sin x \\ u = -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -1$ ou $\sin x = 0{,}5$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k'\pi$

ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi$.

43 $4\cos^2 t - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \cos^2 t \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow -0{,}5 \leqslant \cos t \leqslant 0{,}5$

$\Leftrightarrow x \in [-\frac{2\pi}{3}\ ; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}]$.

(se servir du cercle trigonométrique)

44 **a.** $x^2 + 2\sin a + 1 = \cos^2 a$

$\Leftrightarrow x^2 = -2\sin a - 1 + \cos^2 a$

$\Leftrightarrow x^2 = -\sin^2 a - 2\sin a \Leftrightarrow x^2 = -\sin a\,(\sin a + 2)$

Si $\sin a > 0$, l'équation n'a pas de solution.

Si $\sin a = 0$, l'équation a une solution $x = 0$.

Si $\sin a < 0$, l'équation a deux solutions :

$\sqrt{-\sin a(2 + \sin a)}$ et $-\sqrt{-\sin a(2 + \sin a)}$.

b. $x\cos a = x\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x\left(\cos a - \cos\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Si $a = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $a = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, l'équation a comme solution l'ensemble des nombres réels.

Sinon, l'équation n'a qu'une solution : $x = 0$.

c. $x\sin^3 a = 2\sqrt{1 - \cos^2 a} - x\cos^2 a \sin a$

$\Leftrightarrow x\sin a = 2|\sin a|$

Si $\sin a > 0$, l'équation n'a qu'une solution : $x = 2$.

Si $\sin a = 0$, l'équation a comme solution l'ensemble des nombres réels.

Si $\sin a < 0$, l'équation n'a qu'une solution : $x = -2$.

Raisonnement logique

45 **a.** VRAI, coefficient de proportionnalité $\frac{180}{\pi}$

b. VRAI car il est sous entendu qu'il s'agit de radian et $\sin 90 \approx 0{,}89$.

Si on considère $\sin 90°$ c'est bien sûr faux .

c. FAUX.

Contre-exemple : $(1\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$.

d. VRAI, relation de Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = 2k\pi$.

e. FAUX, relation de Chasles :

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$

$= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) + \pi + 2k\pi$.

f. FAUX. Contre-exemple : $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$.

g. VRAI. Cours sur les angles associés x et $x + \pi$.

h. VRAI, $\sin x$ ne peut être égal à un nombre supérieur à 1 $\left(2 + \sin\frac{\pi}{3} \approx 3{,}7\right)$.

i. VRAI, les solutions de « $\sin x = \frac{1}{2}$ » sont :

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi$.

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, il y a 2 solutions.

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 4\pi]$, il y a 4 solutions.

Sur l'intervalle $[0\ ;\ \frac{123456788}{2 \times \pi}]$, il y a 123456788 solutions.

Sur l'intervalle $[0\ ;\ \frac{123456788}{2 \times \pi + \frac{\pi}{6}}]$, il y a 123456789 solutions.

46 **a.** Si $a = 0$ alors l'équation admet exactement une solution ($x = 0$) sur l'intervalle.

$a = 0$ est donc une condition suffisante

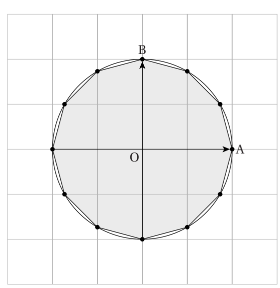
b. $a = k\pi$ est une condition nécessaire (voir la question **c.**) mais également toute condition sur a qui soit plus « grande ». Par exemple $a = \frac{k\pi}{2}$, k entier relatif est également une condition nécessaire car $\{k\pi,\ k \text{ entier relatif}\} \subset \{\frac{k\pi}{2},\ k \text{ entier relatif}\}$.

c. Il faut et suffit que $\cos a = 1$ ou $\cos a = -1$ c'est-à-dire $a = k\pi$, k relatif quelconque.

47 X en radian est proche d'un demi-tour et X en degré est proche de zéro. Donc leurs sinus sont très proches de zéro (0,0013 et 0,0054).

On peut remarquer que si on choisit $Y = \frac{180 \times \pi}{\pi + 180}$, leurs sinus en degré et en radian sont égaux car la conversion de Y de degré en radian vaut $Z = \frac{Y \times \pi}{180}$ et $Y + Z = \pi$.

48



Oui c'est un dodécagone régulier car les angles peuvent être calculés dans le repère (O, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$). Chacun des sommets M_i non situé sur les axes a une des coordonnées qui vaut 0,5 ou –0,5. Le sinus ou le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_i})$ vaut donc 0,5 ou –0,5.

Restitution des connaissances

49 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC})$
$+ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \pi + \pi + 2k\pi$
$= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + 2k'\pi$.

50 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\alpha + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$
$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

51 Les solutions de l'équation trigonométrique d'inconnue x, $\cos x = \cos a$,
sont $a + 2k\pi$ et $-a + 2k\pi$.
Recherchons k tel que $a + 2k\pi$ supérieur ou égal à 100.
$a + 2k\pi \geqslant 100 \Leftrightarrow k \geqslant \dfrac{100 - a}{2\pi}$.
Il suffit de choisir k un entier relatif supérieur ou égal à $\dfrac{100 - a}{2\pi}$ pour trouver une solution supérieure à 100.

Se tester sur…

QCM : Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 346.

Prêt pour le contrôle ?

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 346.

Problèmes

62 Si N1 est le nombre de tour faits pendant le trajet par la roue arrière, la distance parcourue par cette roue vaut : $N1 \times 2\pi \times 0{,}7$ en mètres
Si N2 est le nombre de tour faits pendant le trajet par la roue arrière, la distance parcourue par cette roue vaut : $N2 \times 2\pi \times 0{,}6 = (N1 + 70) \times 2\pi \times 0{,}6$ en mètres.
Donc $N1 \times 2\pi \times 0{,}7 = (N1+70) \times 2\pi \times 0{,}6$.
Donc N1 = 420 et le trajet parcouru $420 \times 2\pi \times 0{,}7$
$= 588\,\pi \approx 1847{,}26$ m

63 ***Traduction***

a. La trajectoire d'une autoroute suit un arc de cercle mesurant 200 mètres.
Quel est le rayon de cet arc si son angle au centre mesure 2 radians ?
b. Une roue de rayon 2 pieds avance de 3 pieds en roulant. De combien de radians tourne-t-elle ?

Résolution
a. $L = R\alpha$; ici $200 = 2R$ donc le rayon vaut 100m
b. $L = R\alpha$; ici $3 = 2\alpha$ donc l'angle α vaut 1,5 rad.

64 Soit R = OA le rayon en cm.
Le périmètre du cercle de rayon OA permet d'écrire
$6R + 6 = 2\pi R$ donc $R = \dfrac{6}{2\pi - 6} \approx 21{,}2$ cm.
Aire de la partie bleue :
$6 \times \pi R^2 \times \dfrac{1}{2\pi} = 3R^2 = \dfrac{108}{(2\pi - 6)^2} \approx 1346{,}74$ cm²
Aire de la partie violette :
$\pi(R+1)^2 - \dfrac{108}{(2\pi - 6)^2} = \dfrac{4\pi^3 - 108}{(2\pi - 6)^2} \approx 199{,}83$
Rapport : $\dfrac{108}{4\pi^3 - 108} \approx 6{,}74$

65

1. a. 2π **b.** $2\pi \times \dfrac{44}{12} = \dfrac{22\pi}{3}$
c. $L = R\alpha = \dfrac{22\pi}{3} \times \dfrac{26 \times 2{,}54}{2} \approx 760{,}7\text{cm} = 7{,}607$ m
2. $\alpha = 2\pi \times \dfrac{22}{32} = \dfrac{11\pi}{8}$
$L = R\alpha = \dfrac{11\pi}{8} \times \dfrac{26 \times 2{,}54}{2} \approx 142{,}6\text{cm} = 1{,}426$ m
3. a.

	12	14	16	18	21	26	32
22	3,80	3,26	2,85	2,54	2,17	1,76	1,43
32	5,53	4,74	4,15	3,69	3,16	2,55	2,07
44	7,61	6,52	5,71	5,07	4,35	3,51	2,85

b. Oui les réglages 12×22, 18×32, 26×44 ou 12×32, 16×44 ou 21×22, 32×32 donnent des vitesses similaires.
4. Réglage 44 avant 12 arrière :
$v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{0{,}007607}{1/3600} \approx$ **27,4 km/h**.
Réglage 22 avant 32 arrière :
$v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{0{,}001426}{1/3600} \approx$ **5,1 km/h**.

66

1. a. Altitude A1 : $29000 \times \sin\dfrac{8\pi}{9} \approx 9918$ m.
Altitude A2 : $10000 \times \sin\dfrac{5\pi}{12} \approx 9659$ m.
Différence altitude : 259 m : la norme de sécurité n'est pas respectée.
b. Altitude A1 : $11300 \times \sin 1 \approx 9509$ m. Altitude A2 : $14200 \times \sin 2{,}5 \approx 8498$ m.
Différence altitude : 1011 m : la norme de sécurité ….n'est pas respectée car l'altitude de A2 est trop basse !

2. a. Entrer les données

Calculer les deux altitudes ainsi que leur différence. Si la différence est supérieure à 304 et chaque altitude comprise entre 8840 et 12500, afficher que la norme de sécurité est respectée, sinon afficher le problème qui se pose.

b.

67

1. a. B$(2 ; 2\sqrt{3})$

b. Si M$(x_M ; y_M)$ et N$(x_N ; y_N)$ sont deux points successifs tels que $(\vec{j}, \vec{u}) = \alpha$, les coordonnées du vecteur MN sont $\left(\|\vec{u}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) ; \|\vec{u}\| \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$.

Donc $x_N = x_M + \|\vec{u}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

et $y_N = y_M + \|\vec{u}\| \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

L'algorithme est le suivant :

- Entrer les 4 nombres suivants : x_M, y_M $\|\vec{u}\|$ et α
- Calculer x_N et y_N
- Afficher le résultat.

c. C $(-3 ; 2\sqrt{3})$

D$(-3+3\sqrt{2} ; 2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$.

2. a. Il suffit d'ajouter à l'algorithme précédent une variable S, initialisée à 0, qui somme les distances données par la formule $\sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

b.

68

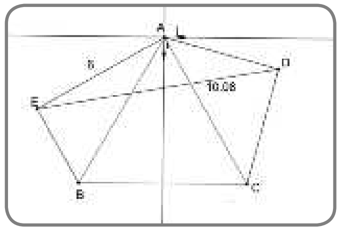
1. DE semble égal à 10.

2. a. AE = AI par égalité des triangles AEB et AIB.

b. AC $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ AI.

c. AD $= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ AI $= \frac{\sqrt{6}}{3}$ AI.

3. a.



b. A(0 ; 0) et I(a ; 0).

c.

$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$.

$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.

d. AE $= a$; AD $= \frac{\sqrt{6}}{3} a$.

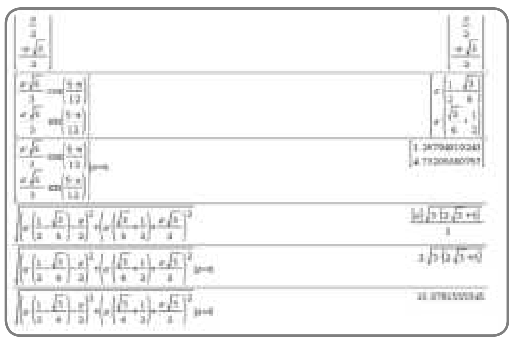
e. E$\left(\frac{a}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)$;

D$\left(a\frac{\sqrt{6}}{3} \cos\frac{5\pi}{12} ; a\frac{\sqrt{6}}{3} \sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

f. ED ≈ 10,08.

g. Édouard n'avait pas raison.

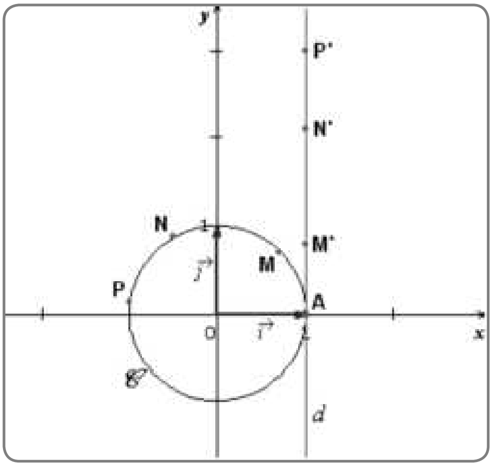
4. a.



b. Édouard n'avait effectivement pas raison ; un encadrement de $\sqrt{3}$ permet de prouver que : ED ≠ 10.

69 Démonstration de la relation de Chasles

1.



2. a. $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) = p - m + 2k_1\pi$.

b. $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ON}) = n - p + 2k_2\pi$.

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = n - m + 2k_3\pi$.

c. $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ON}) = p - m + 2k_1\pi + n - p + 2k_2\pi$

$= n - m + 2k_3\pi$

$= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) + 2k\pi$

70

1. Dans le triangle AOB :

a. Angle $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$ **b.** $\dfrac{5\pi}{12}$

c. $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\frac{AB}{2}}{a}$ donc $AB = 2a.\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2. • Avancer de 10 cm

• Tourner à droite de $\dfrac{7\pi}{12}$ radians

• Faire 12 fois

– avancer de 5,18 cm

– tourner à droite de $\dfrac{\pi}{6}$ radians.

Éventuellement pour revenir au centre :

• tourner à droite de $\dfrac{5\pi}{12}$ radians

• avancer de 10 cm.

• tourner à droite de π radians

3.

• Faire 6 fois

– avancer de 10 cm

– tourner à droite de $\dfrac{7\pi}{12}$ radians

– avancer de 5,18 cm

– tourner à droite de $\dfrac{7\pi}{12}$ radians

– avancer de 10 cm

– tourner à droite de $\dfrac{5\pi}{6}$ radians.

4. L'algorithme en question **2** n'est pas unique car on aurait pu tourner à gauche tout le temps.

L'algorithme en question **3** n'est pas unique car on peut décrire les 6 triangles dans un ordre différent.

5.

```
## importation du module maths pour la fonction sinus
from math import *
## importation du module tortue pour le dessin
from turtle import *
setup()

## Choix rayon
rayon=100

## Tracé du segment [OA]
up()
color("blue")
forward(rayon)
right(180-75)
down()

## calcul longueur arrete
a=2*rayon*sin(pi/12)

for i in range(12):
    forward(a)
    right(180-150)

## Retour au centre position initiale
up()
left(180-150)
right(180-75)
forward(rayon)
right(180)
down()

## Tracé rouge
color("red")

for i in range(6):
    forward(rayon)
    right(180-75)
    forward(a)
    right(180-75)
    forward(rayon)
    left(180-30)
```

71 **1. a.** $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$ $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC}) = \dfrac{\pi}{3}$.

b. $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BO}) = \dfrac{\pi}{3}$.

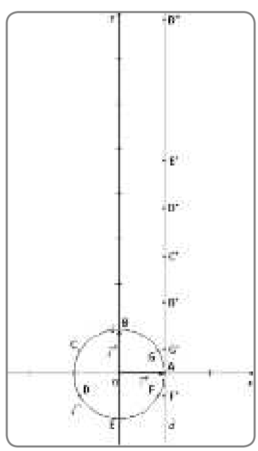
c. $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BG}) = \dfrac{2\pi}{3}$ $(\overrightarrow{GB} ; \overrightarrow{GE}) = \dfrac{\pi}{2}$

$(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{GE}) = (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BG}) + (\overrightarrow{BG} ; \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GB} ; \overrightarrow{GE})$

$= \dfrac{2\pi}{3} + \pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{13\pi}{6}$

Mesure principale $\dfrac{\pi}{6}$.

2. a. b.



c. Longueur $\overset{\frown}{BC}$: $\frac{\pi}{3}$

d. Pas forcément, car le choix pour les points B' et C' n'est pas unique.

3. a. $12 \times \frac{2\pi R}{6} = 4\pi$

b. $\frac{\pi R^2}{6} = \frac{\pi}{6}$

c. $a \times \frac{h}{2} = a \times a \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

d. $12 \times \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 2\pi - 3\sqrt{3} \approx 1{,}09.$

72

1. b. L'aire semble maximale lorsque B se trouve aux points d'intersection du cercle et de la 1re et 2e bissectrice.

2. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\sin x + \cos x)$. Donc $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

3. a. Périmètre :

$$2(R|\cos x| + R|\sin x|) = 2R(|\cos x| + |\sin x|)$$

b. Comme R est une constante et que dans le premier quadrant $\sin x$ et $\cos x$ sont positifs, l'aire est maximale lorsque $\sin x + \cos x$ est maximal,

c'est-à-dire $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ maximal.

c. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$

Ce qui revient dans le premier quadrant à $x = \frac{\pi}{4}$.

d. Par symétrie on obtient les 4 positions pour B :

$$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

4. a. Dans le 1er quadrant.

Périmètre OABC $= 2R \Leftrightarrow 2R(\cos x + \sin x) = 2R$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 1$$

b. $\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi$$

Deux solutions sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$: 0 et $\frac{\pi}{2}$.

c. D'après les deux questions précédentes, le périmètre vaut $2R$ lorsque le point B se trouve sur les axes (rectangles aplatis) .

5. Sur le premier quadrant.

Périmètre OABC $= \sqrt{6}\, R \Leftrightarrow \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$

ou $x = \frac{\pi}{12} + 2k'\pi.$

Ce qui, dans le premier quadrant, donne 2 solutions : $x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12}$.

73

Partie A

1. a. Distance parcourue par M :

$$(2\pi R) \times x = 2\pi x R$$

b. Distance parcourue par M' : $(2\pi R') \times x' = 2\pi x' R'$ est égale par hypothèse à $2\pi x R$

c. $2\pi x R$ est une mesure de $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM})$.

$2\pi x' R'$ est une mesure de $(\overrightarrow{OA'} ; \overrightarrow{OM'})$.

2. a. $2\pi x R = 2kR\pi$ car x est à ce moment un entier $(x = k)$. De même pour $2\pi x' R' = 2k' R' \pi$

b. Comme $2kR\pi = 2k'R'\pi$, on en déduit qu'il existe deux entiers k et k' tels que : $kR = k'R'$.

3. Réciproquement si $kR = k'R'$, il suffit de choisir $x = k$ et $x' = k'$ pour que les deux points M et M' se trouvent en A et A'.

Remarque : les valeurs k et k' ne donnent pas forcément la « première » fois où les deux points M et M' sont à nouveau en A et A'.

Partie B

a. $10k = 5k'$: $k = 1$ et $k' = 2$ convient et c'est bien la première fois car le disque 1 n'a fait qu'un tour.

b. $12k = 18k'$: $k = 3$ et $k' = 2$ convient et c'est bien la première fois car lorsque M' était la première fois en A', M était diamétralement opposé à A.

c. $k = \sqrt{2}\, k'$: impossible car $\sqrt{2}$ ne peut être égal à un rationnel.

Partie C

On a cette fois-ci encore : $2\pi x R = 2\pi x' R'$, mais par contre $2\left(k - \frac{1}{4}\right)R\pi = 2k'R'\pi.$

Ce qui donne :

$\left(k - \frac{1}{4}\right) \times 12 = k' \times 18 \Leftrightarrow 2k - 3k' = \frac{1}{2}.$

Ceci est impossible car k et k' sont des entiers.

Donc les points M et M' ne peuvent pas se retrouver en A et A'.

7. Produit scalaire

Objectifs et pré-requis

Ce chapitre est l'occasion de réinvestir les notions de vecteurs et d'équations de droites vues dans le chapitre 5. Son objectif est d'étudier le produit scalaire de deux vecteurs : suivant le contexte de l'exercice, on sera amené à utiliser l'une ou l'autre des 4 expressions différentes de ce nombre.
On verra son apport dans la détermination de l'orthogonalité, son utilité dans la démonstration de certains théorèmes, dans la recherche de lieux de points, dans les calculs d'angles et de distances, dans l'expression d'équations cartésiennes de droites ou de cercles et dans les formules trigonométriques.
On trouvera également dans ce chapitre l'occasion de proposer aux élèves des activités mettant en œuvre des démarches algorithmiques et de les encourager à manipuler différents logiciels (de type géométrie dynamique) afin de proposer des conjectures lors des problèmes ouverts par exemple.

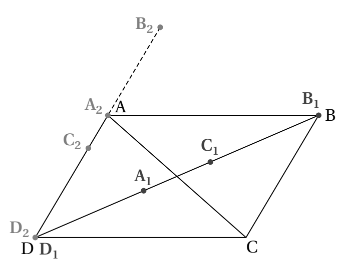
Extrait du programme (*Bulletin officiel spécial n°* 9 *du* 30 *septembre* 2010)

Contenus	Capacités attendues
Définition, propriétés. Vecteur normal à une droite. Application du produit scalaire : calculs d'angles et de longueurs ; formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus.	• Calculer le produit scalaire pas différentes méthodes : – projection orthogonale ; – analytiquement ; – à l'aide des normes et d'un angle ; – à l'aide des normes. • Choisir la méthode la plus adaptée en vue de la résolution d'un problème. • Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un point et un vecteur normal. • Déterminer un vecteur normal à une droite définie par une équation cartésienne. Déterminer une équation de cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre. Démontrer que : $\cos(a–b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Corrigés des activités

1 À la découverte du produit scalaire (1)

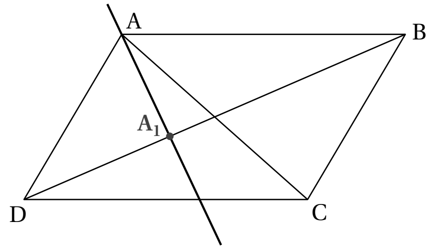
❶ **a.**



b. Le point et son projeté sont confondus.

c. Oui, tous les points situés sur la droite perpendiculaire à (BD) passant par A_1.

d.



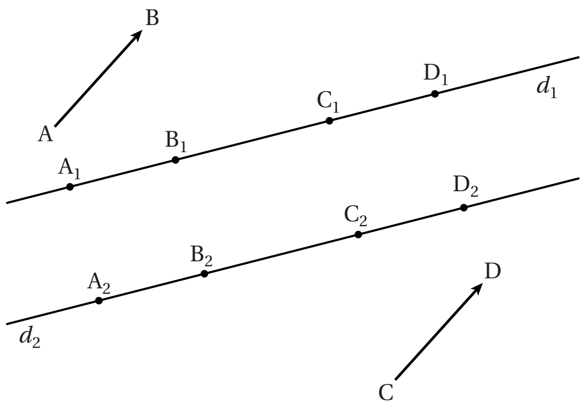
❷ **a.** A' = B' et on a : A'B' < AB.

b. AB = A'B'.

c. A'B' < AB.

d. A'B' < AB.

❸ **a.** et **b.**



c. Ils sont tous égaux.

d. Indépendance du représentant de $\vec{u}$ choisi et indépendance de la droite choisie (fixant une direction).

2 À la découverte du produit scalaire (2)

❶ **a.** Trigonométrie dans le triangle rectangle ACH :

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AH}{AC}$ donc $AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \dfrac{AH}{AC} = AB \times AH$.

b. Trigonométrie dans le triangle rectangle ACH :

$\cos(\widehat{HAC}) = \dfrac{AH}{AC}$ or : $\widehat{BAC} = \pi - \widehat{HAC}$ et $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

donc $AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times -\cos\widehat{HAC} = AB \times AC \times \left(-\dfrac{AH}{AC}\right) = -AB \times AH$.

c. Lorsque l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, son cosinus vaut 0 et le nombre $AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 0$.

❷ Dans le triangle rectangle AKB, on a : $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AK}{AB}$.

Dans le triangle rectangle ACH : $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AH}{AC}$ donne $AH = AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$AB \times AH = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = AB \times AC \times \dfrac{AK}{AB} = AC \times AK$.

Corrigés des Travaux pratiques

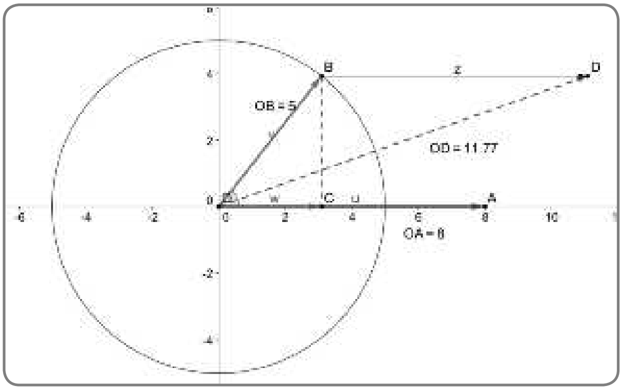
TICE 1 Visualiser toutes les expressions du produit scalaire

Partie A

Pour une correction avec les élèves, le fichier fourni sur le CD permet à l'aide de *GeoGebra* de montrer comment ont été établies les différentes conjectures.

Partie B

❶ **b.** Le réel $\vec{u}.\vec{v}$ a l'air de valoir 0 lorsque les vecteurs sont orthogonaux.



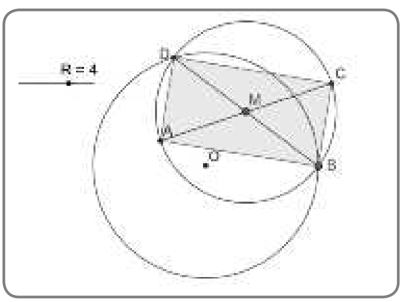
Il a l'air d'être facile à calculer lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

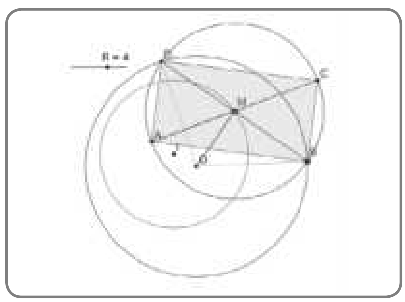
❸ **b.** Le nombre 40 correspond au produit des normes des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

TICE 2 Lieu de points : le rectangle animé

❶ Pour une correction avec les élèves, le fichier fourni permet à l'aide de *Geogebra* de montrer comment ont été établies les différentes conjectures.

❷ **a.** M semble circuler sur un cercle.





b. Le centre du cercle sur lequel se déplace M semble être I, milieu du segment [OA].

c. Le réel s semble être égal au carré du rayon R du cercle $\mathscr{C}$.

❸ **a.**

• ABD est un triangle rectangle en A donc son cercle circonscrit a pour centre le milieu de l'hypoténuse [DB], à savoir M. On a donc : MA = MB = MD.

• De plus, OBD est un triangle isocèle en O (OB = OD).

Donc, la médiane issue de O est aussi la hauteur issue de O et le triangle MOB est par conséquent rectangle en M. En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient : $MO^2 + MB^2 = OB^2 = R^2$.

• En conclusion : $s = MO^2 + MA^2 = MO^2 + MB^2 = R^2$.

b. Démonstration à l'aide du produit scalaire d'une des formules dites « théorème de la médiane ».

c. MI = $\sqrt{\dfrac{R^2}{2}-\dfrac{OA^2}{4}}$ = constante. (Comme A est à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}$, le nombre $2R^2$ – OA² est positif).

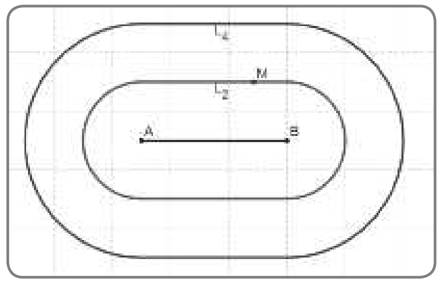
M est donc bien situé sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\dfrac{R^2}{2}-\dfrac{OA^2}{4}}$.

TICE 3 Étude lignes de niveau

Pour une correction avec les élèves, les fichiers fournis sur le CD permettent à l'aide de *Geogebra* de montrer comment on a construit les différentes lignes de niveau.

Partie A

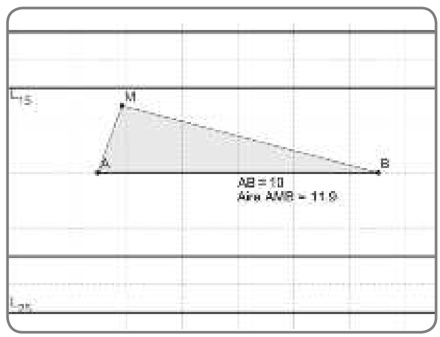
❶ • Si $k < 0$, $\mathscr{L}_k$ est l'ensemble vide.
• Si $k = 0$, $\mathscr{L}_k$ est le segment [AB].
• Si $k > 0$, $\mathscr{L}_k$ est la forme géométrique constituée de deux demi-cercles et de deux segments.



❷ • Si $k < 0$, $\mathscr{L}_k$ est l'ensemble vide.
• Si $k = 0$, $\mathscr{L}_k$ est la droite (AB).

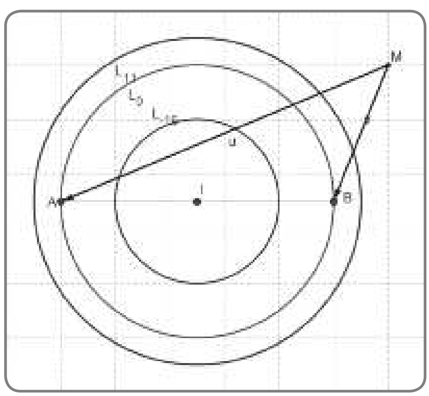
L'aire d'un triangle est égale à $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

Ici, la base [AB] étant une constante, il faut que le sommet correspondant M se trouve à une distance constante $\left(\text{égale à } \dfrac{2 \times \text{aire}}{\text{AB}}\right)$ de la droite (AB). Ce qui explique pourquoi les lignes de niveau $\mathscr{L}_k$ (avec $k > 0$) sont la réunion de deux droites parallèles à (AB), symétriques par rapport à (AB).



Partie B

❶



Lorsque k vaut 0, la condition obtenue se traduit en « les deux vecteurs sont orthogonaux » et on reconnait le cercle de diamètre [AB].

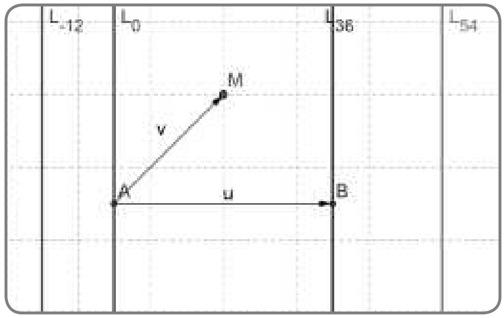
On conjecture que $\mathscr{L}_{-16}$ et $\mathscr{L}_{11}$ sont des cercles de centre I, milieu de [AB].

2 Après calculs, on obtient un résultat permettant de décrire les lignes de niveaux $\mathcal{L}_k$:

$\text{MI}^2 = k + \dfrac{\text{AB}^2}{4}$ ce qui donne ici $\text{MI}^2 = k + \dfrac{10^2}{4}$ soit $\text{MI}^2 = k + 25$.

- Si $k < -25$, $\mathcal{L}_k$ est l'ensemble vide.
- Si $k = -25$, $\mathcal{L}_k$ est réduit à un unique point : I le milieu de [AB].
- Si $k > -25$, $\mathcal{L}_k$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+25}$.

Partie C



Lorsque k vaut 0, la condition obtenue se traduit en « les deux vecteurs sont orthogonaux » et on reconnait la droite passant par A orthogonale à $\vec{u}$.

$\mathcal{L}_{-12}$, $\mathcal{L}_{36}$ et $\mathcal{L}_{54}$ semblent être des droites orthogonales à $\vec{u}$.

Dans un repère orthonormé $\left(\text{A} ; \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{j}\right)$ où M a pour coordonnées $(x ; y)$ et $\vec{u}$ pour coordonnées $(\|\vec{u}\| ; 0)$, la condition $\overrightarrow{\text{AM}}.\vec{u} = k$ devient : $x \times \|\vec{u}\| + y \times 0 = k$ ou $x = \dfrac{k}{\|\vec{u}\|}$ donc x = constante.

Les lignes de niveau $\mathcal{L}_k$ sont des droites orthogonales à l'axe des abscisses (ici, dirigé par $\vec{u}$) d'équation $x = \dfrac{k}{\|\vec{u}\|}$.

Algorithmique 1 — Test sur l'orthogonalité de deux vecteurs

1 La notation « ' » pose problème car, dans le langage Python, on écrit les chaînes de caractères entre deux symboles « ' ».
On a donc choisi de noter le couple $(x ; y)$ par (x1 ; y1) et le couple $(x' ; y')$ par (x2 ; y2).

2 Les deux erreurs qui se sont glissées dans l'algorithme de Louise écrit en Python sont :
ps = x1*x2 – y1*y2 doit être remplacé par ps = x1*x2 + y1*y2
if ps = 0 : doit être remplacé par if ps==0 :
(faire la différence entre = qui affecte une valeur et == qui vérifie une égalité)

3 Pour donner la norme des deux vecteurs, l'algorithme doit s'écrire :

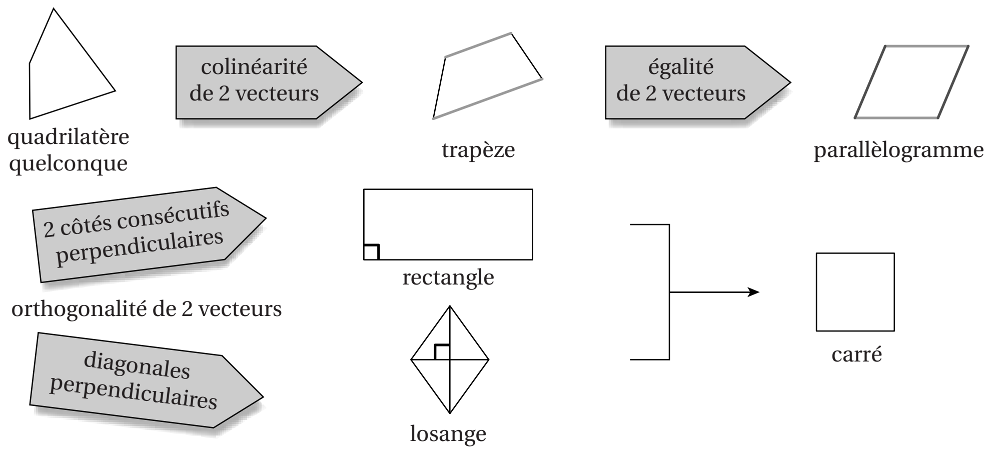
```
def ortho(x1,y1,x2,y2):
    ps=x1*x2+y1*y2
    if ps==0:
        print 'oui'
    else:
        print 'non'
    norme1=(x1**2+y1**2)**0.5
    norme2=(x2**2+y2**2)**0.5
    print 'La norme du premier vecteur est ',norme1
    print 'La norme du deuxième vecteur est ',norme2
```

Algorithmique 2 — Donner une équation cartésienne de droite connaissant un point et un vecteur normal

Entrée :	Afficher « Le point A a pour abscisse : » Demander x_A Afficher « Le point A a pour ordonnée : » Demander y_A Afficher « Le vecteur $\vec{n}$ a pour abscisse : » Demander x_n Afficher « Le vecteur $\vec{n}$ a pour ordonnée : » Demander y_n
Traitement :	Affecter à la variable **a** la valeur x_n Affecter à la variable **b** la valeur y_n Affecter à la variable **c** la valeur -**a***x_A-**b***y_A
Sortie :	Afficher « une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est : »,a, « *x + »,b, « *y + »,c, « = 0 »

Algorithmique 3 — Test sur la nature d'un quadrilatère

1 L'image sur le CD peut être projetée aux élèves.



Les propriétés traduisibles vectoriellement qui caractérisent chaque niveau :
- test analytique de colinéarité de deux vecteurs : $xy' - x'y = 0$;
- égalité de deux vecteurs par l'égalité de leurs coordonnées : $x = x'$ et $y = y'$;
- orthogonalité de deux vecteurs grâce à l'expression analytique du produit scalaire : $xx' + yy' = 0$.

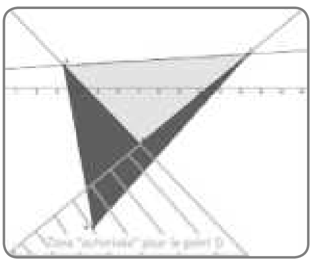
2 Lors de l'initialisation, on introduit dans les listes X et Y les abscisses et les ordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ aura pour coordonnées (X(1) ; Y(1)), …, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ aura pour coordonnées (X(6) ; Y(6)).
Les variables C1, C2, O1 et O2 servent à déterminer.
C1 est le test analytique de colinéarité des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
C2 est le test analytique de colinéarité des deux vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.
O1 est l'expression analytique du produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
O2 est l'expression analytique du produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
Si C1 (respectivement C2) vaut 0, les deux vecteurs sont colinéaires.
Si O1 (respectivement O2) vaut 0, les deux vecteurs sont orthogonaux.

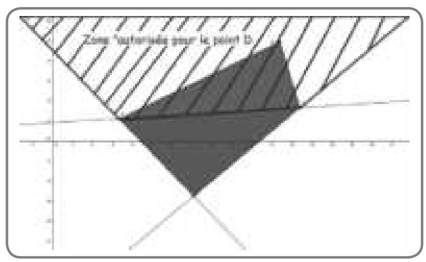
3 ***Pour éviter le cas où le quadrilatère est aplati***

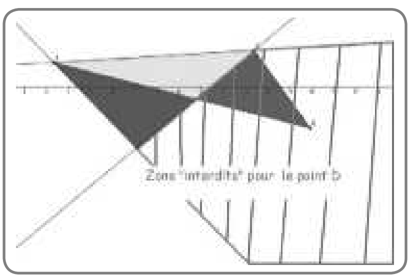
Faire un test vérifiant que C n'est pas aligné avec A et B,
et un test vérifiant que D n'est ni sur (AB), ni sur (BC) :

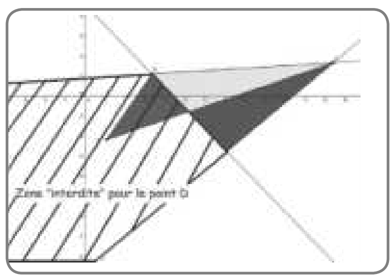
```
Affecter à la variable C00 la valeur X(1)*Y(2) - X(2)*Y(1) {test colinéarité de AB
                                                               et AC }
Affecter à la variable C01 la valeur X(1)*Y(3) - X(3)*Y(1) {test colinéarité de AB
                                                               et AD }
Affecter à la variable C02 la valeur X(4)*Y(5) - X(5)*Y(4) {test colinéarité de BC
                                                               et BD }
Affecter à la variable C1 … C2 … 01 … 02 …
Si C00 = 0 ou C01 = 0 ou C02 = 0
alors afficher « ABCD n'est pas un quadrilatère »
sinon Si C1= C2= 01= 02= 0
      alors …
```

Pour le cas où le quadrilatère est croisé : le fichier sur *GeoGebra* inséré dans le CD permet de montrer les deux zones du plan qui correspondent à ABCD quadrilatère croisé (déplacer le point D à l'aide du curseur dans les sept différentes zones délimitées par les droites (AB), (BC) et (CD)). Expliquer alors aux élèves comment réinvestir la notion d'équations cartésiennes de droites et former les systèmes d'inéquations adaptés caractérisant les deux zones « interdites » pour le point D.







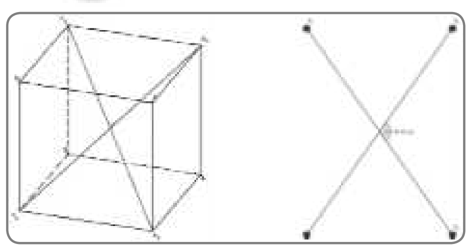


Problème ouvert 1 Six barres de bois rond

Pour une correction avec les élèves, les fichiers fournis sur le CD permettent de montrer comment on conjecture la valeur de α.

Dans un repère orthonormé, à l'aide des coordonnées des points B_i, on évalue le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{B_1B_3}$ et $\overrightarrow{B_2B_4}$ avec l'expression analytique et l'expression trigonométrique.

On trouve : $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$, soit une mesure environ égale à 71° au degré près.



Problème ouvert 2 Les tentures indiennes de Pondichéry

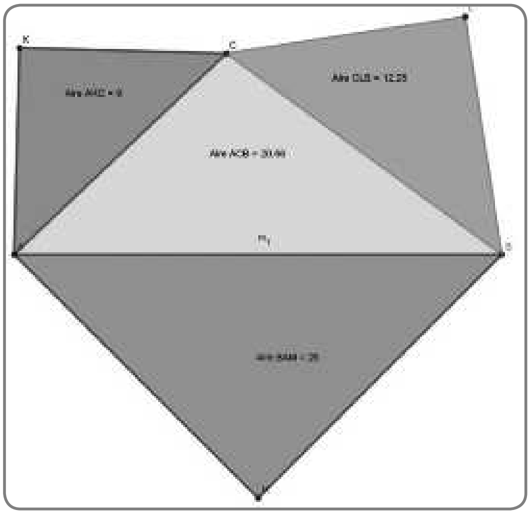
Les triangles rectangles dont les aires sont égales à 9 cm^2, 12,25 cm^2 et 25 cm^2 imposent au triangle ABC d'avoir AB = 10, BC = 7 et AC = 6.

La hauteur issue de C mesure $6 \times \sin(\widehat{ACB})$.

L'aire $S = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 6 \times \sin(\widehat{ACB})$.

Grâce à la relation de Pythagore généralisée, on a :

$7^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos(\widehat{ACB})$



Donc $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{87}{120}$

et $\sin(\widehat{ACB}) = \sqrt{1-\cos^2(\widehat{ACB})} = \sqrt{1-\left(\dfrac{87}{120}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{759}{1600}} = \dfrac{\sqrt{759}}{40}$

L'aire $S = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 6 \times \dfrac{\sqrt{759}}{40} = \dfrac{3\sqrt{759}}{4}$, soit environ 20,66 cm^2.

Corrigés des exercices et problèmes

QCM Pour bien commencer

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 346.

Exercices d'application

1 $\vec{u}.\vec{v}$ est un réel !
Expression correcte : $(\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$
(Note : $\vec{u}(\vec{v}.\vec{w})$ a aussi un sens si on applique ensuite la convention d'écriture $k\vec{u}$ où k est un réel).

2 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = -6$.

b. $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{3}$.

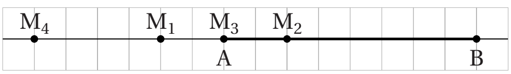
c. $\vec{u}.\vec{v} = 1$.

d. $\vec{u}.\vec{v} = -12$.

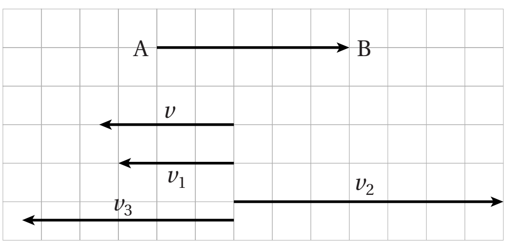
3 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

4 **1.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -64$ si A est le milieu de [BM].
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 128$ si B est le milieu de [AM].

2.



5 **1.** et **2.**



3. Manipulation avec le logiciel.

6 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
b. $\vec{u}.\vec{w} = -4{,}5$.
c. $\vec{u}.\vec{k} = -3$.
d. $\vec{v}.\vec{w} = 3$.
e. $\vec{k}.\vec{w} = 0$.
f. $\vec{k}.\vec{v} = -2$.

7 **a.** $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE} = 8$.

b. $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CB} = 0$.

c. $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FA} = 21$.

d. $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BF} = -6$.

e. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{FC} = -16$.

f. $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CB} = -8\sqrt{3}$.

8 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

9 Soit I le milieu de [EG]. I est le projeté sur [EG] de tout point M de (HF).

$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EM} = EG \times EI = \dfrac{1}{2}\ EG^2$.

Par Pythagore dans le triangle rectangle EIH, on trouve : $EI = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times l$

soit $EG = \sqrt{3} \times l$

D'où : $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EM} = \dfrac{1}{2}\ EG^2 = \dfrac{3l^2}{2}$.

Enfin : $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GE}.\overrightarrow{GM} = GE \times GI$
$= EG \times EI = \overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EM}$.

10 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = 5$.

b. $\vec{u}.\vec{v} = -3$.

11 **a.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\dfrac{25}{2}$

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 16$

c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)r^2$

soit environ $-0{,}8r^2$.

12 **a.** Pour tout x réel, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
La double inégalité obtenue grâce à l'expression trigonométrique du produit scalaire peut s'écrire au moyen de la valeur absolue : $|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
b. On a égalité lorsque les vecteurs sont colinéaires.

13 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
b. $\vec{u}.\vec{v} = 1$.
c. $\vec{u}.\vec{v} = -21$.

14 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = -2$.
b. $\vec{u}.\vec{w} = -2$.

c. $\vec{v}.\vec{w} = \dfrac{3}{2}$.

15 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 32$.
$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{DA} = 30$.

16 **a.** $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\ (25 + 9 - 36) = -1$.

b. $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\ (16 - 9 - 4) = \dfrac{3}{2}$.

17 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

18 $\dfrac{-14\pi}{3}$ a pour mesure principale $\dfrac{-2\pi}{3}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)$

$-50 = AB^2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

Donc $AB^2 = 100$ soit $AB = 10$.

19 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

20 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(36 + 9 - 49) = -2$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}(9 - 36 - 49) = -38$.

On trouve $y_G = 2$ donc G(0 ; 2) .

21 **a.** L'erreur classique est que le repère n'est pas orthonormé !

b. $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$

$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i}+y\vec{j}).\,(x'\vec{i}+y'\vec{j})$

$= xx'\,\vec{i}.\vec{i} + xy'\,\vec{i}.\vec{j} + yx'\,\vec{j}.\vec{i} + yy'\,\vec{j}.\vec{j}$

Or : $\vec{i}.\vec{i} = 9$ et $\vec{j}.\vec{j} = 4$

et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 3 \times 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3$

D'où : $\vec{u}.\vec{v} = 9xx' + 3(xy'+yx') + 4yy'$.

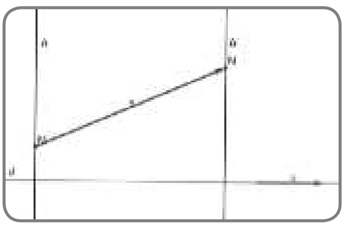
22 **a.** L'erreur classique est de projeter sur une 3^{e} direction !

b. Dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ où $\overrightarrow{AC}(a\,;b)$ et $\overrightarrow{DB}(a\,;-b)$, on obtient :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = a^2 - b^2$.

23

On constate que $\vec{u}.\vec{v}$ est constant quelque soient les points M de Δ et N de Δ'.



Ce qui est normal puisque le vecteur $\overrightarrow{MN}$ se projette sur le même vecteur quelque soient les points M de Δ et N de Δ'.

24

a. Un algorithme en langage naturel :

```
Demander les coordonnées de A(xA ; yA),
B(xB ; yB) et C(xC ; yC).
Si (xB-xA)*(yC-yA)-(xC-xA)*(yB-yA) = 0
alors afficher « le triangle ABC est
      aplati »
sinon si AB = AC = BC
      alors afficher « le triangle ABC est
      équilatéral »
      sinon si (AB = AC) ou (AC = CB)
               ou (AB = BC)
            alors afficher « le triangle
            ABC est isocèle »
Si AB.AC = 0 ou AC.BC = 0 ou AB.BC = 0
alors afficher « le triangle ABC est
      rectangle »
```

b. Comme les logiciels et les calculatrices ne font pas de calcul formel, ils font les tests d'égalité sur des valeurs approchées (faire prendre conscience aux élèves des limites de leurs calculatrices).

L'algorithme de la question **a.** par exemple en langage Python :

```
def triangle(xa, ya, xb, yb, xc, yc):
x1= float(xc-xa)
y1= float(yc-ya)
x2= float(xb-xa)
y2= float(yb-ya)
x3= float(xc-xb)
y3= float(yc-yb)
if x2*y1-x1*y2==0:
   print 'Le triangle ABC est aplati'
else:
   if round(x1**2+y1**2,11)
      == round(x2**2+y2**2,11) and
      round(x2**2+y2**2,11)
      == round(x3**2+y3**2,11):
      print 'Le triangle ABC est équilatéral'
   else:
   if round(x1**2+y1**2,11)
      == round(x2**2+y2**2,11) :
      print 'Le triangle ABC est isocèle
      en A'
   if round(x1**2+y1**2,11)
      == round(x3**2+y3**2,11) :
      print 'Le triangle ABC est isocèle
      en C'
   if round(x2**2+y2**2,11)
      == round(x3**2+y3**2,11) :
      print 'Le triangle ABC est isocèle
      en B'
   if round(x1*x2+y1*y2,11)== 0 :
      print 'Le triangle ABC est rectangle
      en A'
   if round(x1*x3+y1*y3,11)== 0 :
      print 'Le triangle ABC est rectangle
      en C'
   if round(x3*x2+y3*y2,11)== 0 :
      print 'Le triangle ABC est rectangle
      en B'
```

Sur calculatrices

CASIO

```
======TRIANGLE=======
"Abscisse de A"?→X↵
"Ordonnée de A"?→Y↵
"Abscisse de B"?→S↵
"Ordonnée de B"?→T↵
"Abscisse de C"?→U↵
"Ordonnée de C"?→V↵
If (S-X)×(V-Y)=(U-X)×
(T-Y)↵
Then ↵
"Triangle aplati"↵
Goto 1↵
IfEnd↵
ClrText↵
(S-X)²+(T-Y)²→D↵
(U-X)²+(V-Y)²→E↵
(U-S)²+(V-T)²→F↵
If D=E And D=F↵
Then ↵
"Triangle équilatéral
"↵
Goto 1↵
IfEnd↵
If D=E↵
Then ↵
"Triangle isocèle en
A"↵
Goto R↵
IfEnd↵
If E=F↵
Then ↵
"Triangle isocèle en
C"↵
Goto R↵
IfEnd↵
If D=F↵
Then ↵
"Triangle isocèle en
B"↵
Goto R↵
IfEnd↵
Lbl R↵
If (U-X)×(S-X)=-(V-Y)
×(T-Y)↵
Then ↵
"Triangle rectangle
en A"↵
Goto 1↵
IfEnd↵
If (U-X)×(U-S)=-(V-Y)
×(V-T)↵
Then ↵
"Triangle rectangle
en C"↵
Goto 1↵
IfEnd↵
If (U-S)×(S-X)=-(V-T)
×(T-Y)↵
Then ↵
"Triangle rectangle
en B"↵
Goto 1↵
IfEnd↵
Lbl 1↵
"Fin"
```

TI

```
PROGRAM:TRIANGLE
:Input "ABSCISSE
DE A ",X
:Input "ORDONNEE
DE A ",Y
:Input "ABSCISSE
DE B ",S
:Input "ORDONNEE
DE B ",T
:Input "ABSCISSE
DE C ",U
:Input "ORDONNEE
DE C ",V
:If (S-X)*(V-Y)=
(U-X)*(T-Y)
:Then
:Disp "TRIANGLE"
:Disp " APLATI"
:Goto 1
:End
:(S-X)²+(T-Y)²→D
:(U-X)²+(V-Y)²→E
:(U-S)²+(V-T)²→F
:If D=E et D=F
:Then
:Disp "TRIANGLE"
:Disp "EQUILATER
AL"
:Goto 1
:End
:If D=E
:Then
:Disp "TRIANGLE"
:Disp "ISOCELE E
N A"
:Goto 2
:End
:If E=F
:Then
:Disp "TRIANGLE"
:Disp "ISOCELE E
N C"
:Goto 2
:End
:If D=F
:Then
:Disp "TRIANGLE"
:Disp "ISOCELE E
N B"
:Goto 2
:End
:Lbl 2
:If (U-X)*(S-X)=
-(V-Y)*(T-Y)
:Then
:Disp "TRIANGLE"
:Disp "RECTANGLE
EN A"
:Goto 1
:End
:If (U-X)*(U-S)=
-(V-Y)*(V-T)
:Then
:Disp "TRIANGLE"
:Disp "RECTANGLE
EN C"
:Goto 1
:End
:If (U-S)*(S-X)=
-(V-T)*(T-Y)
:Then
:Disp "TRIANGLE"
:Disp "RECTANGLE
EN B"
:Goto 1
:End
:Lbl 1
:End
```

25 **a.** Faux car $(2\vec{u}).(3\vec{v}) = 6\vec{u}.\vec{v}$.
b. Vrai.
c. Faux implique que $\vec{w}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.
d. Vrai car $9\vec{u}^2 - 25\,\vec{v}^2 = \|3\vec{u}\|^2 - \|5\vec{v}\|^2$
e. Vrai.

26 **a.** 48. **b.** N'existe pas. **c.** 318.
d. N'existe pas. **e.** $\dfrac{545}{12}$.

27 **a.** $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB} = 0$.
b. Soit H l'intersection des hauteurs issues de A et de B. On a alors : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB} = 0$ et $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB} = 0$.
Dans la relation (*), on obtient :
$0 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} + 0 = 0$ soit $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0$
qui prouve que H est sur la hauteur issue de C.
Conclusion : les trois hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.

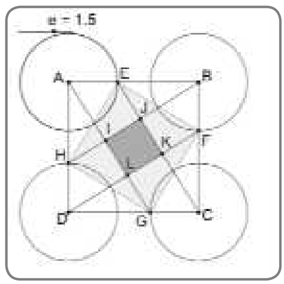
28 **a.** $AB^2 - BC^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}).\overrightarrow{AC}$
$DC^2 - AD^2 = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}).\overrightarrow{AC}$
b. $AB^2 - BC^2 + DC^2 - AD^2$
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}).\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}).\overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{AC}.((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA})$
$= \overrightarrow{AC}.(2\overrightarrow{DB}) = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

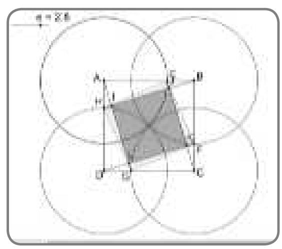
c. Les diagonales sont [AC] et [BD].
Diagonales orthogonales
$0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$ $0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$
$0 \Leftrightarrow AB^2 - BC^2 + DC^2 - AD^2 = 0$
$0 \Leftrightarrow AB^2 + DC^2 = BC^2 + AD^2$.

29 Dans le repère orthonormé $(F\,;\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG})$,
Équation de la droite (AF) : $-3\,x + y = 0$
Équation de la droite (BG) : $-2\,x + 3\,y - 3 = 0$
Leur point I d'intersection a pour coordonnées :
$\left(\dfrac{3}{7}\,;\dfrac{9}{7}\right)$.
$\overrightarrow{AG}(-1\,;-2)$ et $\overrightarrow{ID}\left(\dfrac{4}{7}\,;-\dfrac{2}{7}\right)$.
Avec l'expression analytique du produit scalaire, on a : $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ID} = 0$.
Donc les droites (AG) et (ID) sont orthogonales.

30

1. On peut conjecturer que les quadrilatères EFGH et IJKL sont des carrés.



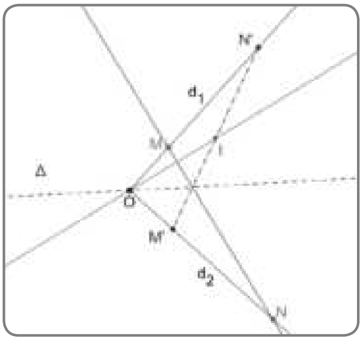


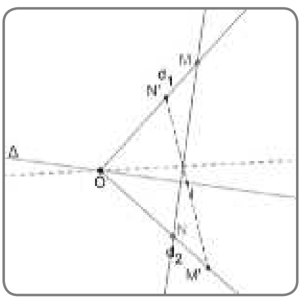
2. Démonstration pour EFGH.
a. Montrer que :
$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH} = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}).(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AH})$
$= -EB \times EA + 0 + BF \times AH + 0 = 0$
car : $EA = BF = e$ et $EB = AH = a - e$.
b. EFGH est un losange car EF= FG= GH= EH (triangles superposables par construction). Il possède de plus un angle droit : EFGH est un carré.

3. Démonstration pour IJKL :
a. Repère orthonormé $(D\,;\vec{i}, \vec{j})$:
$\overrightarrow{AG}(a - e\,;-a)$ et $\overrightarrow{HB}(a\,;a - e)$
Avec l'expression analytique du produit scalaire, on a : $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{HB} = 0$.

b. $\overrightarrow{AE}$ se projette sur $\overrightarrow{IJ}$ (direction $\overrightarrow{HB}$) et $\overrightarrow{HB}$ se projette sur $\overrightarrow{AB}$ (direction $\overrightarrow{AB}$).
On a : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HB}$.
Donc : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}$.
Exprimer alors IJ :
$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}$ ou encore $IJ \times HB = AE \times AB$
donc $IJ = \dfrac{ae}{HB}$.
Par Pythagore : $HB^2 = 2a^2 + e^2 - 2ae$.
Conclusion : $IJ = \dfrac{ae}{\sqrt{2a^2 + e^2 - 2ae}}$
c. Par le même procédé, on montre que :
IJ = JK = KL = IL : IJKL est un losange. Il possède de plus un angle droit : IJKL est un carré.

31
1.





On peut conjecturer que les droites (OI) et (MN) sont perpendiculaires.
2. Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$:
$\overrightarrow{OI}\left(\dfrac{m}{2} ; \dfrac{n}{2}\right)$ et $\overrightarrow{MN}(n ; -m)$
Avec l'expression analytique du produit scalaire, on a : $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{MN} = 0$.
On en déduit que les droites (OI) et (MN) sont perpendiculaires.

32 **a.** $\overrightarrow{MF}.\overrightarrow{MG} = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF}).(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EG})$
$$= ME^2 + \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EH} + \frac{a^2}{2}$$
$$= \frac{a^2}{2} + EM^2 - \overrightarrow{EM}.\overrightarrow{EH}.$$

b. M point de $\Phi \Leftrightarrow \overrightarrow{MF}.\overrightarrow{MG} = \dfrac{a^2}{2} + EM^2$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{EM}.\overrightarrow{EH} = 0$
$\Leftrightarrow \Phi$ est la droite passant par E et perpendiculaire à (EH).

33 $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé :
$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$ et $\vec{i}.\vec{i} = 1$.
$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ donc $\vec{u}.\vec{i} = (a\vec{i} + b\vec{j}).\vec{i}$
$= a\vec{i}.\vec{i} + b.\,\vec{j}.\vec{i} = a + 0 = a$.
De même pour $\vec{u}.\vec{j} = b$.

34 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

35 **1.** ***Méthode utilisant Chasles***
a. $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})$
$= -b^2 + 0 + 0 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2} - b^2$.
b. $AI = \sqrt{b^2 + \dfrac{a^2}{4}}$ et $DB = \sqrt{a^2 + b^2}$
c. $\cos(\alpha) = \dfrac{\dfrac{a^2}{2} - b^2}{\sqrt{b^2 + \dfrac{a^2}{4}}\sqrt{a^2 + b^2}}$
d. Dans le cas particulier où $a = 4$ et $b = 1$, $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{85}}$ et une valeur approchée de l'angle $\widehat{IEB}$ au degré près est 84°.
2. ***Méthode utilisant un repère orthonormé***
a. Dans le repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{a}$ et $\vec{j} = \dfrac{\overrightarrow{AD}}{b}$, les coordonnées sont :
$A(0 ; 0)$, $B(a ; 0)$, $D(0 ; b)$ et $I\left(\dfrac{a}{2} ; b\right)$, $\overrightarrow{AI}\left(\dfrac{a}{2} ; b\right)$
et $\overrightarrow{DB}(a ; -b)$.
b. $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DB} = \dfrac{a^2}{2} - b^2$.
c. La norme du vecteur $\overrightarrow{AI}$: $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{DB}$: $\sqrt{a^2 + b^2}$.
$\cos(\alpha) = \dfrac{a^2 - 2b^2}{\sqrt{4b^2 + a^2}\sqrt{a^2 + b^2}}$
d. Dans le cas particulier où $a = 3\sqrt{2}$ et $b = 3$, $\cos(\alpha) = 0$ donc l'angle $\widehat{IEB}$ est droit.

36 **a.** ***Théorème de Pythagore généralisé***
$JK^2 = IJ^2 + IK^2 - 2\, IJ \times IK \times \cos\hat{I}$ d'où
$\cos\hat{I} = \dfrac{53}{80}$ et $\hat{I}$ mesure environ 48,5°.
$IK^2 = IJ^2 + JK^2 - 2\, IJ \times JK \times \cos\hat{J}$ d'où $\cos\hat{J} = \dfrac{25}{32}$
et $\hat{J}$ mesure environ 38,6°.
$JI^2 = KJ^2 + IK^2 - 2\, KJ \times IK \times \cos\hat{K}$
d'où $\cos\hat{K} = -\dfrac{1}{20}$ et $\hat{K}$ mesure environ 92,9°.

b. $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = IJ \times IK \times \cos\widehat{I} = 106$

Or : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = IJ \times IH$, où H est le projeté de K sur (IJ)

donc : $IH = \dfrac{106}{16} = \dfrac{53}{8}$.

Et finalement Pythagore dans IHK donne :

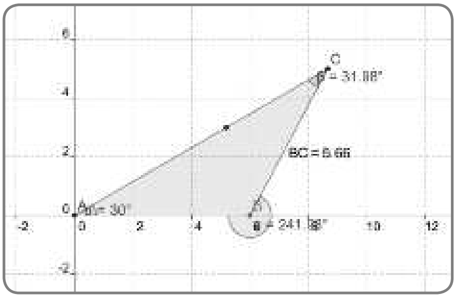
$KH = \dfrac{3\sqrt{399}}{8}$.

37 **a.** Avec le théorème de Pythagore généralisé, on obtient : $BC = \sqrt{136 - 60\sqrt{3}}$

b. Avec le théorème de Pythagore généralisé,

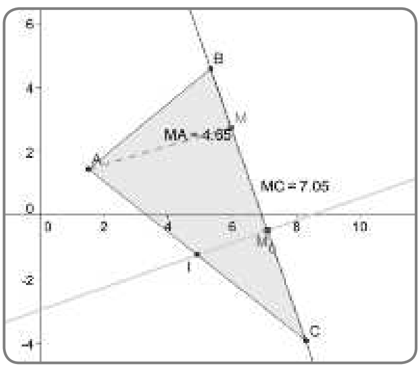
$\cos\widehat{C} = \dfrac{10 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{136 - 60\sqrt{3}}}$ soit une mesure de l'angle $\widehat{C}$ d'environ 31,98°.

Finalement l'angle $\widehat{B}$ vaut environ 118,02°.



38

1. a.



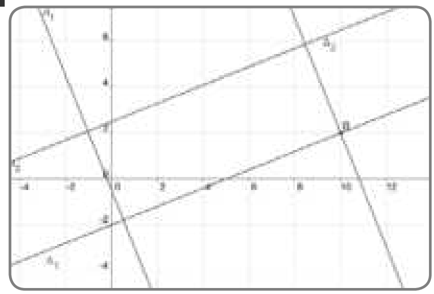
2. a. ***Théorème de la médiane***

$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \dfrac{AC^2}{2}$. Donc minimiser le nombre $MA^2 + MC^2$ revient à minimiser $2MI^2 + \dfrac{AC^2}{2}$, soit MI (puisque AC est constant). La distance minimale de I à la droite (BC) est la distance IM_0 où M_0 est le projeté orthogonal de I sur (BC).

b. Une construction géométrique du candidat : tracer la perpendiculaire à (BC) passant par I. Son intersection avec (BC) donne la position de M qui minimise $MA^2 + MC^2$.

39 Une équation cartésienne de la droite d :
$-3x + 4y + 8{,}5 = 0$.

40



a. Une équation cartésienne de la droite Δ_1 :

$$-2x + 5y + 10 = 0.$$

b. Une équation cartésienne de la droite Δ_2 :
$4x - 10\,y + 25 = 0$

c. Les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires :
$\vec{n}_1\ (5\ ;\ 2)$ et $\vec{n}_2\ (4\ ;\ -10)$ sont orthogonaux car $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$.

Les droites d_1 et Δ_2 sont parallèles car toutes les deux perpendiculaires à d_2.

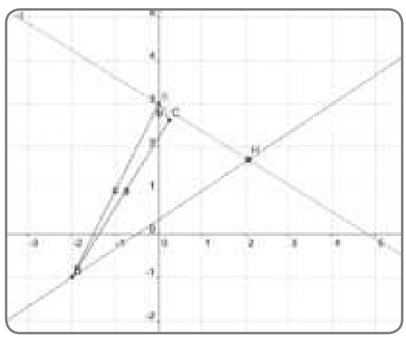
41 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

42 **a.** Une équation cartésienne de la médiatrice de [AB] : $-3\,x + y - 2 = 0$.

b. Une équation cartésienne de la hauteur issue B :
$x - 2y + 9 = 0$.

c. Une équation cartésienne de la tangente en C au cercle de diamètre [BC] : $x - y - 5 = 0$.

43



a. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ car (AH) est perpendiculaire à (BC) (la hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC) et H lui appartient).

b. Une égalité similaire : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Avec l'expression analytique du produit scalaire, on obtient un système permettant de déterminer les coordonnées $(x_H\,;\,y_H)$ de H : $18x + 29y - 87 = 0$ et $2x - 3y + 1 = 0$.

c. Les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{29}{14}\ ;\ \dfrac{12}{7}\right)$.

44

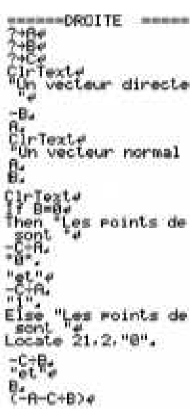
a. Un algorithme en langage naturel :

```
Demander les valeurs de a, b et c
Afficher « un vecteur directeur est
(», -b, « ; » , a, «). »
Afficher « un vecteur normal est
(», a, « ; » , b, «). »
Si b non nul
alors afficher « Les points de d sont
(0 ; », -c/b, « )
et (», b,  « ; », -a - c/b, « ). »
sinon afficher « Les points de d sont
( », -c/a, « ; 0)
et (», -c/a ,  « ; 1 ). »
```

b. Par exemple en langage Python :

```
def droite(a,b,c):
    print 'Un vecteur directeur de d a pour
            coordonnées : (', -b, ' ; ', a, ').'
    print 'Un vecteur normal de d a pour
            coordonnées : (', a, ' ; ', b, ').'
    if b==0:
    print 'Deux points de d ont pour
           coordonnées :
           (', -c/a, ' ; 0) et (', -c/a, ' ; 1).'
    else:
    print 'Deux points de d ont pour
           coordonnées :
            (0 ; ', -c/b, ') et (', b, ' ; ',
           -a-c/b, ').'
```

Sur calculatrices CASIO et TI :

<table>
<tr><th colspan="2">Sur calculatrices</th></tr>
<tr><th>CASIO</th><th>TI</th></tr>
<tr><td>
======DROITE =====
?→A↵
?→B↵
?→C↵
ClrText↵
"Un vecteur directe
"↵
-B◢
A◢
ClrText↵
"Un vecteur normal
A◢
B◢
ClrText↵
If B=0↵
Then "Les points de
sont "↵
-C÷A◢
"0"◢
"et"↵
-C÷A◢
"1"◢
Else "Les points de
sont "↵
Locate 21,2,"0"◢
-C÷B◢
"et"↵
B◢
(-A-C÷B)↵</td><td>
PROGRAM:DROITE
:Prompt A,B,C
:EffEcr
:Disp "VECTEUR N
ORMAL ",A,B
:Pause
:Disp "VECTEUR D
IRECTEUR ",-B,A
:Pause
:If B=0
:Then
:Disp "COORDONNE
E 1",-C/A,"0"
:Pause
:Disp "COORDONNE
E 2",-C/A,"1"
:Pause
:Else
:Disp "COORDONNE
E 1","0",-C/B
:Pause
:Disp "COORDONNE
E 2",B,(-A-C/B)
:End</td></tr>
</table>

45 **a.** $\mathscr{C}_1 : (x-2)^2+(y-1)^2 = 9$ a pour centre $\Omega(2 ; 1)$ et pour rayon $r = 3$.

b. $\mathscr{C}_2 : (x+5)^2+(y-2)^2= \pi$ a pour centre $\Omega(-5 ; 2)$ et pour rayon $r = \sqrt{\pi}$

46 **a.** $x^2 + y^2 = 16$.

b. $(x+ 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

c. $x^2 + (y + 5)^2 = \frac{25}{3}$.

47 **a.** $x^2 + y^2 = 13$.

b. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 45$.

48 Une équation du cercle de diamètre [AB] :

$$(x - 6)^2 + (y + 1{,}5)^2 = 16{,}25.$$

Une équation du cercle de diamètre [BC] :

$$x^2 + y^2 = 5.$$

49 $\mathscr{E}_1$ a pour équation cartésienne **g.**
$\mathscr{E}_2$ a pour équation cartésienne **e.**
$\mathscr{E}_3$ a pour équation cartésienne **c.**
$\mathscr{E}_4$ a pour équation cartésienne **d.**

50 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346

51 **1. a.** $\mathscr{C}_1 : (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

b. $\mathscr{C}_2 : (x - 1)^2 + (y - 2{,}5)^2 = 9{,}25$.

c. $\mathscr{C}_3 : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 52$.

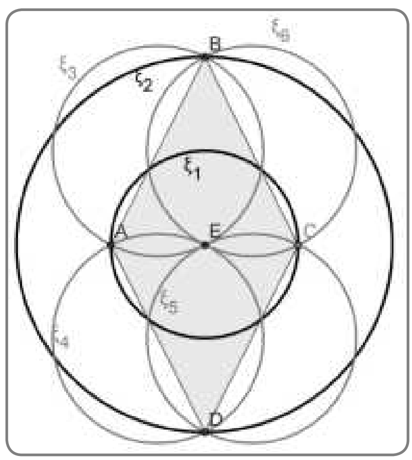
2. **a.** Les cercles $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ne sont pas sécants car BC $(= \sqrt{52}\ ) >$ BA $(= \sqrt{37}\ )$.

b. Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont sécants :

En résolvant le système $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-1)^2 + (y-2{,}5)^2 = 9{,}25 \end{cases}$

on obtient que leurs points d'intersection sont sur la droite d'équation $y = 6x - 18$.

52



1. **b.** Les deux cercles noirs sont concentriques de centre E, le milieu des diagonales car $\mathscr{C}_1$ est le cercle de diamètre [AC] et $\mathscr{C}_2$ est le cercle de diamètre [BD].

2. b. Les quatre cercles gris sont concourants en E, le milieu des diagonales.
Les diagonales sont orthogonales donc AED, AEB, BEC et ECD sont des triangles rectangles en E inscrits dans chaque cercle de diamètre les côtés du losange.

53 **a.** $\Gamma_1 : (x-1)^2 + y^2 = 4$.
Γ_1 est un cercle de centre $\Omega(1\,;0)$ et de rayon 2.
b. $\Gamma_2 : x^2 + y^2 = -10$. Γ_2 est l'ensemble vide.
c. Γ_3: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$.
Γ_3 est l'ensemble réduit à un point $I(1\,;-1)$.
d. $\Gamma_4 : x^2 + (y+1)^2 = -4$.
Γ_4 est l'ensemble vide.

54 **a.** $\Gamma_1 : (x-1)^2 + \left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2 = 12{,}25$.

Γ_1 est un cercle de centre $\Omega\left(1\,;-\dfrac{5}{2}\right)$ et de rayon $r = \dfrac{7}{2}$.

b. $\Gamma_2 : \left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(y+\dfrac{5}{14}\right)^2 = \dfrac{1759}{441}$.

Γ_2 est un cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{5}{14}\right)$ et de rayon $r = \dfrac{\sqrt{1759}}{21}$.

c. $\Gamma_3 : \left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\mathrm{y}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2-2\sqrt{2}$.

Comme $2-2\sqrt{2}$ est négatif, Γ_3 est l'ensemble vide.
d. $\Gamma_4 : (x-4)^2 + (y+3)^2 - 1 \leqslant 0$.
Γ_4 est un disque de centre $\Omega(4\,;-3)$ et de rayon $r = 1$, frontière comprise.

55 **a.** $\Gamma : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$.
Γ est un cercle de centre $\Omega(3\,;-1)$ et de rayon $r = 5$.
b. $A(0\,;-5)$ et $B(0\,;3)$.
c. Tangente à Γ en A : $3x + 4y + 20 = 0$.
Tangente à Γ en B : $-3x + 4y - 12 = 0$.

56 $2 \times \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$

Donc : $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Et $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

On obtient : $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

57 $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ que l'on développe avec la formule d'addition :

$\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1-\sqrt{3})$.

$\sin\dfrac{7\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ que l'on développe avec la formule d'addition :

$\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})$.

$\cos\dfrac{5\pi}{12} = -\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)$.

$\sin\dfrac{5\pi}{12} = \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})$.

58 **a.** Vrai (on développe avec les formules).

b. Vrai car $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x$

et $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$.

c. Faux (contre–exemple : $x = \dfrac{2\pi}{3}$)

d. Vrai (on développe avec les formules trigonométriques $\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$).

e. Vrai (on développe avec les formules $\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$).

59 **a.** Reconnaître la troisième identité remarquable dans $\cos^4 x - \sin^4 x$.
b. On développe avec les formules $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ et on reconnaît la troisième identité. On utilise que $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$ et que $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$.
c. On développe avec les formules $\cos(a+b)$ et $\sin(a-b)$. En factorisant $\cos a \sin a$ et $\cos b \sin b$, on fait apparaître :

$$\cos^2 b + \sin^2 b = 1 \text{ et } \cos^2 a + \sin^2 a = 1.$$

60 **a.** $\cos x$ et $\sin x$ doivent être non nuls.
$D = \mathbb{R} - [k\pi/2$ avec k entier relatif}.

b. $A(x) = \dfrac{\cos(3x)}{\cos(x)} - \dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)}$

$= \dfrac{\sin(x)\cos(3x) - \cos(x)\sin(3x)}{\cos(x)\sin(x)} = \dfrac{\sin(x-3x)}{\cos(x)\sin(x)}$

$= \dfrac{-\sin(2x)}{\cos(x)\sin(x)}$

$A(x) = \dfrac{-2\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)\sin(x)} = -2$.

61 **a.** $x = 0\ [\pi]$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

b. $x = 0\ [\pi]$ ou $x = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

62 **a.** $x = 0\ [2\pi]$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b. $\mathrm{x} = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Raisonnement logique

63 **a.** Faux (la connaissance de $\overrightarrow{AB}^2$ permet d'en déduire AB, $\|\overrightarrow{AB}\|$ mais pas $\overrightarrow{AB}$).
b. Faux (implique l'orthogonalité).
c. Vrai car ($\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AN}$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{NM} = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont orthogonaux).
d. Vrai (car colinéaires de même sens).
e. Vrai (grâce au « ou »).
f. Vrai (lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux).
g. Vrai ($\vec{n}(3\,;-1)$ est normal donc $\vec{m}(-3\,;1)$ est aussi normal).
h. Faux, réduit au point de coordonnées $(1\,;-2)$.

64 **a.** (Q) implique (P).
b. (Q) implique (P).
c. (P) implique (Q).
d. (P) et (Q) sont équivalentes.

Restitution des connaissances

65 **1. a.** Écrire le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ en utilisant l'expression trigonométrique puis utiliser le fait que la multiplication des réels est commutative, $\widehat{(\vec{v}, \vec{u})} = -\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ et la parité de la fonction cosinus.
b. Écrire le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ en utilisant l'expression avec les normes puis utiliser le fait que l'addition vectorielle et l'addition des réels sont commutatives.
2. Ecrire l'expression analytique du produit scalaire sur les coordonnées des vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$, $\vec{v}(x'\,;y')$, $\vec{w}(x''\,;y'')$ et $\vec{v}+\vec{w}(x'+x''\,;y'+y'')$ et utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition de R.
3. a. Écrire l'expression trigonométrique du produit scalaire $(k\vec{u}).\vec{v}$ et procéder par disjonction des cas : $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$.
On utilisera le fait que : $\|k\vec{u}\| = |k|.\|\vec{u}\|$
$\widehat{(k\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ si $k > 0$ et $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \pi$ si $k < 0$,
$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$.
b. En utilisant l'expression projetée, on fera appel au théorème de Thalès pour obtenir que le projeté de $k\vec{u}$ est $k\vec{u}'$.

66 Utiliser la distributivité sur l'addition vectorielle et la symétrie du produit scalaire.

67 Expression projetée : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'$
Or : $\vec{v}' = \cos\alpha \times \|\vec{v}\| \times \vec{i}$
$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}' = \vec{u}.(\cos\alpha \times \|\vec{v}\| \times \vec{i})$
$= \cos\alpha \times \|\vec{v}\| \times \vec{u}.\vec{i} = \cos\alpha \times \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\|$
$= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$.

68 ABC est un triangle rectangle en A
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 0$
$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

69 **a.** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même norme
$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$ (les normes sont positives)
$\Leftrightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$
$\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow \vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.
b. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ (les normes sont positives)
$\Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$
$\Leftrightarrow \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
$\Leftrightarrow 4\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
$\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.

70 **a.** (AH) et d sont perpendiculaires et $\vec{n}$ est normal à d donc $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.
$\vec{n}.\overrightarrow{AH} = \pm\|\vec{n}\|\,\|\overrightarrow{AH}\|$, donc on a bien :
$|\vec{n}.\overrightarrow{AH}| = \|\vec{n}\|\,\|\overrightarrow{AH}\|$,
b. $AH = \dfrac{|\vec{n}.\overrightarrow{AH}|}{\|\vec{n}\|}$ Or : $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Comme $\overrightarrow{AH}(x_H - x_A\,;y_H - y_A)$, on a :
$\vec{n}.\overrightarrow{AH} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A)$
$= ax_H - a\,x_A + by_H - b\,y_A$
Or H est un point de d : $ax_H + by_H + c = 0$
donc $ax_H + by_H = -c$.
Finalement : $\vec{n}.\overrightarrow{AH} = -ax_A - by_A - c$.
D'où la formule désirée.
c. La distance de A à la droite d : $\dfrac{10}{\sqrt{34}}$.

71 On admet que : (*) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
et que $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.
Écrire $\frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ à l'aide de la formule (*) et après développement tomber sur $xx' + yy'$ c'est-à-dire $\vec{u}.\vec{v}$.

Se tester sur…

QCM : Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 346.

Prêt pour le contrôle ?

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 346.

Problèmes

82 Soit I milieu de [AF]. Soit a la longueur du côté du carré ABCD.
Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$
où $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|}$ et $\vec{j} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$.

$O(0 ; 0)$, $B(a\sqrt{2} ; 0)$, $F\left(\dfrac{a}{2} ; 0\right)$, $E\left(0 ; \dfrac{a}{2}\right)$,

$A(0 ; a\sqrt{2})$, $I\left(\dfrac{a}{4} ; a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{OI}\left(\dfrac{a}{4} ; a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{EB}\left(a\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; -\dfrac{a}{2}\right)$.

Avec l'expression analytique du produit scalaire, on a : $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EB} = 0$.
On en déduit que les droites (OI) et (EB) sont perpendiculaires et donc que la médiane issue de O du triangle AFO est la hauteur issue de O du triangle EBO.

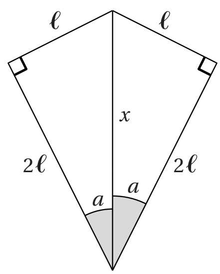
83 On a :

$\sin a = 2\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)$

$\sin a = 2 \times \dfrac{l}{x} \times \dfrac{2l}{x}$

Or : $x^2 = 5l^2$

D'où : $\sin a = \dfrac{4}{5}$.



84 **a.** Hauteur issue de A : $3x + y - 3 = 0$.
Hauteur issue de B : $5x + 2y - 11 = 0$.
b. Orthocentre $H(-5 ; 18)$.
c. Médiatrice de [AB] : $x = \dfrac{1}{2}$.
Médiatrice de [AC] : $5x + 2y + 8{,}5 = 0$.
Centre du cercle circonscrit $\Omega(0{,}5 ; -5{,}5)$.
d. $\mathscr{C} : (x - 0{,}5)^2 + (y + 5{,}5)^2 = 72{,}5$.
e. Médiane issue de A : $x - 2y + 6 = 0$.
Médiane issue de B : $x - 3{,}5y + 9{,}5 = 0$.
f. Centre de gravité $G\left(-\dfrac{4}{3} ; \dfrac{7}{3}\right)$.
g. $\overrightarrow{H\Omega}(5{,}5 ; -23{,}5)$ et $\overrightarrow{HG}\left(\dfrac{11}{3} ; -\dfrac{47}{3}\right)$. Avec le critère de colinéarité, on montre que $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{H\Omega}$ sont colinéaires donc que H, G et Ω sont alignés.

On a : $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega G}$.

85 $(\overrightarrow{AV} ; \overrightarrow{DB})$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$. (Étudier le rectangle ABCD de côté a et $a\sqrt{3}$)

86 Pythagore généralisé (avec x la longueur AC).
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\widehat{A}$

$49 = 25 + x^2 - 10x\cos\dfrac{\pi}{3}$

$x^2 - 5x - 24 = 0 \qquad \Delta = 121$

Une seule solution positive qui vaut 8.
Donc : AC = 8.
Pythagore généralisé :
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC \times \cos\widehat{B}$

$\cos\widehat{B} = \dfrac{1}{7}$. L'angle $\widehat{B}$ mesure environ 82°.

Finalement l'angle $\widehat{C}$ mesure environ 38°.

87 **a.** Configuration du parallélogramme.
b. $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$ où J milieu de [CD].
D'où $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$ et la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ est un cercle de diamètre [IJ].
c. L'ensemble $\mathscr{E}$ est réduit à un point lorsque I et J sont confondus, donc lorsque ADBC est un parallélogramme.

88 Dans la première parenthèse : $3\overrightarrow{MK}$.
Dans la deuxième parenthèse : $\overrightarrow{ML}$.
$\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que :
$(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{ML} = 0$
$\Leftrightarrow \mathscr{E}$ est le cercle de diamètre [KL].

89

a. $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2\dfrac{a}{2}x + 2\dfrac{b}{2}y + c = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - c$

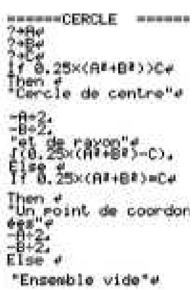
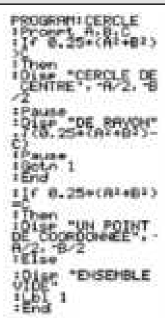
Un algorithme en langage naturel :

```
Si (a²/4) + (b²/4) – c > 0
alors afficher « L'ensemble est un cercle
      de centre de coordonnées
      (», -a/2,  « ; », -b/2, « ) et de
      rayon égal à », √(a²/4 + b²/4 – c)
sinon si (a²/4) + (b²/4) – c = 0
      alors afficher « Ensemble réduit à
      un point de coordonnées
      (», -a/2,  « ; », -b/2, « )»
      sinon afficher « L'ensemble est
      vide ».
```

b. Comme les logiciels et les calculatrices n'utilisent souvent pas le calcul formel, ils font les tests d'égalité sur des valeurs approchées (faire prendre conscience aux élèves des limites de leurs calculatrices).

L'algorithme en langage Python :

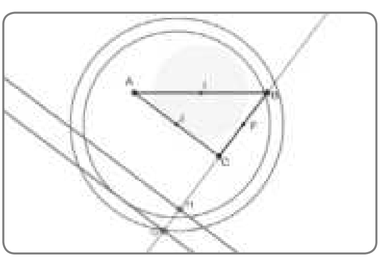
```
def cercle(a,b,c):
      if (a**2+b**2)/4 > c:
          print 'On a un cercle de centre O
          de coordonnées
          (', -a/2, ' ; ', -b/2, ') et de
          rayon ', ((a**2+b**2)/4-c)**0.5
      else:
      if (a**2+b**2)/4==c:
      print 'On a un ensemble réduit à un
      point O de coordonnées
      (', -a/2, ' ; ', -b/2, ')'
      else:
      print 'On a un ensemble vide'
```

Sur calculatrices	
CASIO	**TI**
	

```
=====CERCLE =====
?→A↵
?→B↵
?→C↵
If 0.25×(A²+B²)>C↵
Then ↵
"Cercle de centre"↵
-A÷2◢
-B÷2◢
"et de rayon"↵
√(0.25×(A²+B²)-C)◢
Else ↵
If 0.25×(A²+B²)=C↵
Then ↵
"Un point de coordonnées"↵
-A÷2◢
-B÷2◢
Else ↵
"Ensemble vide"↵
```

```
PROGRAM:CERCLE
:Prompt A,B,C
:If 0.25*(A²+B²)>C
:Then
:Disp "CERCLE DE CENTRE",-A/2,-B/2
:Pause
:Disp "DE RAYON",√(0.25*(A²+B²)-C)
:Pause
:Goto 1
:End
:If 0.25*(A²+B²)=C
:Then
:Disp "UN POINT DE COORDONNEE",-A/2,-B/2
:Else
:Disp "ENSEMBLE VIDE"
:Lbl 1
:End
```

90 **a.** I le milieu de [AB].
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} < -12{,}5 \Leftrightarrow MI^2 < 12{,}5$
Disque de centre I de rayon $\sqrt{12{,}5}$.
b. F le milieu de [BC]. $-120 < MC^2 - MB^2 < -96$
$\Leftrightarrow -120 < 2\overrightarrow{MF}.\overrightarrow{BC} < -96$
$\Leftrightarrow -60 < \overrightarrow{MF}.\overrightarrow{BC} < -48$
Bande comprise entre deux droites perpendiculaires à (BC) (FH = 8 et GF = 10).
c. J le milieu de [AC].
$130 < AM^2 + CM^2 < 160$
$\Leftrightarrow 130 < 2MJ^2 + \dfrac{AC^2}{2} < 160$
$\Leftrightarrow 130 < 2MJ^2 + 32 < 160$
$\Leftrightarrow 98 < 2MJ^2 < 128 \Leftrightarrow 7 < MJ < 8$
Anneau de centre J de rayons 7 et 8.



91 Tracer un rectangle ABCD avec AB = 2 et AD = 4.
• En rose : $40 < MB^2 - MD^2 < 60$
Bande comprise entre deux droites perpendiculaires à (DB).
• En vert : $5 < \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} < 12$
Anneau de centre I de rayon 3 et 4.
• En jaune : $-14 < \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} < -12$
Bande comprise entre deux droites perpendiculaires à (AB).

92 $A = \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) \times \cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)A = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)A = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

$$A = \frac{\frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

Or ces deux sinus sont des nombres opposés,

$$\text{donc : } A = -\frac{1}{8}.$$

93 Dans un rectangle ABCD tel que AD = a et DC = $a\sqrt{2}$. Soit I le milieu de [AB].
Dans le repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ où $\overrightarrow{AC}(a\sqrt{2} ; a)$ et $\overrightarrow{DI}\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2} ; -a\right)$.
Avec l'expression analytique du produit scalaire, on a : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DI} = 0$.
On en déduit que les droites (DI) et (AC) sont perpendiculaires.

94 Au vu de la symétrie de la construction, les triangles colorés ont des surfaces égales.
Méthode analytique : $\overrightarrow{KB}\left(\dfrac{1}{2} ; 1\right)$ et $\overrightarrow{LC}\left(1 ; -\dfrac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{LC} = 0$.
MNPO est un parallélogramme (car $\overrightarrow{DI}\left(\dfrac{1}{2} ; 1\right)$ et $\overrightarrow{KB}\left(\dfrac{1}{2} ; 1\right)$) qui possède un angle droit (car $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{LC} = 0$) et des côtés consécutifs égaux (par symétrie MP = MN), donc MNPO est un carré.

$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{NO}.\overrightarrow{BK}$

$1 \times \dfrac{1}{2} = a \times BK$

Comme $BK = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$, on trouve que :

$a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

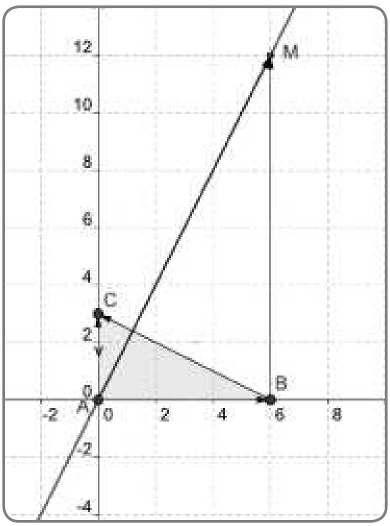
D'où : $a^2 = \dfrac{1}{5}$ ce qui représente $\dfrac{1}{5}$ du carré de départ.

Il reste $\dfrac{4}{5}$ à partager en 4 parts égales donc $\dfrac{1}{5}$ pour chaque triangle.

Conclusion : les contraintes « parcelle carrée » et « cinq parcelles de surfaces équivalentes » sont respectées.

95 **1. a. b. c.**

Le point M semble décrire une droite pour obtenir l'égalité entre les réels PS1 et PS2.



d. $PS1 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = bx$ et $PS2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = cy$

$PS1 = PS2 \Leftrightarrow bx = cy \Leftrightarrow y = \dfrac{b}{c}x$ (c non nul car triangle non aplati)

L'ensemble $\mathscr{E}$ est une droite passant par l'origine et d'équation : $y = \dfrac{b}{c}x$.

e. On conjecture que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

2. Si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BM}$:

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}.(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$

$= \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}$

$= \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} = 0$

(car ABC rectangle en A).

96 **a.** Vrai. **b.** Vrai. **c.** Vrai. **d.** Faux.

97 **a.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.

b. $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}).\overrightarrow{BD}$

$= -\dfrac{BD}{2} \times BD + \dfrac{BD}{2} \times BD + 0 = 0$.

c. $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}).\overrightarrow{BE}$

$= -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$

$= -BA^2 + 0 + EA^2 = -1 + 1 = 0$

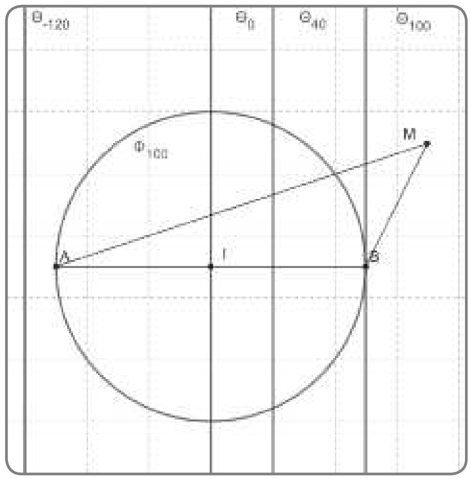
Donc (AG) et (BE) sont orthogonales.

d. (BE) et (BD) sont sécantes en B et appartiennent au plan (BED). La droite (AG) est orthogonale à chacune d'elles donc (AG) est orthogonale au plan (BDE).

98

Partie A

1.



2. a. Lorsque m vaut 0, la condition (**) : $b^2 = c^2$ et l'ensemble de points Θ_0 est la médiatrice de [AB].

b. Θ_{-120}, Θ_{40} et Θ_{100} sont des droites perpendiculaires à la droite (AB).

3. a. $k = 100$. Φ_{100} semble être le cercle de diamètre [AB].

b. Si M est en I milieu de [AB], $k = 50$ et Φ_{50} semble être réduit au point I.

c. Lorsque k vaut 0, la condition (*) se traduit par : $b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = 0$.

Donc AM = 0 et BM = 0, du coup l'ensemble de points est l'ensemble vide.

Partie B

1. a. b. La condition (*) $MA^2 + MB^2 = k$ en transformant les carrés de longueur en carrés scalaire et en introduisant le point I milieu de [AB] par Chasles dans chacun des vecteurs, on obtient :

$MI^2 = \dfrac{k}{2} - \dfrac{AB^2}{4}$.

Si $k > \dfrac{AB^2}{2}$ alors Φ_k est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\dfrac{k}{2} - \dfrac{AB^2}{4}}$.

Si $k = \dfrac{AB^2}{2}$ alors Φ_k est réduit au point I.

Si $k < \dfrac{AB^2}{2}$ alors Φ_k est l'ensemble vide.

2. a. $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$
$= 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

b. Dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \vec{j}\right)$ où $\vec{j}$ a pour norme 1 et $\vec{j}.\overrightarrow{AB} = 0$.
$\overrightarrow{AB}(10\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{IM}(x-5\ ;\ y)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = \dfrac{m}{2} = 10(x-5)$

Donc : $x = \dfrac{m}{20} + 5$ ce qui est l'équation d'une droite perpendiculaire à (AB).

99 **a.** Soit I le milieu de [EF].
$f(M) = ME^2 + \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{MG}$
$f(M) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IE})^2 + \overrightarrow{EF}.(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG})$
$f(M) = MI^2 + 16 + \overrightarrow{MI}.\vec{0} + \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{IG}$
$f(M) = MI^2 + 16 + EF \times IE = MI^2 + 16 - 32$
$f(M) = MI^2 - 16$
b. $f(M) = k \Leftrightarrow MI^2 - 16 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + 16$
En fonction du réel k, la nature de $\mathscr{E}_k$:
- si $k < -16$ alors $\mathscr{E}_k$ est l'ensemble vide.
- si $k = -16$ alors $\mathscr{E}_k$ est réduit au point I.
- si $k > -16$ alors $\mathscr{E}_k$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+16}$.

$\mathscr{E}_0$ est le cercle de centre I et de rayon 4,
$\mathscr{E}_{16}$ est le cercle de centre I et de rayon $4\sqrt{2}$,
et $\mathscr{E}_9$ est le cercle de centre I et de rayon 5.

100 ***Traduction de l'énoncé***

La zone éclairée

Le rectangle OABC ci-dessous représente la scène d'un théâtre qui est vue d'au-dessus. Les dimensions de la scène sont OA = 15 mètres et OC = 10 mètres. Au point O, on a placé un projecteur en vue d'éclairer la zone délimitée par les segments [OI] et [OJ] où I est le milieu de [AB] et J celui de [BC].

a. Donner, sans justification, les coordonnées des points I et J.

b. Montrer, en donnant les détails des calculs, que le produit scalaire $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ}$ est égal à 162,5.

c. Calculer les normes de $\overrightarrow{OI}$ et de $\overrightarrow{OJ}$.

d. Calculer la mesure au degré près de l'angle $\widehat{IOJ}$ correspondant à la zone éclairée.

Résolution

a. I(15 ; 5) et J(7,5 ; 10).

b. $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = 15 \times 7{,}5 + 10 \times 5 = 112{,}5 + 50 = 162{,}5$.

c. $\|\overrightarrow{OI}\| = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$
$\|\overrightarrow{OJ}\| = \sqrt{7{,}5^2 + 10^2} = \sqrt{\dfrac{625}{4}} = \dfrac{25}{2}$

d. $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = OI \times OJ \times \cos\widehat{IOJ}$

Donc : $\cos\widehat{IOJ} = \dfrac{13}{5\sqrt{10}}$

L'angle mesure au degré près 35°.

101

1. ***Constructions et conjectures***
En jouant sur la position de A et de C, on peut conjecturer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ sont égaux.
2. a. Soit A' symétrique de A par rapport à O.
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$ car B est un point du cercle de diamètre [AA'] et le triangle A'BA est donc rectangle en B : le projeté de A' sur [AB] (ou encore (MA)) est donc B.
b. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$
$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'})$
$= MO^2 + \overrightarrow{MO}.\vec{0} - R^2 = OM^2 - R^2$.
O est le milieu de [AA']
Si on pose C' symétrique de C par rapport à O, on montrerait de même que :
$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC'} = OM^2 - R^2$.
D'où : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ sont égaux.

102 Soit deux cercles $\mathscr{C}_1$ (centre O_1, rayon R_1) et $\mathscr{C}_2$ (centre O_2, rayon R_2) avec O_1 et O_2 distincts.

a. $P_{\mathscr{C}_1}(M) = MO_1^2 - R_1^2$ et $P_{\mathscr{C}_1}(M) = MO_2^2 - R_2^2$

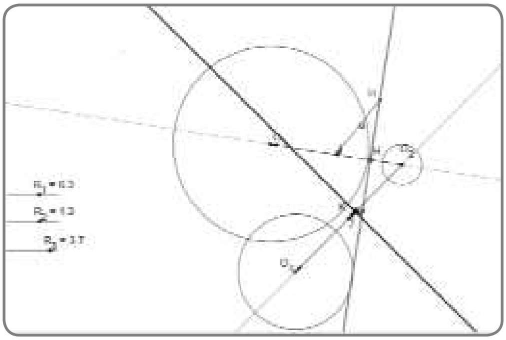
$P_{\mathscr{C}_1}(M) = P_{\mathscr{C}_2}(M) \Leftrightarrow MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$
$\Leftrightarrow MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{MO_2}).(\overrightarrow{MO_1} - \overrightarrow{MO_2}) = R_1^2 - R_2^2$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{O_2O_1} = R_1^2 - R_2^2$ I milieu de $[O_2O_1]$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{O_2O_1} = \dfrac{R_1^2 - R_2^2}{2}$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (O_2O_1), on a :
$\overline{HI} = \dfrac{R_1^2 - R_2^2}{2O_2O_1}$.

Φ est donc la droite perpendiculaire à (O_2O_1) passant par H (on pourra montrer que lorsque les deux cercles sont sécants en A et B, Φ est la droite (AB)).

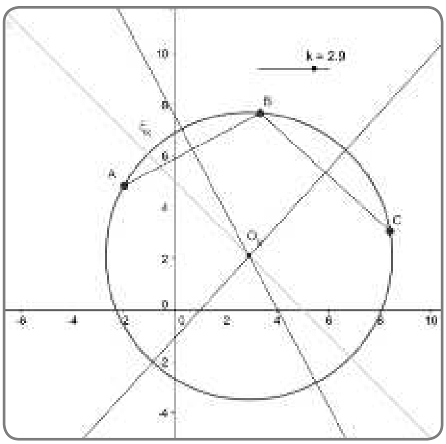
b. Si on rajoute un troisième cercle $\mathscr{C}_3$ (centre O_3, rayon R_3) avec O_1, O_2 et O_3 distincts :
- l'ensemble tel que $P_{\mathscr{C}_1}(M) = P_{\mathscr{C}_2}(M)$ est une droite d (en rouge sur le dessin).
- l'ensemble tel que $P_{\mathscr{C}_3}(M) = P_{\mathscr{C}_2}(M)$ est une droite d' (en bleu sur le dessin).

Si d et d'sont parallèles alors Φ est l'ensemble vide. Si d et d' ne sont pas parallèles alors Φ est réduit à un point, l'intersection de d et d'.

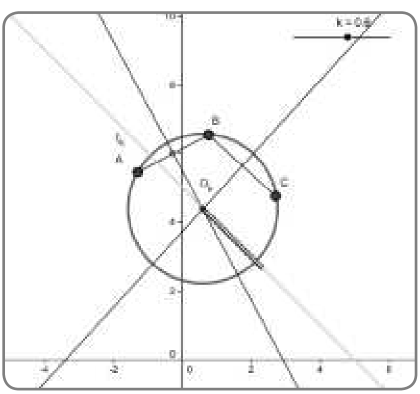


103

1. a. et **b.** On conjecture que l'ensemble $\mathscr{E}_k$ est un cercle. En plaçant trois points distincts A, B et C sur le cercle, on construit les médiatrices de [AB] et [BC]. Leur intersection est O_k.



En basculant le point O_k en « mode trace », on conjecture que le lieu de O_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$ est une droite.



2. ***Démonstrations***

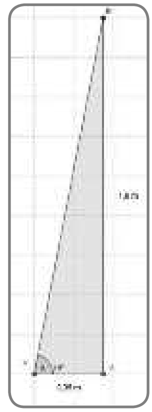
$x^2 + y^2 - 2kx + (2k - 10)y - k^2 - 11k + 22 = 0$ s'écrit $(x - k)^2 + (y - (5 - k))^2 = 3k^2 + k + 3$

Le polynôme $3k^2 + k + 3$ étant strictement positif pour tout réel k ($\Delta = -35 < 0$),

$\mathscr{E}_k$ est un cercle de rayon $r_k = \sqrt{3k^2 + k + 3}$ et de centre $O_k(k\,;\,5 - k)$.

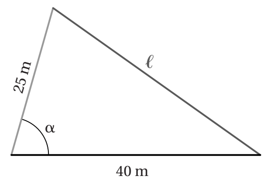
Si on pose $x = k$, on trouve $y = 5 - x$ ce qui est l'équation d'une droite, lieu de O_k (k décrit $\mathbb{R}$).

104 Grâce à l'ombre de Robin, on obtient l'angle d'inclinaison de la tour penchée.



$\tan(\alpha) = \dfrac{1{,}8}{0{,}35}$ et donc α est environ égal à 79 °.

On applique ensuite le théorème de Pythagore généralisé :

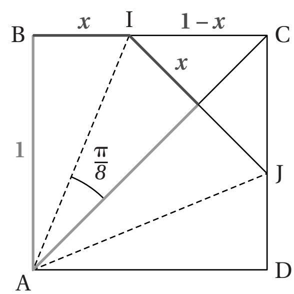


$l^2 = 25^2 + 40^2 - 2 \times 25 \times 40 \cos(\alpha)$

$l^2 = 2225 - 2000 \cos(\alpha)$

D'où un besoin d'environ 42,93 m de corde au minimum.

105



Dans le triangle rectangle ICJ :

$(1 - x)^2 + (1 - x)^2 = (2x)^2$

En développant, on obtient : $x^2 + 2x - 1 = 0$ qui possède deux solutions, dont une seule positive :

$x = -1 + \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} = \sqrt{2}$ et $AI = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

D'où : $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI} / (AC \times AI)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}.$$

106 Solution très détaillée à l'adresse suivante : http://www.apmep.asso.fr/Lyon,2862

107 **1. a.** ***L'aire d'un triangle***

$$\mathcal{S} = \frac{(\text{Base} \times \text{Hauteur})}{2}$$

b. Trigonométrie dans le triangle AHC :

• la hauteur CH mesure $\text{AC}\sin\widehat{\text{A}}$ soit $b\sin\widehat{\text{A}}$.
La base mesure AB soit *c*. (*schéma* 1)

• la hauteur CH mesure $\text{AC}\sin(\pi - \widehat{\text{A}})$ soit $b\sin\widehat{\text{A}}$.
La base mesure AB soit *c*. (*schéma* 2)

Conclusion : pour tout triangle : $\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{\text{A}})$

c. Par permutation circulaire des sommets :

$\mathcal{S} = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{\text{C}}) = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{\text{A}})$

d. On divise par le réel *abc* les trois égalités, et on obtient : $\frac{a}{\sin(\widehat{\text{A}})} = \frac{b}{\sin(\widehat{\text{B}})} = \frac{c}{\sin(\widehat{\text{C}})}$

2. ***Applications***

a. Le troisième angle mesure :
$180 - 50 - 58 = 72°$.

On a : $\frac{300}{\sin 72} = \frac{?}{\sin 50}$

donc : $? = \frac{300\sin 50}{\sin 72}$

soit environ 242 m.

b. Remarquons que l'angle $\widehat{C_1I_1C_2}$ mesure 59° et que l'angle $\widehat{C_1I_2C_2}$ mesure 48°.

On a dans le triangle $C_1I_1C_2$:

$\frac{30}{\sin 59} = \frac{C_1I_1}{\sin 38}$

donc $C_1I_1 = \frac{30\sin 38}{\sin 59}$

soit environ 21,548 m.

De plus dans le triangle $C_1I_2C_2$:

$\frac{30}{\sin 48} = \frac{C_1I_2}{\sin 92}$

donc $C_1I_2 = \frac{30\sin 92}{\sin 48}$

soit environ 40,344 m.

On applique ensuite le théorème de Pythagore généralisé dans le triangle $C_1I_1I_2$:

$(I_1I_2)^2 = (C_1I_1)^2 + (C_1I_2)^2 - 2 \times C_1I_1 \times C_1I_2 \cos(43)$ soit environ 28,6 m séparant les deux indiens.

PARTIE C

STATISTIQUES ET PROBABILITÉ

8. Statistiques

Objectifs et pré–requis

On poursuit l'étude des séries statistiques avec l'utilisation des paramètres de position et de dispersion afin de comparer des séries. L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, de fichiers mis à disposition par l'Insee).

Extrait du programme (Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010)

Contenus	Capacités attendues
Caractéristiques de dispersion : variance, écart-type. Diagramme en boîte.	• Utiliser de façon appropriée les deux couples usuels qui permettent de résumer une série statistique : (moyenne, écart-type) et (médiane, écart interquartile). • Étudier une série statistique ou mener une comparaison pertinente de deux séries statistiques à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.

Corrigés des activités

1 Âge d'une population

Partie A

❶ **b.** ANNEE(A2) donne l'année qui correspond à la date se trouvant en cellule A2. L'âge à la fin de l'année y en années entières d'une personne née en l'année x est égal à $x - y$. Ce qui donne bien 2011–ANNEE(A2) pour l'âge en fin d'année 2011.

c. =12 – MOIS(A2)

d. L'âge en mois entiers se calcule avec la formule : =12* (2011 – ANNEE(A2)) + 12 – MOIS(A2)

e. ***Graphique A*** : Après avoir classé les élèves par âge croissant, on leur attribue un numéro. Le graphique donne l'âge en mois en fonction du numéro. Cela permet de répondre à une question du type « Quel est l'âge en mois du $n^{\text{ème}}$ élève qui fête son anniversaire dans l'année ? ».

Graphique B : Donne les effectifs du caractère « âge en mois entier » pour les élèves de la classe. Permet de répondre à une question du type « Combien d'élèves de la classe ont un âge de 195 mois au premier janvier ? ».

Graphique C : Donne les effectifs cumulés croissants du caractère « âge en mois entier » pour les élèves de la classe. Permet de répondre à une question du type « Combien d'élèves ont un âge d'au moins 200 mois au premier janvier ? ».

❷ **a.** La moyenne est 198,5.

b. La médiane est 197. Les quartiles Q_1 et Q_3 sont respectivement 195 et 201.

c. La médiane indique que la moitié des élèves a un âge supérieur à 197 mois, donc âgés au 1er janvier 2012 de 16 ans et 5 mois, ou encore nés en août 1995.

En rangeant les dates de naissances par ordre croissant, on trouve que la valeur médiane est le 26/7/1995.

Partie B

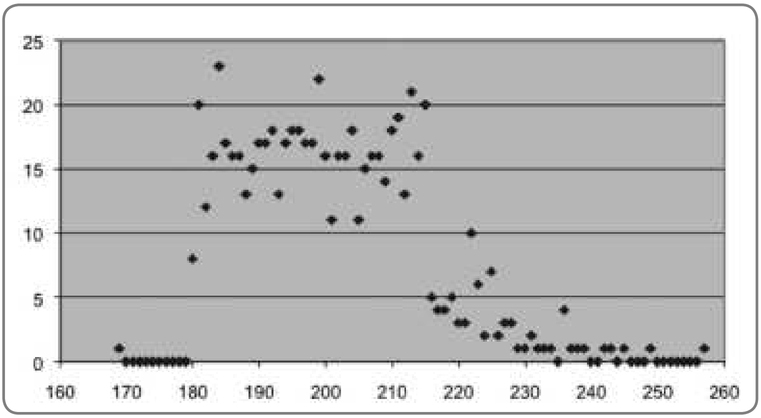
❷

	Effectifs	Âge moyen
Filles	252	199,2
Garçons	411	202,0
Tous	663	200,9

❸ L'âge moyen de tous les élèves est aussi égal à $\dfrac{252\times 199{,}2+411\times 202}{252+411}$.

❹ La colonne B permet de voir les effectifs pour chaque âge.

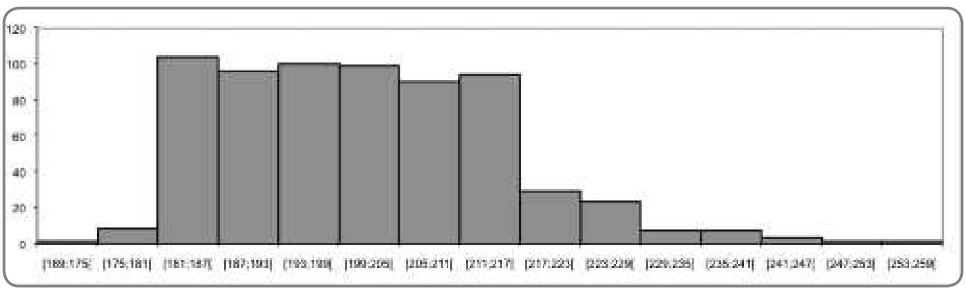
❺ Pour représenter les effectifs en fonction des âges, on peut utiliser la fonction NB.SI du tableur pour compter pour les valeurs de l'âge entre 169 et 257 les effectifs correspondants.



Partie C

Classe	[169;175[	[175;181[	[181;187[	[187;193[	[193;199[	[199;205[	[205;211[
Effectif	1	8	104	96	100	99	90

Classe	[211;217[	[217;223[	[223;229[	[229;235[	[235;241[	[241;247[	[247;253[	[253;259[
Effectif	94	29	23	7	7	3	1	1



Partie D

❶ Dans ce lycée, ces différences prennent des valeurs entre – 17 et 51.

❷ Leur moyenne est 3,4. Ce nombre est positif car, en moyenne, plus d'élèves sont nés avant le 1er juillet qu'après le 1er juillet.

❸

Q1	– 2
Médiane	2
Q3	6

Corrigés des travaux pratiques

TICE 1 Dispersé ?

1 a ou $2a$ entier avec $10 \leqslant a \leqslant 20$

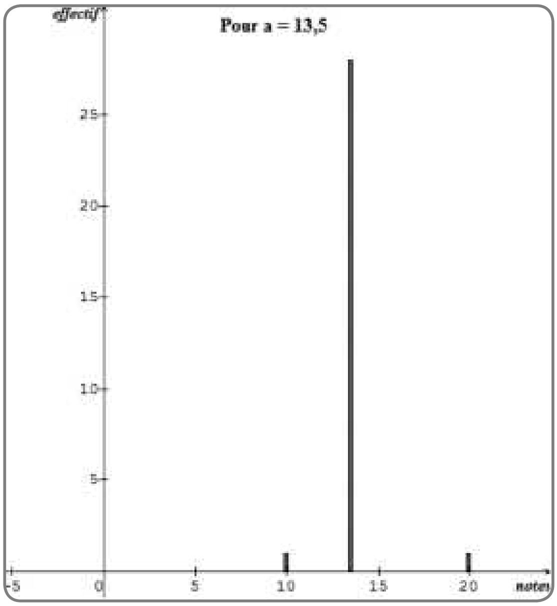
$\Leftrightarrow a \in \{10 ; 11 ; 12 ; \ldots 19 ; 20\}$ ou $2a$ entier avec $20 \leqslant 2a \leqslant 40$

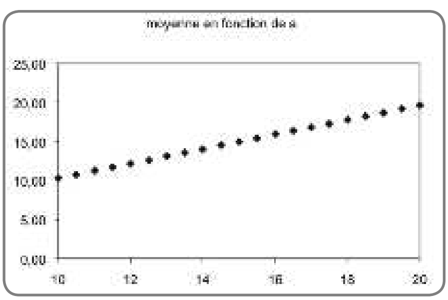
$\Leftrightarrow a \in \{10 ; 10{,}5 ; 11 ; 11{,}5 ; \ldots 19{,}5 ; 20\}$

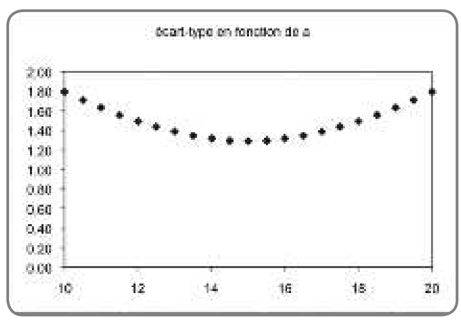
2 **a.** Moyenne : $\dfrac{10+28a+20}{30} = 1+\dfrac{14}{15}a$

Écart-type : $\sqrt{\dfrac{10^2+28\times a^2+20^2}{30}-\left(1+\dfrac{14}{15}a\right)^2} = \dfrac{\sqrt{14a^2-420a+3525}}{15}$

b.







c. D'après le tableur, la valeur de a qui minimise l'écart-type est 15.

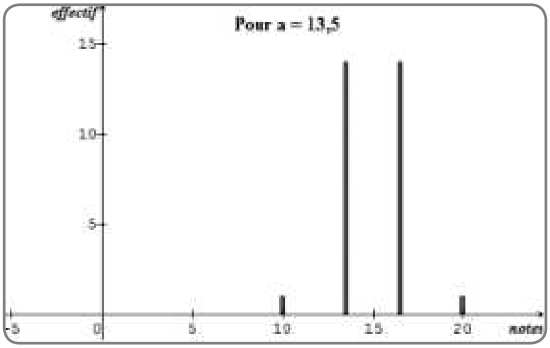
d. Si a est différent de 15, la moyenne sera différente de a.

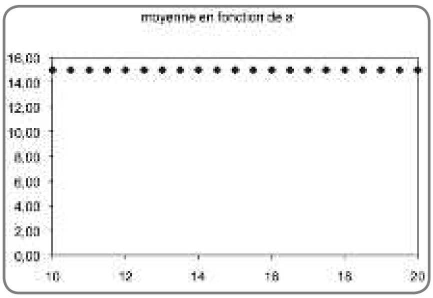
Dans l'expression de la variance, l'écart par rapport à la moyenne du terme en a aura un « poids » important, ce qui a pour conséquence une augmentation de l'écart-type.

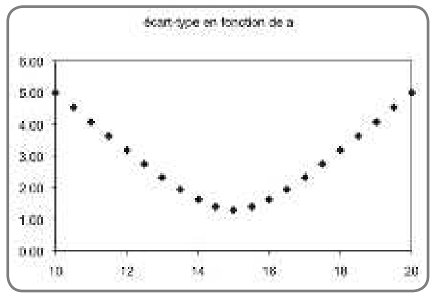
3 **a.** $\dfrac{a+b}{2} = 15$ donc $b = 30 - a$.

b. Moyenne : $\dfrac{10+14a+14(30-a)+20}{30}=15.$

Écart-type : $\sqrt{\dfrac{10^2+14\times a^2+14(30-a)^2+20^2}{30}-15^2}=\sqrt{\dfrac{14a^2-420a+3175}{15}}$





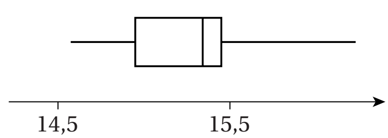


La constance de la moyenne s'explique par la symétrie des notes par rapport à 15.
L'écart-type est au minimum lorsque les valeurs sont très proches de 15.

4 Une dizaine de simulations au tableur est réalisée avec comme formule possible pour obtenir une note entre 10 et 20 avec des valeurs entières ou au demi-point, =10+ENT(21*ALEA())/2.

	sim1	sim2	sim3	sim4	sim5	sim6	sim7	sim8	sim9	sim10	minimum 10 simulations	maximum 10 simulations
moyenne	15,40	15,45	15,45	14,75	14,95	15,05	15,68	14,57	15,28	16,23	14,57	16,23
minimum	10,0	10,5	10,0	10,0	10,0	10,0	10,5	10,0	10,0	10,5	10,00	10,50
Q_1	12,75	13,5	12,6	11,75	11,63	12,5	13,88	11,5	11,6	14	11,50	14,00
médiane	16,0	15,5	15,0	14,5	15,5	15,5	15,5	14,8	15,3	17,0	14,50	17,00
Q_3	18,5	17,5	19	17,38	17,5	18	17,5	17	19	18,38	17,00	19,00
maximum	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,00	20,00
écart-type	3,14	2,47	3,28	3,15	3,36	3,03	2,86	3,35	3,60	2,88	2,47	3,60

Les 10 moyennes données par cette simulation sont :
15, 40 ; 15,45 ; 15,45 ; 14,75 ; 14,95 ; 15,05 ; 15,68 ; 14,57 ; 15,28 ; 16,23.
Le diagramme en boîtes qui correspond aux moyennes des 10 données est :
(minimum 14,57 ; Q1 14,95 ; médiane 15,34 ; Q3 15,45 ; maximum 16,23).



D'autres diagrammes en boîtes peuvent répondre à la question.

Algorithmique 1 **Quartiles**

❶ **a.** et **b.** Il s'agit de trier les données puis de déterminer Q_1, le plus petit élément des valeurs, tel que 25 % ou plus des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1.

```
Entrée :        Les valeurs dans une liste L
Traitement :    Affecter le nombre de valeurs à la variable N
                Trier la liste L et affecter la liste triée à L
                Si N/4 est entier, alors affecter N/4 à la variable X
                   Sinon affecter 1+la partie entière de N/4 à la variable X
                Affecter la X-ième valeur de la liste L à la variable Q1
Sortie :        Afficher la valeur Q1
```

❷ Les programmes complets sur calculatrice sont :

Avec TI	Avec CASIO
PROGRAM:QUARTILE :EffToutListes :Input "LISTE ? ",L₁ :Tricroi(L₁) :dim(L₁)/4→X :Disp "LISTE TRI EE",L₁ :If ent(X)=X :Then:Disp "Q1", L₁(X) :Else:Disp "Q1", L₁(ent(X)+1) :End	======QUARTILE====== ClrList :"LISTE "↵ ?→List 1↵ SortA(List 1)↵ List 1◢ Dim List 1÷4→X↵ "1er QUARTILE"↵ If X=Int X↵ Then List 1[X]↵ Else List 1[Int (X)+1]↵ IfEnd

En entrée avec ces programmes, on saisit :
{12 ; 15 ; 11 ; 18 ; 5 ; 6 ; 15 ; 19 ; 19 ; 10 ; 15 ; 14 ; 17 ; 14 ; 14 ; 14}.

Un programme sous Xcas peut être :

```
quartile(N):={
L:=[];
pour i de 1 jusque N faire
  saisir(a);
  L:=append(L,a);
fpour;
L_initiale:=L;
MM:=L[0];
pour k de 1 jusque N-1 faire
  minimum:=L[k-1];
  pour compteur de k+1 jusque N faire
    si L[compteur-1]<minimum alors
      iminimum:=compteur;
      minimum:=L[compteur-1];
      x:=L[k-1];L[k-1]:=minimum;L[iminimum-1]:=x;
    fsi;
  fpour;
fpour;
si N/4==floor(N/4)alors
  Q1:=L[N/4-1];
sinon
  Q1:=L[floor(N/4)];
fsi;
afficher "Liste",L_initiale,"Liste triée",L, "Q1 :",Q1;
}
```

Algorithmique 2 Correction de copies

1 **a.** La classe [8 ; 12[de la première représentation correspond aux mêmes copies que les deux classes [5 ; 10[et [10 ; 15[de la deuxième représentation.

2 **a.** Un algorithme possible.

```
Entrée :          Affecter les valeurs de la série statistique à Liste1
Traitement :      Affecter à N  le nombre de classes souhaité
                  Affecter à Min et à Max le minimum et le maximum de Liste1
                  Affecter à Etendue la valeur (Max – Min)/N
                  Affecter à Liste2 les bornes des intervalles
                  Affecter à Liste3 les effectifs des différentes classes
Sortie :          Afficher Etendue, Liste2 et Liste3
```

b. Extrait d'une feuille de calcul :

◇	A	B	C	D	E	F	G
1	Données	N° classe	Nombre de classes		N° classe	[a	b]
2	4,5	1	4		1	4,50	7,25
3	4,5	1			2	7,25	10,00
4	4,5	1	Nombre de données		3	10,00	12,75
5	4,5	1	14		4	12,75	15,50
6	9	2	Maximum				
7	9	2	15,5				
8	9	2	Minimum				
9	10	3	4,5				
10	10	3	Etendue classe				
11	10	3	2,75				

Pour déterminer à quelle classe appartient le nombre qui se trouve en A2, les élèves pourront utiliser la formule =ENT((A2 – C$9)/C$11)+1) mais ils se rendront compte qu'il y a un problème pour la valeur maximale.
Il faut donc ajouter un test SI(A2=C$7;C$2;ENT((A2 – C$9)/C$11)+1)
Il est possible d'indiquer aux élèves que l'affichage dans le tableur peut être amélioré avec une formule plus élaborée =SI(A2<>"";SI(A2=C$7;C$2;ENT((A2 – C$9)/C$11)+1);""), mais cela n'apporte rien de plus à la mise en œuvre de l'algorithme.
Avec Python :

```
N=input("Nombre de données ? ")
L=N*[0]
for i in range (N):
    L[i]=input("Entrer une valeur ")

C=input("Nombre de classes ? ")

## Calcul de l'étendue de chaque classe
Max=max(L) ; Min=min(L) ; etendue=float(Max-Min)/C

## initialisation de la liste qui contiendra les effectifs
EFF=C*[0]

## Recherche de l'effectif de chaque classe
for k in range(C-1):
    EFF[k]=0
    for i in range (N):
        if L[i]>=(Min+k*etendue) and L[i]<(Min+(k+1)*etendue):
            EFF[k]= EFF[k]+1
    print "classe n° ",k+1,Min+k*etendue,Min+(k+1)*etendue
    print "effectif : ",EFF[k]

## Recherche de l'effectif de la dernière classe
EFF[C-1]=0
for i in range (N):
    if L[i]>=(Min+(C-1)*etendue) and L[i]<=Max:
        EFF[C-1]= EFF[C-1]+1
print "classe n° ",C,Min+(C-1)*etendue,Max
print "effectif : ",EFF[C-1]
```

Problème ouvert 1 **Existences ?**

1 **a.** Il n'existe pas de série statistique à 4 valeurs telle que le minimum a, Q_1, m, Q_2, le maximum b et $\overline{x}$ soient distincts deux à deux.

Supposons qu'une telle série existe. Comme $N = 4$, on a $\frac{N}{4} = 1$. Donc Q_1 sera égal à la plus petite valeur a, ce qui contredit l'hypothèse $a \neq Q_1$.

b. Cherchons maintenant un effectif N tel que le minimum a, Q_1, m, Q_2, le maximum b et $\overline{x}$ soient distincts deux à deux. D'après ce qui précède $N \neq 4$, et on montre de la même manière que N ne peut être inférieur à 4.

Donnons maintenant un exemple pour prouver que la valeur $N = 5$ répond à la question posée en prenant comme série statistique : 1 ; 2 ; 3,5 ; 4 et 5.

Les valeurs a, Q_1, m, Q_2, le maximum b et $\overline{x}$ sont respectivement égales à 1 ; 2 ; 3,5 ; 4 ; 5 et 3,1.

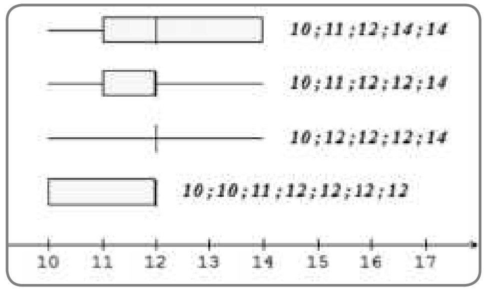
2 Donnons un exemple de chaque situation pour montrer son existence :

10 ; 11 ; 12 ; 14 ; 14

10 ; 11 ; 12 ; 12 ; 14

10 ; 12 ; 12 ; 12 ; 14

10 ; 10 ; 11 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12



3 **a.** On peut supposer dans cette question que $a < b$, quitte à échanger a et b.

Montrons par l'absurde que la situation décrite n'est pas possible.

Posons a ; x_2 ; x_3… ; x_{N-1} et b les valeurs de la série. Comme la moyenne vaut b, la somme des valeurs de la série vaut $S = Nb$. (1)

Cette même somme vaut également $S = a + x_2 + x_3 + \ldots + x_{N-1} + b$.

Comme $a < b$ et $x_i \leqslant b$ pour $i > 1$, on a : $S < a + (N-1)b$. (2)

(1) et (2) permettent d'obtenir $b < a$ ce qui est impossible donc la moyenne ne peut être b.

b. En considérant $S = a + x_2 + x_3 + \ldots + x_{N-1} + b$, comme $a \leqslant x_i \leqslant b$ pour $1 < i < N$, on obtient : $(N-1)a + b \leqslant S \leqslant a + (N-1)b$.

Ce qui implique que : $a + \frac{b-a}{N} \leqslant \overline{x} \leqslant b - \frac{b-a}{N}$.

On en déduit que l'ensemble des moyennes se situe dans l'intervalle $]a\,;b[$.

Pour prouver que l'ensemble des moyennes est effectivement dans cet intervalle, considérons un nombre x quelconque de $]a\,;b[$.

On ne peut exploiter $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{b-a}{N} = 0$ car cela ne prouvera pas que toute valeur x est atteinte, ni l'existence d'un nombre réel k tel que $ka + (1-k)b = x$ car k ne pourra être écrit comme nombre rationnel.

Construisons une série statistique à N valeurs ($N > 2$) telle que sa moyenne soit x : la valeur a, la valeur b et $N - 2$ fois une valeur c à trouver.

On a donc : $\frac{a+(N-2)c+b}{N} = x \Leftrightarrow c = \frac{Nx-a-b}{N-2}$.

Il suffit maintenant de choisir N pour que c appartienne à $]a\,;b[$.

On montre que $a \leqslant c \leqslant b \Leftrightarrow N \geqslant \frac{b-a}{x-a}$ et $N \geqslant \frac{b-a}{b-x}$

Il suffit de choisir un entier supérieur à ces deux nombres qui peuvent être très grand lorsque x est proche de a ou de b.

Problème ouvert 2 SMS

Le professeur peut demander à chaque groupe d'élèves de lui fournir des données numériques en les mettant toutes dans la première colonne d'un tableur.
Il pourra alors utiliser les fichiers fournis sur le CD pour, par copier/coller, obtenir une analyse statistique de ces données.

Corrigés des exercices et problèmes

QCM Pour bien commencer

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 346.

Exercices d'application

1 Variance : 7,51 Écart-type: 2,74

2 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

3

	N	**moyenne**	**écart-type**
liste 1	36	11,5	1,96
liste 2	36	11,5	2,52

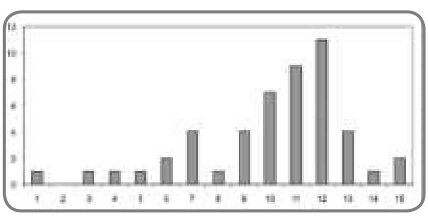
a. La somme de chaque liste de 36 notes est la même donc elles ont même moyenne.
Les notes de la deuxième liste sont globalement plus éloignées de 11,5 que celles de la première liste.
b. 30 notes ayant comme moyenne 11,5 doivent avoir comme somme 345.
Exemples : 15 notes de 11 et 15 notes de 12 ; 15 notes de 6 et 15 notes de 20.
Pour réaliser un écart-type de 0,5 on peut résoudre une équation :

$$\frac{(15 \times (11,5 - a - 11,5)2 + 15 \times (11,5 + a - 11,5)2)}{30} = 0,5^2 \Leftrightarrow a^2 = 0,5^2 .$$

Donc ce qui convient : **15 notes de 11 et 15 notes de 12**.
On peut obtenir ce résultat à l'aide d'un tableur.
c. De la même manière on trouve ici : **15 notes de 7,5 et 15 notes de 15,5**.
A l'aide du tableur on peut trouver d'autres solutions comme par exemple :
7 notes de 7, 8 notes de 8 , 8 notes de 15 et 7 notes de 16.

4 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

5 **a.** moyenne : 10,2 écart-type : ≈ 3,02
b.



c. $\frac{7+9}{50}$ = 30,32 ≈ 30 %
d.

$[m - \sigma ; m + \sigma]$:	7,18	13,22	0,8
$[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$:	4,16	16,24	0,94
$[m - 3\sigma ; m + 3\sigma]$:	1,14	19,26	0,96

6 **a.**

	Moyenne	**Ecart-type**
Entre octobre 2004 et septembre 2007	90,361	20,546
Entre octobre 2007 et septembre 2010	150,056	46,081

b. On constate clairement une augmentation de nombre de défaillances d'entreprises, ainsi qu'une « variation plus grande » de ce nombre au cours de la seconde période de 3 ans par rapport à la première.

7 **a.** Moyenne : 1,71 Écart-type : 0,075
b. Intervalle interquartile : [1,65 ; 1,75]
c. « 53 % des élèves de cette classe mesure entre 1,75m et 1,75m. »

8 **1. a.** et **b.**

	A	**B**
moyenne	2 450	2 350
écart-type	865,5	948,2
médiane	2 450	2 000
Q_1	1 700	1 900
Q_3	3 200	3 200
Intervalle interquartile	1 500	1 300

2. Le couple (médiane ; intervalle interquartile) parait plus approprié pour comparer la situation dans les deux entreprises si on souhaite montrer que globalement dans l'entreprise B la barre qui indique la moitié des salaires est plus basse et que les salaires intermédiaires y sont plus resserrés.

9

	Mois 1	Mois 2
moyenne	994	998
écart-type	8,94	11,83
médiane	994	997
Q_1	989	987
Q_3	997	1 005
Intervalle interquartile	8	18

La moyenne et l'écart-type ont augmenté : les valeurs sont « meilleures » mais plus dispersées par rapport à la médiane le deuxième mois.

10 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

11 **a.** $\left(\mathrm{a}\times\dfrac{N}{2}+\mathrm{b}\times\dfrac{N}{2}\right)/N=\dfrac{a+b}{2}$

b.

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\left(\frac{N}{2}a^2+\frac{N}{2}b^2\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\frac{|a-b|}{2}$$

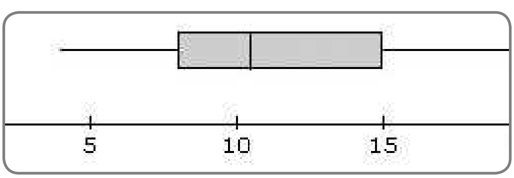
12 **a.**

N	10148
moyenne	7,698
écart-type	5,186
médiane	994
Q_1	2
Q_3	11
Intervalle interquartile	9
D_1	1
D_9	15

b. Pour voir si les internautes sont plus fidèles, il faudrait que Q_1 et surtout D_1 augmentent.

13 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

14



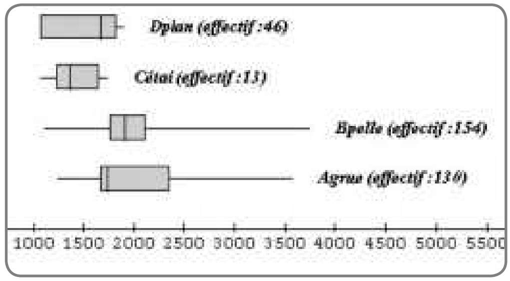
15 **Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 347.**

16 Minimum : 100 — Maximum : 375

Q_1 : 175 — Médiane : 245

Q_3 : 300 — Écart interquartile : 125

17 **a.**



b. Les quartiles et médianes des salaires sont plus élevés dans les deux entreprises où les effectifs sont plus élevés.

Les salaires les plus bas sont similaires dans les 4 entreprises.

Dans les entreprises où les effectifs sont plus élevés, les salaires sont globalement supérieurs à ceux des deux « petites » entreprises.

18 ***Traduction***

Répondre aux questions posées à l'aide du diagramme en boite suivant qui indique les résultats d'une classe à un test.

1. a. Quelle est la valeur de la moyenne ?

b. Quelle est la valeur du premier quartile ?

c. Quelle est la valeur la plus élevée ou maximum de la série statistique ?

2. a. Quelle proportion des élèves de la classe obtient des résultats inférieurs à 85 ?

b. Quelle proportion des élèves de la classe est reçue avec au moins 70 ?

c. S'il y a 23 étudiants dans cette classe, combien d'entre eux ont eu au moins 70 ?

Résolution

1. a. median : 85 — **b.** upper quartile : 90

c. lower quartile : 70 — **d.** greatest value or upper extreme : 100

2. a. 50% — **b.** 75% — **c.** 18

19 **a.** C'est vrai car la moyenne d'un groupe faible (ou fort) a augmentée. Mais cela n'a pas beaucoup de sens car les élèves ont sûrement changé de groupes.

b. Si on suppose qu'au cours de chaque trimestre chaque élève a eu comme moyenne la moyenne des notes de son groupe, les moyenne des notes d'anglais des 100 élèves sont :

1^er^ trimestre : $\dfrac{3\times20\times12+2\times20\times8}{100}=10{,}4$

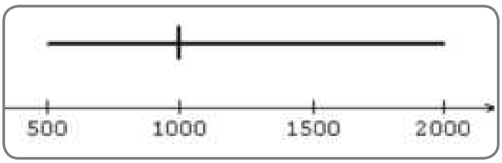
2^e^ trimestre : $\dfrac{3\times20\times8{,}5+2\times20\times12{,}5}{100}=9{,}8$

Les délégués peuvent effectivement avoir raison.

20 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 346.

Raisonnement logique

21 **a.** Faux. Contrexemple : les 3 salaires suivants : 1000, 1900, 2000 qui ont une médiane de 1900 et une moyenne de 1300.
b. Faux. Contre exemple : les 3 salaires suivants : 1000, 1900, 2000. Augmenter la plus grande valeur ne change pas la médiane
c. Faux. Contre exemple : les 3 salaires suivants : 1000, 1900, 2000. La moitié de la somme des valeurs extrêmes (1500) n'est pas une bonne approximation de la moyenne (1300)
d. Vrai. Exemple : 500, 1000, 1000, 1000, 1000, 1000, 1000, 2000. La médiane, Q_1 et Q_2 valent 1000. Le diagramme en boîte est :



e. Faux Contre-exemple : 1000, 1000, 1000, 7000. Moyenne : 2500. Q_1=Q_3=1000.

22 **a.** Faux. Contre-exemple : en première ES1 il y a 30 élèves qui ont tous une taille de 175 cm et en première ES2 il y a 30 élèves qui ont tous une taille de 170 cm. Les moyennes différent de 5cm mais les deux écart-type sont égaux à 0.
b. Faux. Contre-exemple :

	1ES1	**1ES2**
Notes filles	1 fois 20	29 fois 19
Notes garçons	29 fois 11	1 fois 10

	1ES1	**1ES2**
Moyenne notes filles	20	19
Moyenne notes garçons	11	10
Moyenne classe	11,3	18,7

Restitution des connaissances

23

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{N_1}}{N_1} \Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_{N_1} = N_1\bar{x}_1$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_{N_1+1} + x_{N_1+2} + \ldots + x_N}{N_2} \Rightarrow x_{N_1+1} + \ldots + x_N = N_2\bar{x}_2$$

donc $\bar{x} == \dfrac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N} = \dfrac{N_1}{N}\bar{x}_1 + \dfrac{N_2}{N}\bar{x}_2$.

24 Oui.
Exemple : 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10.
Moyenne 10 Écart-type : 0

Se tester sur…

QCM : Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 347.

Prêt pour le contrôle ?

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 347

Problèmes

31 Il y aurait eu une barre supérieure à 14 et
- 11 candidats qui ont eu 0,
- 1 candidat qui a eu 14,
- 323 candidats qui ont eu plus de la barre et moins que 20,
- 1254 – 323 –1 – 11 = 919 candidats qui ont moins que la barre et plus que 0.

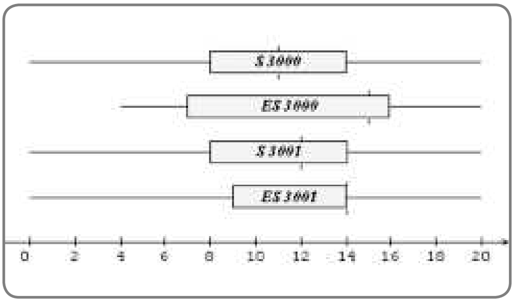
En notant TE le total des moyennes de candidats ayant échoués (sauf les 11 et Jean) ,
en notant TR le total des moyennes de candidats reçus,
en notant b la barre on peut écrire :
$0 \leqslant TE < 919b$
$323b \leqslant TR \leqslant 323 \times 20$
$TE + TR = 8 \times 1254 - 14 = 10018$
$b > 14$
Une solution possible est : b=15 ; TE = 5238 ; TR = 4780 soit par exemple tous les candidats reçus ont une note de 14,8 et tous les candidats recalés (sauf Jean) une note de 5,7.
Beaucoup d'autres solutions sont possibles donc un recours ne servira à rien.

32 **La moitié ou 70% ?**
http://www.insee.fr/fr/themes/document.asp?ref_id=T10F051
http://www.insee.fr/fr/themes/tableau.asp?reg_id=0&ref_id=NATSEF04142

En 2007 le 7e décile est à 2004 €, ce qui correspond environ au salaire moyen qui est de 2001 € .

33

1. a.



b. Les intervalles interquartiles sont en baisse, la médiane de S en hausse, celle d'ES en baisse.
Le troisième quart des élèves de ES ont des notes dans un intervalle de petite taille, voire la même note.

2. Nombre total d'élèves en 3000 et en 3001 : 2300.
La moyenne des notes en mathématiques de tous les élèves a baissé de 12,87 à 12,79.
Les moyennes des notes des élèves par filière ont augmenté : voir les tableaux.

3.

	Effectif	Moyenne
ES	300	14,2
S	1200	12,2
STG	400	12,2
STI2D	200	14,2
ST2S	200	12,2

Moyenne de tous les élèves en 3002 : 12,63

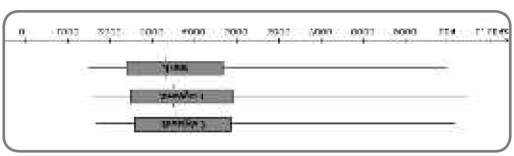
34

Partie A, B

a. Somme des salaires 147750€.
b. Médiane et quartiles de ces salaires.

	Avant	Stratégie 1	Stratégie 2
$\mathbf{Q_1}$	2400	2520	2594,41
Médiane	3350	3517,5	3544,41
$\mathbf{Q_2}$	4700	4935	4894,41

c. Diagrammes en boites



Avant	Stratégie 1	Stratégie 2
1500	1575	1694,41
1600	1680	1794,41
1700	1785	1894,41
1800	1890	1994,41
1900	1995	2094,41
2000	2100	2194,41
2100	2205	2294,41
2200	2310	2394,41
2300	2415	2494,41
2400	2520	2594,41
2500	2625	2694,41
2600	2730	2794,41
2700	2835	2894,41
2800	2940	2994,41
2900	3045	3094,41
3000	3150	3194,41
3100	3255	3294,41
3200	3360	3394,41
3300	3465	3494,41
3400	3570	3594,41
3500	3675	3694,41
3650	3832,5	3844,41
3800	3990	3994,41
3950	4147,5	4144,41
4100	4305	4294,41
4250	4462,5	4444,41
4400	4620	4594,41
4550	4777,5	4744,41
4700	4935	4894,41
4850	5092,5	5044,41
5000	5250	5194,41
5500	5775	5694,41
6000	6300	6194,41
6500	6825	6694,41
7000	7350	7194,41
8000	8400	8194,41
9000	9450	9194,41
10000	10500	10194,41

Partie C

1. 2. Avec les deux stratégies il y a un employé en moins et un cadre en plus.

Évolution des salaires moyens de chacune des catégories :

Stratégie 1	Stratégie 2
2,86%	5,89%
1,35%	1,18%
1,65%	0,05%
5,00%	2,16%

3. Elle n'augmente pas car même si les salaires de ceux qui étaient cadres ont augmenté, s'y est ajouté un cadre avec un salaire « bas ».

35

1. a.

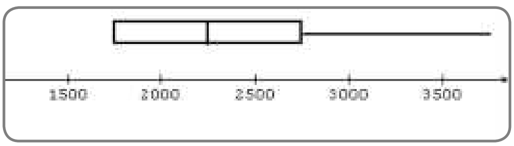
Salaires mensuels	Effectifs
[1 500 ; 2 000[	80
[2 000 ; 2 500[	40
[2 500 ; 3 000[	40
[3 000 ; 3 500[	30
[3 500 ; 4 000[	10

b. Somme des effectifs : 200

2. a.

Moyenne	2375
Écart-type	629,98
Q_1	1750
Médiane	2250
Q_3	2750

b.

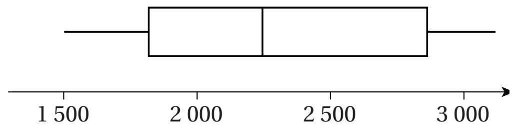


c. Somme des salaires versée par mois : 475 000 €

3. a.

moyenne	2368,75
écart-type	642,67
Q_1	1810,94
médiane	2243,75
Q_3	2865,63

b.



c. Somme des salaires versés par mois : 473 750 €

36 Minimiser des sommes de carrés

1. a. $(a-1)^2+(a-2)^2+(a-3)^2+(a-4)^2+(a-5)^2$
$+(a-6)^2+(a-7)^2+(a-8)^2=8a^2-72a+204.$

b. $\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(a-x_i)^2$ est minimale en $a = 4{,}5$.

c. $\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i = 4{,}5$.

2. a.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel on écrit :
S(a) = ((1)/(20))*((a –1.5)^(2)
+ (a –2.31)^(2) + (a–3.6)^(2) + 2*(a – 3.8)^(2)
+ 5*(a – 3.9)^(2) + 4*(a – 4.1)^(2) + 3*(a – 4.5)^(2)
+ (a – 5)^(2) + (a – 5.3)^(2) + (a – 6.7)^(2))

La simplification par le logiciel donne :
((200000*a^(2) – 1628200*a + 3514461)/(200000))
ou encore a^2 – 8.141*a + 17.572305

b. La moyenne de la série statistique est **4.0705** et minimise également $\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(a-y_i)^2$.

9. Probabilités

Objectifs et pré-requis

On introduit dans ce chapitre la notion de variable aléatoire qui permet de modéliser des situations et de justifier certaines expériences effectuées en classe de seconde.
On utilisera les arbres pondérés pour modéliser la répétition d'expériences identiques et indépendantes. On se limitera à ce seul cadre afin d'éviter toute confusion avec des situations relevant des probabilités conditionnelles.

Extrait du programme (Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010)

Contenus	Capacités attendues
Variable aléatoire discrète et loi de probabilité. Espérance, variance et écart-type. Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues.	• Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire. • Interpréter l'expérience comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions. • Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré. • Utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation.

Corrigés des activités

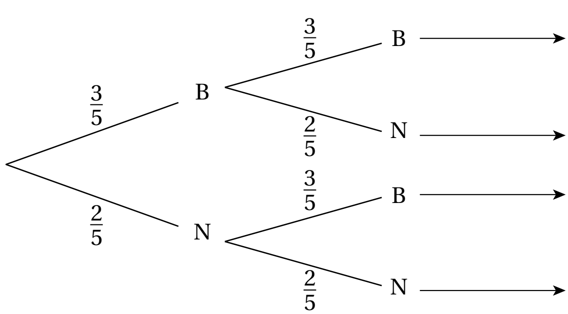
Des boules dans l'arbre

1 **a.** $p(B) = \frac{3}{5}$.

b. La même probabilité.

c. $p(B\,;B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$.

d.



$p\,(B\,;B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

$p\,(B\,;N) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

$p\,(N\,;B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

$p\,(N\,;N) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

e. $p(\text{même couleur}) = p(B\,;B) + p(N\,;N) = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$.

2 **a.** $p(\text{0 boule blanche}) = p(N\,;N) = \frac{4}{25}$. $p(\text{1 boule blanche}) = p(B\,;N) + p(N\,;B)$

$= \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$. $p(\text{2 boules blanches}) = p(B\,;B) = \frac{9}{25}$.

b. Sur 0 boule blanche : $500 \times \frac{4}{25} = 80$. Sur 1 boule blanche : $500 \times \frac{12}{25} = 240$.

Sur 2 boules blanches : $500 \times \frac{9}{25} = 180$.

c. $\overline{x} = \dfrac{0 \times 80 + 1 \times 240 + 2 \times 180}{500} = 1{,}2$.

d. Sur 0 boule blanche : $10\,000 \times \frac{4}{25} = 1600$. Sur 1 boule blanche : $10\,000 \times \frac{12}{25} = 4800$. Sur 2 boules blanches : $10\,000 \times \frac{9}{25} = 3600$.

$\overline{x} = \dfrac{0 \times 1600 + 1 \times 4800 + 2 \times 3600}{10\,000} = 1{,}2$.

e. Ce nombre est le même.

❸ **a.** On peut espérer gagner 0,2 jetons par partie.
b. Pour 100 parties, le gain moyen est de $100 \times 0{,}2 = 20$ jetons.

Corrigés des Travaux pratiques

TICE 1 Pas si aléatoire que ça

❶ **a.** Le montant du jackpot est initialement 12 (cellule G4). Les gains possibles du joueur sont donc 2, 4 et 12 €.
Pour une mise de 1 €, les bénéfices de Mina sont : 1€ si le joueur perd ; $1 - 2 = -1$ € si le joueur fait 10 ; $1 - 4 = -3$ € si le joueur fait 11 ; $1 - 12 = -11$ € si le joueur fait 12.
b. Le bénéfice total est la somme des nombres situés dans la plage E3:E102.
c. Structure de l'algorithme

```
Si la somme des dés vaut 10
   Alors le bénéfice vaut -1
Sinon
   Si la somme des dés vaut 11
      Alors le bénéfice vaut -3
   Sinon
      Si la somme des dés vaut 12
         Alors le bénéfice vaut 1 - le jackpot
      Sinon le bénéfice vaut 1
```

❷ **b.** Il semble que Mina fasse un bénéfice plus souvent qu'une perte mais cela ne se vérifie pas toujours.
d. La difficulté réside à se mettre d'accord sur le mot « raisonnablement ». On peut s'entendre sur le fait que la valeur maximale cherchée permet un bénéfice de 10 cts en moyenne au moins trois fois sur quatre. On pourra considérer 18 comme une bonne réponse mais les élèves peuvent répondre favorablement avec 19 selon les résultats de leurs essais.

❸ **a.** Chaque issue d'un dé a une probabilité de $\frac{1}{6}$.

Chaque couple ordonné est équiprobable de probabilité $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

b. Les trois couples permettant d'obtenir 10 sont (4 ; 6), (5 ; 5) et (6 ; 4).

La probabilité que la somme fasse 10 est donc $p(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

c. Les deux couples permettant d'obtenir 11 sont (5 ; 6) et (6 ; 5). La probabilité que la somme fasse 11 est donc $p(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

L'unique couple permettant d'obtenir 12 est (6 ; 6). La probabilité que la somme fasse 12 est donc $p(12) = \dfrac{1}{36}$.

d. La loi de probabilité de ce jeu est la suivante :

x_i	$1-p$	-3	-1	1
$p(X = x_i)$	$\dfrac{1}{36}$	$\dfrac{2}{36}$	$\dfrac{3}{36}$	$\dfrac{30}{36}$

e. $E(X) = (1-p) \times \dfrac{1}{36} + (-3) \times \dfrac{2}{36} + (-1) \times \dfrac{3}{36} + 1 \times \dfrac{30}{36} = \dfrac{1-p-6-3+30}{36} = \dfrac{22-p}{36}$

On résout $E(X) = 0{,}1$, soit $\dfrac{22-p}{36} = 0{,}1$.

$22 - p = 3{,}6 \Leftrightarrow p = 18{,}4$. Ce résultat confirme les conjectures de la question 2. d.

4 **a.** Pour x lancers, on peut espérer en moyenne un bénéfice de $0{,}1x$, donc la droite représente les bénéfices cumulés que l'on peut espérer.

b. On peut constater une certaine variabilité des bénéfices mais on peut interpréter la droite comme une courbe de tendance.

Algorithmique 1 Un jeu équitable est-il peu risqué ?

1 **a.** Un « pile » ou « face » est simulé par un entier choisi aléatoirement entre 0 et 1.
Le lancer de deux pièces est simulé par la somme de deux entiers aléatoirement choisis entre 0 et 1.
On a ici fait le choix d'associer « pile » à 1 et « face » à 0 (le test $L_1(I)=0$ indique le nombre de « face » obtenu).

b. I est le nombre de parties que l'on souhaite jouer.
î indique le rang d'une partie.

c. $L_1(I)$ est le gain obtenu à la $I^{\text{ème}}$ partie.

d.

Exemples sur TI 83plus	
prgmPILEFACE N=?50 MOYENNE .22 ECART-TYPE 2.435201035 Fait	prgmPILEFACE N=?200 MOYENNE .085 ECART-TYPE 2.274564401 Fait

e. Le jeu ne semble ni favorable ni défavorable au joueur car la moyenne n'est pas de signe constant (et même proche de 0 pour N grand).

2 **a.**

Avec calculatrice TI 83plus	Avec calculatrice Casio graph35 +
PROGRAM:PILEFACE :Prompt N :EffListe L₁ :For(I,1,N) :entAléat(0,1)+e ntAléat(0,1)+ent Aléat(0,1)→L₁(I) :If L₁(I)=0 :Then :-12→L₁(I) :End :End :Disp "MOYENNE", moyenne(L₁) :Disp "ECART-TYP E",ecart-type(L₁)	======PILEFACE====== ?→N↵ ClrList ↵ For 1→I To N↵ RanInt#(0,1)+RanInt#(0,1)+RanInt#(0,1)→Lis t 1[I]↵ If List 1[I]=0↵ Then -12→List 1[I]↵ IfEnd↵ Next↵ 1-Variable List 1↵ "MOYENNE"◢ x̄◢ "ECART-TYPE"◢ σx◢ TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR

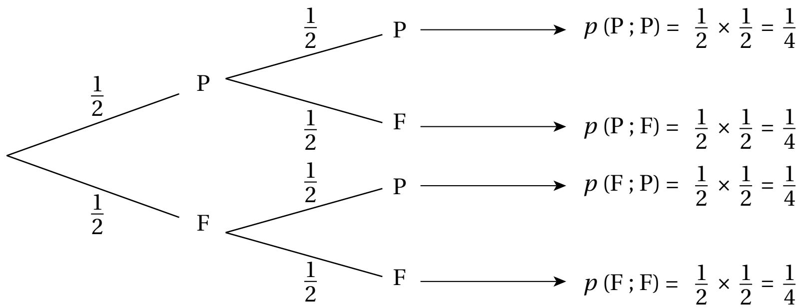
b.

Exemples sur TI 83plus	
prgmPILEFACE N=?50 MOYENNE .78 ECART-TYPE 3.871876621 Fait	prgmPILEFACE N=?200 MOYENNE .115 ECART-TYPE 4.42489247 Fait

c. Là encore, le jeu ne semble ni favorable ni défavorable au joueur car la moyenne n'est pas de signe constant (et même proche de 0 pour N grand).

d. Les écart-types du deuxième jeu semblent néanmoins plus importants, ce qui pourrait indiquer une plus grande fluctuation des gains et donc un risque plus important.

3 **a.**



On en déduit la loi de probabilité du premier jeu :

x_i	-4	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = -4 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$V(X) = (-4)^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{2} + 1 = 5{,}5$

$\sigma(X) = \sqrt{5{,}5} \approx 2{,}34$.

b. $E(X) = -12 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = -\frac{12}{8} + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = 0$

$V(X) = (-12)^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = \frac{144}{8} + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{168}{8} = 21$

$\sigma(X) = \sqrt{21} \approx 4{,}58$.

c. Les deux lois ont même espérance mais l'écart-type du second jeu est plus important.

d. Les deux jeux sont équitables car l'espérance vaut 0 pour chacun d'eux, mais le second jeu est plus risqué dans le sens où les variations possibles des gains sont plus importantes (le risque pouvant être positif ou négatif).

Problème ouvert 1 Plus de chance de faire plus ?

En notant p la probabilité d'obtenir 1, on a :
$p(1) = p$, $p(2) = 2p$, $p(3) = 3p$, $p(4) = 4p$, $p(5) = 5p$ et $p(6) = 6p$.
Or la somme des probabilités vaut 1, donc $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$.
On en déduit $15p = 1$ puis $p = \frac{1}{15}$.
On peut donc calculer $p(6) = 6p = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Problème ouvert 2 Le dé de Platon

En notant p la probabilité d'obtenir 1, on a :
$p(1) = p(6) = p$, $p(2) = p(5) = 3p$ et $p(3) = p(4) = 2 \times 3p = 6p$.
Or la somme des probabilités vaut 1, donc $p + p + 3p + 3p + 6p + 6p = 1$.

On en déduit $20p = 1$ puis $p = \frac{1}{20}$.

On peut donc calculer $p(1) = p(6) = \frac{1}{20}$, $p(2) = p(5) = \frac{3}{20}$ et $p(3) = p(4) = \frac{6}{20}$.

Les 20 faces étant équiprobables, leur répartition est : 1 et 6 sur une seule face chacun, 2 et 5 sur trois faces chacun, 3 et 4 sur six faces chacun.

Problème ouvert 3 Série noire

En notant p la probabilité de tirer une boule blanche, alors la probabilité de tirer deux boules blanches lors de l'expérience est p^2.

D'après le tableau, $p^2 = \frac{25}{64}$. On en déduit que $p = \frac{5}{8}$.

En notant n le nombre de boules noires dans l'urne, on a alors : $\frac{10}{10+n} = \frac{5}{8}$.

Soit $8 \times 10 = 5 \times (10 + n) \Leftrightarrow 80 = 50 + 5n \Leftrightarrow n = 6$.
Il y a 6 boules noires dans l'urne.

Problème ouvert 4 Investigations

Une représentation en tableau permet une bonne comparaison. On choisit de mettre une étoile lorsque le témoin n'a rien vu.

Témoin n°1	AB *74 **
Témoin n°2	** 442 BL
Témoin n°3	AC 414 PL

❶ Les plaques dont le numéro ou la lettre a été vu par deux témoins au moins sont de la forme :
A* 4*4 *L
Il manque donc deux lettres et un chiffre, le nombre de possibilités est $26 \times 26 \times 10 = 6\,760$.

❷ Nombre de plaques possibles vues par témoin :
- premier témoin : $10 \times 26 \times 26 = 6\,760$
- deuxième témoin : $26 \times 26 = 676$
- troisième témoin : 1

Soit au total 7 437 plaques.

Corrigés des exercices et problèmes

QCM Pour bien commencer

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 347.

Exercices d'application

1 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 347.

2 **a.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30.
b. 0, 1, 2, 3, 4, 5.
c. 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3

x_i	0	1	3	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{13}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

4

x_i	0	1	2	3	4	8	10
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{102}$	$\frac{73}{102}$	$\frac{8}{102}$	$\frac{6}{102}$	$\frac{6}{102}$	$\frac{2}{102}$	$\frac{5}{102}$

5 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 347.

6 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 347.

7 **1. a.** $p = \frac{1}{16}$

b.

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

c.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. a. $p = \frac{1}{36}$

b.

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

c.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

8 a. $p(X{=}2)=2 \times p(X{=}1)$, donc $p(X{=}1) + p(X{=}2) + p(X{=}3) + p(X{=}4) + p(X{=}5) + p(X{=}6) = 9 \times p(X{=}1) = 1$.
D'où $p(X{=}1) = \frac{1}{9}$.

b.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

9 **a.**

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

b. $E(X) = 5{,}32$.

10 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 347.

11 **a.**

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

b. $E(X) = \frac{8}{3} \approx 2{,}667$.

12 **1.** Coût organisateur : $6 \times 3100 + 500 \times 52 + 2000 \times 12 = 68\,600$ €.
Nombre de participants minimal :

$$\frac{68600}{0{,}35} = 196\,000\,.$$

2. a.

x_i	0	12	52	3100
$p(X = x_i)$	$\frac{277\,494}{280\,000}$	$\frac{2\,000}{280\,000}$	$\frac{500}{280\,000}$	$\frac{6}{280\,000}$

b. $E(X) = 0{,}245$ €.
c. B = 0,35 – 0,245 = 0,105 €
d. B' = 0,35.

13 **a.**

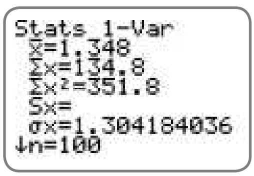
x_i	$-0{,}5$	1
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = -0{,}5 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = -0{,}125.$

b. $E(X) = n \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow n \times \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow n = -\frac{1}{3}.$

14
a. $p(X \geqslant 3) = 20{,}8\%$.
b. $E(X) = 1{,}348$
$\sigma(X) \approx 1{,}3$



15 **a.** La somme des probabilités fait 1.
b. $E(X) = \frac{19}{12}$. $E(Y) = \frac{18}{12} = 1{,}5$. $E(X) > E(Y)$ donc le premier jeu permet d'espérer des gains sensiblement meilleurs.
c. $\sigma(X) \approx 3{,}2$ et $\sigma(Y) \approx 5{,}4$. $\sigma(Y) > \sigma(X)$ donc les gains du second jeu sont plus variables, le risque est plus important d'obtenir des résultats éloignés de l'espérance.

16 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 347.

17 **a.**

x_i	-5	1	3	4	5	8
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

b. $E(X) = 1{,}25$. Le jeu n'est pas équitable.
c. $E(X) = P \times \frac{3}{12} + 1 \times \frac{3}{12} + 3 \times \frac{2}{12} + 4 \times \frac{2}{12} + 5 \times \frac{1}{12} + 8 \times \frac{1}{12} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P} \times \frac{3}{12} + \frac{30}{12} = 0 \Leftrightarrow P = -10.$

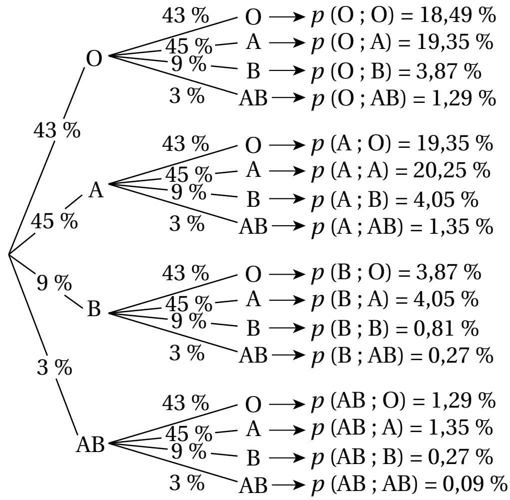
18 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 347.

19 **a.** $Y = 2012 - X$
b. $E(Y) = 2012 - E(Y) = 35$, $\sigma(Y) = |-1| \times \sigma(X) = 18$.

20 $a = 1$ ou -1.
Si $a = 1$ alors $b = 3$
Si $a = -1$ alors $b = 3 + 2E(X)$

21 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 347.

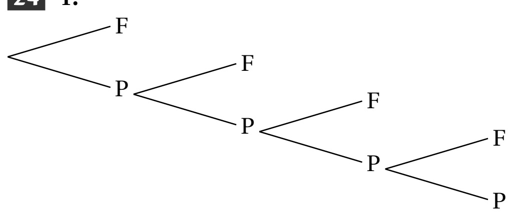
22 **1. a.**



b. $p1 = 67{,}51\%$
c. $p2 = 98{,}56\%$
2. On note M l'évènement contraire : «ne pas avoir le groupe O». $p(\mathrm{M}) = 57\%$.
On cherche le plus petit entier n tel que $p(\mathrm{M})^n < 5\%$.
$n = 6$. Il faut 6 personnes.

23 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 347.

24 **1.**



2. a.

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b. $E(X) = \frac{15}{8}$. On peut espérer lancer la pièce un peu moins de deux fois.
3. a.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

b. Jusqu'à l'avant dernière valeur de X,

$p(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une suite géométrique.

c. Il suffit de ne pas mettre de nombre de lancers maximum.

25 **1.** Pour la modélisation, voir exercice **24** avec 6 répétitions, les issues étant G et P.

2. $p = (85\%)^6 \approx 37{,}7\%$.

3. a.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	15%	12,25%	10,84%	9,21%	7,83%	44,87%

b. $E(X) \approx 4{,}17$. On peut espérer avoir la bonne réponse après environ quatre appels.

Raisonnement logique

26 **a.** Faux.
b. Vrai.
c. Faux.

27 **a.** Vrai.
b. Faux.
c. Vrai.
d. Faux.

28 **a.** Si toutes les valeurs de X sont dans l'intervalle $[3 ; 5]$, alors $E(X)$ est situé dans l'intervalle $[3 ; 5]$.
b. Si $E(X) = 7$ et $\sigma(X) = 2$ alors il existe des valeurs de X qui sont dans l'intervalle $[5 ; 9]$.
c. Si $\sigma(X) = 0$, toutes les valeurs de X sont égales à $E(X)$.

29 **1. a.** (P_2) : Si $E(X)$ est négatif, alors toutes les valeurs de X sont négatives.
a. (P_3) : Si $E(X)$ est positif, alors il existe des valeurs de X positives.
b. (P_4) : Si il existe des valeurs de X positives, alors $E(X)$ est positif.
2. a. $(P_1) \Leftrightarrow (P_3)$ et $(P_2) \Leftrightarrow (P_4)$.
b. (P_1) et (P_3) sont vraies, (P_2) et (P_4) sont fausses.

Restitution des connaissances

30 **a.** $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$

$= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i^2 - 2x_iE(X) + E(X)^2)$

$= \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i \times 2x_iE(X) + \sum_{i=1}^{n} p_i \times E(X)^2$

$= \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - 2E(X)\sum_{i=1}^{n} p_ix_i + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) \times E(X)^2$

$= \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - 2E(X) \times E(X) + 1 \times E(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - E(X)^2$

b. $E(X) = 3{,}3$

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i - (E(X))^2$

$= 0{,}1 \times 1^2 + 0{,}3 \times 2^2 + 0{,}4 \times 4^2 + 0{,}2 \times 5^2 - 3{,}3^2 = 1{,}81$.

Se tester sur...

QCM : Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 347.

Prêt pour le contrôle ?

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 347

Problèmes

35 **a.** Probabilité de gagner : $\frac{83274}{360000} \approx \frac{1}{4{,}32}$.

Gain total : $8 \times 1000 + 6 \times 200 + 560 \times 100 + 950 \times 15 + 9400 \times 5 + 28000 \times 2 + 44350 \times 1 = 226\,800$.

Part redistribuée : $\frac{226800}{360000} = 63\%$.

b.

x_i	–1	0	1	4
$p(X = x_i)$	$\frac{276726}{360000}$	$\frac{44350}{360000}$	$\frac{28000}{360000}$	$\frac{9400}{360000}$

x_i	14	99	199	999
$p(X = x_i)$	$\frac{950}{360000}$	$\frac{560}{360000}$	$\frac{6}{360000}$	$\frac{8}{360000}$

$E(X) = -0{,}37$.

36 **a.** $5 \times 5 \times 5 = 125$.

b. $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$.

c. $\frac{2}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{20}{1000} = \frac{1}{50}$

37 **1. a.** $p(\text{1 numéro}) = \frac{1}{37}$; $p(\text{parité}) = \frac{18}{37}$;

$p(\text{couleur}) = \frac{18}{37}$; $p(\text{douzaine}) = \frac{12}{37}$;

b. $E(\text{1 numéro}) = 36 \times \frac{1}{37} - 1 = -\frac{1}{37}$;

$E(\text{parité}) = 2 \times \frac{18}{37} - 1 = -\frac{1}{37}$;

$E(\text{couleur}) = 2 \times \frac{18}{37} - 1 = -\frac{1}{37}$;

$E(\text{1 numéro}) = 3 \times \frac{12}{37} - 1 = -\frac{1}{37}$.

2. Aucun, ils sont tous aussi défavorables.

3. a. $p = \left(\dfrac{18}{37}\right)^4 \approx 0{,}056$.

b. $p = \left(\dfrac{19}{37}\right)^4 \approx 0{,}070$.

38 ***Traduction***

Dans une urne se trouvent 10 boules bleues et 15 boules rouges.
1. Markus tire au hasard une boule de cette urne. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit bleue ?
2. La première boule tirée est remise et Markus tire une deuxième boule au hasard.
a. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient bleues.
b. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules bleues obtenues après deux tirages. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ? Déterminer la loi de probabilité de X.

Corrigé

1. $p = \dfrac{10}{25} = 0{,}4$.

2. a. $p' = 0{,}4^2 = 0{,}16$.
b. X prend les valeurs 0, 1 et 2.

x_i	**0**	**1**	**2**
$p(X = x_i)$	0,36	0,48	0,16

39 **1.** Aire de la cible : $\pi \times 9^2 = 81\pi$ avec une probabilité de 90%.

Aire de la zone jaune : $\pi \times 3^2 = 9\pi$, soit $\dfrac{1}{9}$ de l'aire de la cible d'où une probabilité de 10%.

Aire de la zone rouge : $\pi \times 6^2 - \pi \times 3^2 = 27\pi$, soit $\dfrac{1}{3}$ de l'aire de la cible d'où une probabilité de 30%.

2. a.

x_i	**0**	**3**	**5**	**7**
$p(X = x_i)$	10%	50%	30%	10%

b. $E(X) = 3{,}7$; $\sigma(X) \approx 1{,}8$.

3. a.

x_i	**0**	**3**	**5**	**6**	**7**	**8**	**10**	**12**	**14**
$p(X = x_i)$	1%	10%	6%	25%	2%	30%	19%	6%	1%

b. $E(Y) = 7{,}4$; $\sigma(X) \approx 2{,}5$.
Il semble que $E(Y) = 2 \times E(X)$.

40 **1.** $p = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \dfrac{1}{1024}$

2. $p_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2^n}$.

3. a. (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b. $\lim u_n = 0$. La probabilité qu'il joue indéfiniment est nulle.

41 **1. a.**

```
Tant que A≠6 faire
    Affecter à A la valeur d'un lancer de dé
```

b. En théorie cette boucle peut ne jamais finir car on peut ne jamais faire 6.

c.

```
Choisir la valeur de N
Pour i variant de 1 à N
   Affecter à A la valeur 0
   Affecter à S la valeur 0
   Tant que A≠6 faire
        Affecter à A la valeur d'un lancer
        de dé
        Affecter à S la valeur S + 1
        Mettre S dans la ième ligne de la
        liste L
Afficher un histogramme de la liste L
```

Voici un exemple de programmation avec une TI 83plus.fr. Cet exemple est simplifié par rapport à l'algorithme précédant en limitant le nombre de variables. Il impose aussi que le graphique soit paramétré pour afficher un histogramme de la liste L1.

2. a. En abscisse on retrouve le nombre de lancers réalisés avant d'obtenir un 6.
En ordonnée, l'effectif de ces séries.
b. Sur 20 lancers, la probabilité d'obtenir un 6 étant de $\dfrac{1}{6}$, on peut espérer que l'expérience s'arrête après seulement un coup $20 \times \dfrac{1}{6}$ fois, soit environ 3,3 fois. Donc 4 fois est un résultat cohérent.
c. L'expérience la plus longue a compté 14 lancers.
3. a. L'expérience s'arrête après un lancer si celui-ci donne un 6. La probabilité est donc $\dfrac{1}{6}$.

L'expérience s'arrête après deux lancers si le premier lancer ne donne pas 6 (probabilité $\dfrac{5}{6}$) et que le second donne un 6. La probabilité est donc $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{36}$.

b. L'expérience s'arrête après n lancers si les $n-1$ premiers lancers ne donnent pas 6 (probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$) et que le $n^{\text{ième}}$ lancer donne un 6. La probabilité est donc $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

4. a. Comme Charline a répété 400 fois l'expérience, le nombre théorique d'expériences se terminant après n lancers est : $400\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

b. Graphiquement la modélisation semble satisfaisante car l'histogramme et la courbe sont assez proches.

c. La limite de (u_n) est le nombre de lancers théorique tels que n tende vers $+\infty$, c'est-à-dire tel que l'expérience ne s'arrête jamais. On retrouve naturellement que $\lim u_n = 0$ car (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6} < 1$.

C'est l'occasion de comprendre le titre du problème.

10. Loi binomiale. Échantillonnage

Objectifs et pré-requis

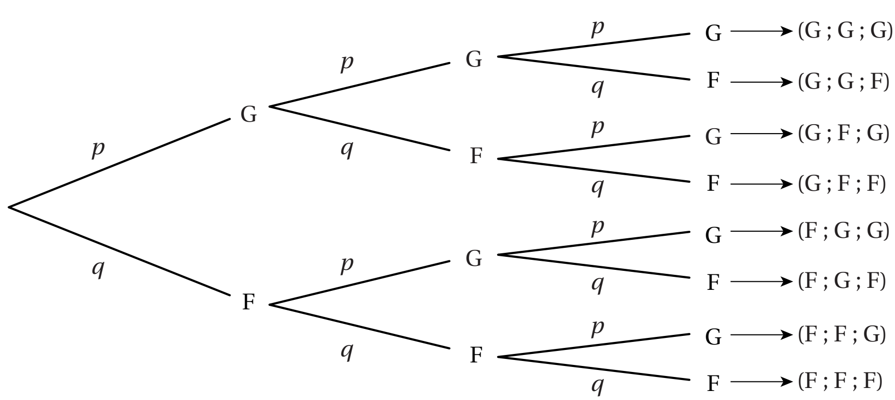
Extrait du programme (*Bulletin officiel spécial n°* 9 *du* 30 *septembre* 2010)

Contenus	**Capacités attendues**
Épreuve de Bernoulli. Loi de Bernoulli. Schéma de Bernoulli, loi binomiale (loi du nombre de succès). Coefficients binomiaux, triangle de Pascal.	• Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale. • Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale. • Démontrer que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ • Représenter graphiquement la loi binomiale. • Utiliser l'espérance de la loi binomiale dans des contextes variés.

Corrigés des activités

1 Probabilités en famille

1 **a.**



b. $p = \frac{1}{8}$

c. 3 issues

d. 3 issues

e. $p_1 = \frac{3}{8}$

2 **a.** 16 issues équiprobables de probabilités $\frac{1}{16}$.

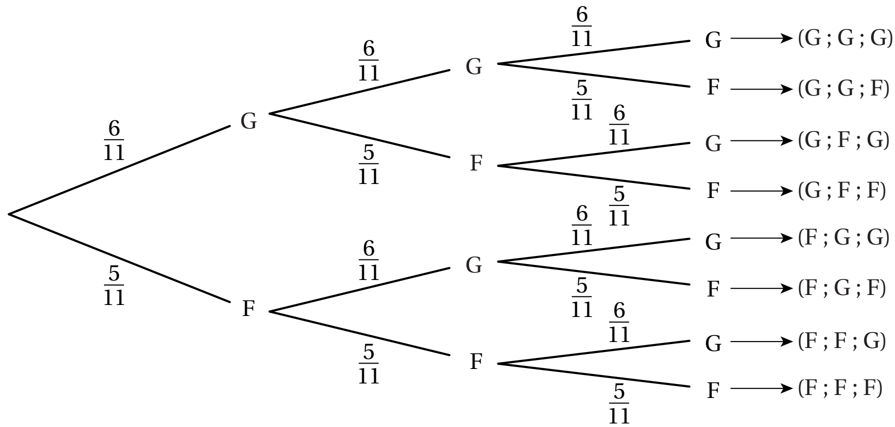
b. i) 3 possibilités

ii) 3 possibilités

iii) 6 possibilités

c. $p_2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

3 **a.**



b. $p(3\text{G}) = \left(\frac{6}{11}\right)^3 \approx 0{,}162$. $p(3\text{F}) = \left(\frac{5}{11}\right)^3 \approx 0{,}094$.

c. $p(\text{F} ; \text{F} ; \text{G}) = p(\text{G} ; \text{F} ; \text{F}) = p(\text{F} ; \text{G} ; \text{F}) = \frac{5}{11} \times \frac{5}{11} \times \frac{6}{11} = \frac{150}{1331}$.

$p(2\text{F}1\text{G}) = 3 \times \frac{150}{1331} \approx 0{,}338.$

2 Simulation d'un jet de brique

Partie A

1 Les différences que l'on observe sont dues à la fluctuation des observations.

2 0,37 0,45 0,18

Partie B

1 Il faudrait connaître les probabilités pour qu'une brique tombe à l'endroit, et à l'envers.

2 Les valeurs qui peuvent être obtenues dans A1 : entiers entre 1 et 100 ;
dans B1 : 1 ou 0 avec les probabilités respectives 0,37 et 0,63.

3 **a.** Formules demandées correspondant dans cet exemple à la ligne 33 du tableur.
Cellule C3 =SI(B3<=37 ; 1 ; 0)
Cellule D3 =SI(ET(B3>37 ; B3<83) ; 1 ; 0)
Cellule E3 =SI(B3>=83 ; 1 ; 0)
b. Ces cellules correspondent à une simulation du lancer d'une brique si les probabilités respectives sont de 0,37, 0,45 et 0,18

4 **a.** On ne peut pas savoir à partir d'une seule simulation. De plus on prend au départ des probabilités supposées de 0,37, 0,45 et 0,18
b. Algorithme : effectuer de nombreuses simulations, noter les variations des effectifs dans les différents cas et comparer ces effectifs aux 40/40/20 que Laurent a annoncés au 4e résultat.
c. On peut remarquer que sur de nombreuses simulations de 100 lancers l'effectif pour « endroit » atteint des valeurs parfois éloignées du nombre 37 attendu.

Corrigés des Travaux pratiques

TICE 1 Le triangle de Pascal

1 La ligne 2 et la colonne B ne sont pas nécessaires à la construction du triangle. Elles peuvent être saisies mais bien sûr on peut le faire à l'aide d'une formule.

Pour appliquer la construction du triangle avec la formule $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, il faut saisir les valeurs initiales de la ligne 3 et de la colonne C.

2 Pour construire le triangle, il suffit de saisir en D4 la formule =C3+D3, de la recopier vers la droite et vers le bas.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2	somme	n \ k		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	2	1	1	1									
4	4	2	1	2	1								
5	8	3	1	3	3	1							
6	16	4	1	4	6	4	1						
7	32	5	1	5	10	10	5	1					
8	64	6	1	6	15	20	15	6	1				
9	128	7	1	7	21	35	35	21	7	1			
10	256	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
11	512	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
12	1024	10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
13	2048	11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
14	4096	12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66

3 **a.** Les coefficients binomiaux $\binom{n}{n-2}$ sont en gris (en violet sur le CD) dans les cellules C4, D5, E6 … M14.

b. On les retrouve dans la colonne E (en bleu sur le CD), correspondant à $k = 2$ car $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$.

c. La colonne E est construite en ajoutant un à un les termes de la colonne D. Le $n^{\text{ème}}$ terme $\binom{n}{2}$ est donc obtenu en faisant la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

On a vu dans le chapitre sur les suites arithmétiques (Chap. 5) que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

En conclusion, $\binom{n}{n-2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

4 **b.** On peut conjecturer qu'à la ligne n, la somme des coefficients vaut 2^n.

c. Dans un schéma de Bernoulli, on répète n fois la même expérience à deux issues. Le nombre total d'issues est donc 2^n.

TICE 2 Probabilité d'une loi binomiale

1 **a.** La valeur de k est dans la cellule A5, celle de n dans la cellule B3 et celle de p dans la cellule C3.

b. La formule saisie en B5 est =COMBIN(B3 ; A5)*(C3^A5)*((1-C3)^(B3-A5)).

Les cellules sont en erreur lorsque $k > n$ car la combinaison $\binom{n}{k}$ n'est alors pas définie.

2 Pour calculer l'espérance, on utilise la formule $E(X) = n \times p$.

L'histogramme est construit avec les valeurs de la colonne B en ordonnées et celles de A en abscisses.

Il peut être intéressant de bloquer l'échelle des ordonnées pour mieux comparer les expériences à venir.

3 **b.** La valeur de X donnant la probabilité maximale coïncide avec l'espérance de la loi ou la valeur la plus proche de $E(X)$.

c. Comme $p = 0{,}5$, $p(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

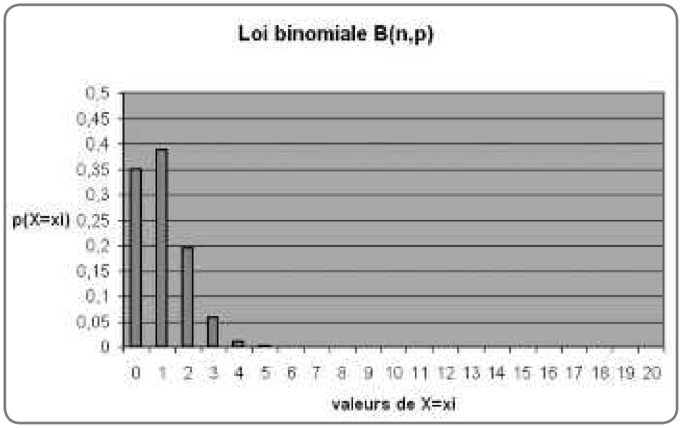
Or $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ d'où $p(X = k) = p(X = n - k)$, ce qui explique la symétrie observée.

4 **b.** Lorsque p augmente, la valeur de X donnant la probabilité maximale augmente aussi pour se situer autour de $E(X)$.

c. La plus petite valeur de p donnant la probabilité maximale pour $X = 0$ est $p = 0{,}077$ à 10^{-3} près.

5 **a.** Comme $E(X) = 1$, on a $p = \frac{1}{n}$. On peut donc saisir en C3 la formule =1/B3.

b. En faisant varier n, l'histogramme varie très peu de $n = 3$ à $n = 20$. *Ci-contre* le cas où $n = 10$.



c. Quand n augmente, $p(X = 0)$ et $p(X = 1)$ tendent vers la même valeur et $p(X = 2)$ tend vers la moitié de cette valeur.

d. On a $p = \frac{1}{n}$.

- $p(X=0) = \binom{n}{0}(p)^0(1-p)^n = 1\times 1\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
- $p(X=1) = \binom{n}{1}(p)^1(1-p)^{n-1} = n\times\frac{1}{n}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

On en déduit que $p(X = 0) = (1 - p) \times p(X = 1)$.

Lorsque n augmente, $p = \frac{1}{n}$ tend vers 0, d'où $p(X = 0)$ tend vers $p(X = 1)$.

TICE 3 Culture biologique

Partie A

1 **a.**, **b.**, **c.** et **d.** Les données permettent de trouver les proportions de pommes de terre intactes, rongées uniquement par une larve, grignotées uniquement par un campagnol ou rongées et grignotées à la fois. Ces proportions sont respectivement, $\frac{7}{8}\times\frac{2}{3}$, $\frac{1}{8}\times\frac{9}{10}$, $\frac{7}{8}\times\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{8}\times\frac{1}{10}$. Elles correspondent aux probabilités demandées.

2 Pour vérifier que le deuxième jardinier est parti des mêmes hypothèses que le premier, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} (1-a)(1-c) = \frac{7}{12} \\ a(1-b) = \frac{9}{80} \\ (1-a)c = \frac{7}{24} \\ ab = \frac{1}{80} \end{cases} \quad \text{qui a comme unique solution} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{10} \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Partie B

❶ ❷ et ❸. Les proportions sont :

f_L	f_C	f_{LC}
0,167	0,267	0,033

Notons X, Y et Z les variables aléatoires qui suivent les 3 lois binomiales indiquées.
Un tableur permet d'obtenir les résultats suivants :

k	P (X ⩽ k)
6	0,0146
7	0,0335

k	P(X ⩽ k)
20	0,9732
21	0,9855

k	P (Y ⩽ k)
24	0,0151
25	0,0254

k	P(Y ⩽ k)
44	0,9697
45	0,9807

k	P (Z ⩽ k)
0	0,0221

k	P(Z ⩽ k)
3	0,9355
4	0,9822

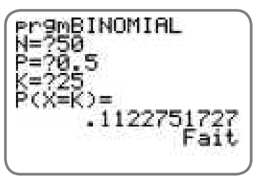
On en déduit les intervalles de fluctuation à 95% correspondants :
[0,06 ; 0,17], [0,21 ; 0,37] et [0 ; 0,033].
Ce qui permet d'accepter au seuil de 95 les hypothèses sur les probabilités.

Algorithmique 1 Loi binomiale et calculatrices

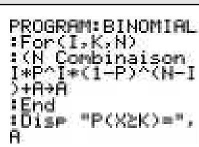
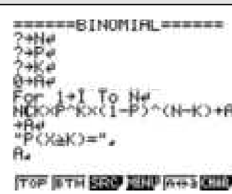
❶ **a.** Ce programme calcule $p(X = k)$.

b. n est le nombre de répétitions de l'expérience ; $n \in \mathbb{N}$.
p est la probabilité d'un échec ; p est un réel de l'intervalle [0 ; 1].
k est le nombre de succès que l'on considère ; k est un entier naturel inférieur ou égal à n.
A contient la probabilité $p(X = k)$. A est un réel de l'intervalle [0 ; 1].

c.

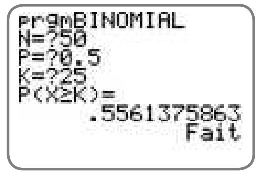


❷ **a.**

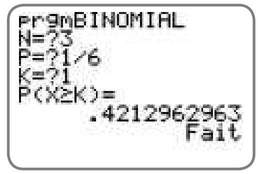
Avec TI83plus.fr	Avec Casio graph35+
	

b. On retrouve $p(X \geqslant 0) = 1$.

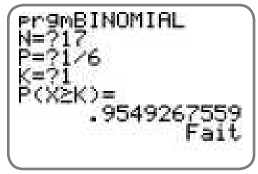
c. La probabilité d'obtenir plus de « pile » que de « face » devrait être intuitivement de 0,5, mais il faut considérer le cas où il y a autant de « pile » que de « face » (voir question 2. c.), qui est inclus dans le calcul de $p(X \geqslant 25)$.
Une répartition symétrique donne en réalité :
$p(X < 25) \approx 0{,}444$, $p(X = 25) \approx 0{,}112$. $p(X > 25) \approx 0{,}444$.



d. • On exécute l'algorithme avec $n = 3$,
$p = \dfrac{1}{6}$ et $k = 1$.



• Il faut aller jusqu'à $n = 17$ pour que la probabilité de réaliser au moins un 6 soit supérieure à 95 %.

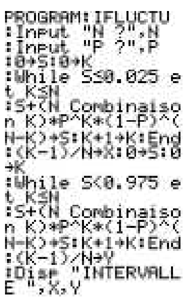


ALGORITHME 2 Intervalle de fluctuation

1 **a.** Il faut connaitre les deux paramètres de la loi binomiale.
b.

```
Entrée :        Les paramètres n et p pour la loi binomiale utilisée
Traitement :    Déterminer le plus petit a tel que P(X<=a)>0,025
Sortie :        Déterminer le plus petit b tel que P(X<=b)>=0,975
                Afficher les bornes a/n et b/n de l'intervalle
```

2 Les programmes sur calculatrices sont :

<table>
<tr><th>Avec TI83plus.fr</th><th>Avec Casio graph35+</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

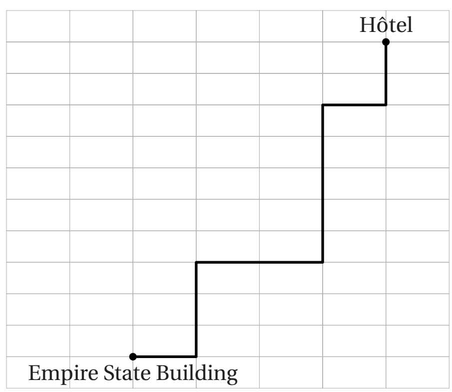
Un programme sous Scilab :

```
lines(0)
//Entrée
n=input("Entrer un entier n : ");
p=input("Entrer un nombre réel p : ");

// Recherche du plus petit a tel que P(X<=a)>0,025
s=0; k=0;
while s<=0.025 & k<=n
  s=s+combinaison(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k);
  k=k+1
end
x=(k-1)/n;

// Recherche du plus petit b tel que P(X<=b)>=0,975

s=0; k=0;
while s<=0.975 & k<=n
  s=s+combinaison(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k);
  k=k+1
end
y=(k-1)/n;

afficher (x,y,"l intervalle est")
```

3

```
Entrée :          Les paramètres n et p pour la loi binomiale utilisée
Traitement :      La valeur f de l'hypothèse à vérifier
                  Déterminer le plus petit a tel que P(X<=a)>0,025
                  Déterminer le plus petit b tel que P(X<=b)>=0,975
Sortie :          Si f appartient à l'intervalle [a/n ; b/n]
                     afficher « Au seuil de 0,95, l'hypothèse est vérifiée »
                  sinon
                     afficher « Au seuil de 0,95, l'hypothèse n'est pas vérifiée »
```

Problème ouvert 1 New York, New York



De la 34^e à la 24^e rue, ils doivent parcourir 10 pâtés d'immeubles et de la 5^e à la 1^{re} avenue, 4 pâtés d'immeubles.

Pour que l'itinéraire soit le plus court, ils doivent se déplacer toujours dans le même sens suivant les rues et les avenues. Tous les chemins obtenus sont alors de même longueur.

Les itinéraires peuvent être assimilés à une suite de 14 déplacements : 10 pour changer de rue et 4 pour changer d'avenue.

Prendre un itinéraire revient à choisir quand changer d'avenue dans les 14 déplacements.

On dénombre alors ces itinéraires avec une combinaison :

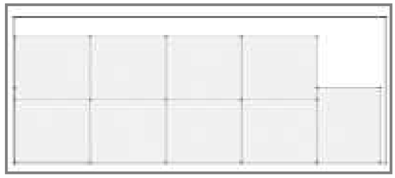
$\binom{14}{4}$ = 1 001 itinéraires possibles.

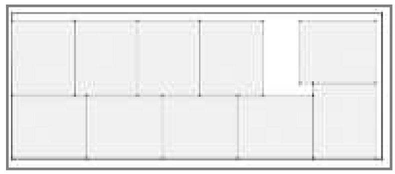
Problème ouvert 2 **Palettes**

1 Avant de décompter le nombre de cartons, quelques remarques :

- les palettes doivent rester horizontales ;
- dans les dimensions indiquées, la hauteur est 84,7cm car la base d'une palette dite « européenne » a comme dimensions standards 120 cm × 100 cm ;
- la masse par palette ne dépassera pas $\dfrac{92 \times 112 \times 65,4}{40 \times 30 \times 20} \times 20 \approx 562$ kg et le nombre de palettes à empiler sera au maximum de 2 donc aucun problème avec les restrictions pour les charges.

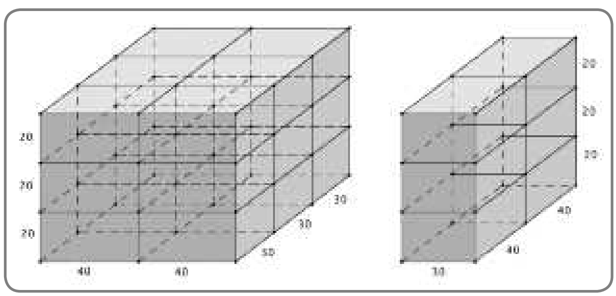
Décompte du nombre de palettes





En hauteur : $\dfrac{234}{84,7} \approx 2,7$. Donc 2 palettes, au maximum, en hauteur.
En longueur et largeur : les calculs $\dfrac{590,5}{120} \approx 4,9$ et $\dfrac{233}{100} = 2,33$ permettent de voir que l'on peut poser au moins 8 palettes sur le sol du conteneur. Des schémas permettent d'ajuster ce nombre à 9 puis à 10.
Avec 10 palettes, l'aire de la surface au sol restante ne peut plus être occupée par une palette, puisqu'après avoir enlevé la bande longitudinale, elle représente 0,7 fois l'aire occupée par une palette ; on ne pourra donc pas en mettre plus.

Décompte du nombre de cartons par palette
Il y a 6 sens possibles pour ranger les cartons :
• longueur carton dans le sens longueur palette et largeur carton dans le sens largeur palette ;
• longueur carton dans le sens longueur palette et hauteur carton dans le sens largeur palette,….
Parmi ces 6 sens, un calcul permet de voir que le maximum de 18 cartons est atteint dans deux situations :
• longueur carton dans le sens longueur palette et largeur carton dans le sens largeur palette ;
• largeur carton dans le sens longueur palette et longueur carton dans le sens largeur palette.



Un schéma permet de se rendre compte que la place disponible reste importante dans la première des solutions ; on arrive alors à ajouter 6 cartons.

Comme le volume finalement disponible ne représente plus que 4 cartons par palette, on ne peut espérer mettre plus que 24 cartons.
Avec ces propositions, on atteint largement ce que demande l'énoncé : $10 \times 2 \times 24 = 480$ cartons.

2 Comme il s'agit de la prise d'un échantillon de taille 480 où chaque élément a une probabilité de 0,05 d'être défectueux, le nombre de cartons défectueux dans le conteneur suit la loi binomiale de paramètre 480 et 0,05.
• Comme $p(X \leqslant 14) = 0,017$ et $p(X \leqslant 15) = 0,031$, le plus petit entier a tel que $p(X \leqslant a) > 0,025$ est 15.
• Comme $p(X \leqslant 33) = 0,972$ et $p(X \leqslant 34) = 0,982$, le plus petit entier b tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ est 34.
Donc, au seuil de 0,95, l'intervalle de fluctuation du nombre de cartons défectueux dans le conteneur est [15 ; 34].

Corrigés des exercices et problèmes

QCM Pour bien commencer

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 348.

Exercices d'application

1 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 348

2 **a.** Par exemple : fille = succès, alors $p = \dfrac{10}{17}$.

b. Par exemple : roi = succès, alors $p = \dfrac{4}{32}$.

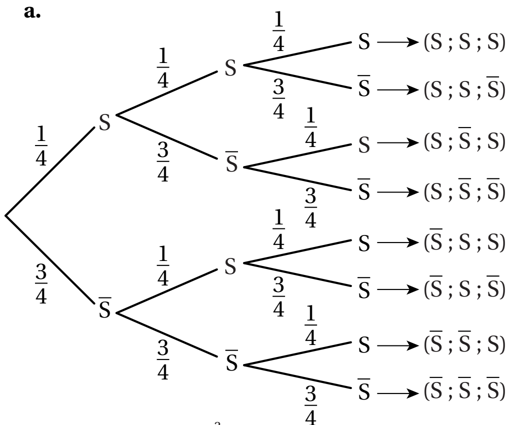
c. Par exemple : rouge = succès, alors $p = \dfrac{10}{25}$.

3 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 348.

4 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 348.

5

a.



b. $p(\text{S} ; \text{S} ; \text{S}) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{64}$.

c. $p(\overline{\text{S}} ; \overline{\text{S}} ; \text{S}) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{64}$.

d. $p(1\text{S}) = 3 \times p(\overline{\text{S}} ; \overline{\text{S}} ; \text{S}) = 3 \times \dfrac{9}{64} = \dfrac{27}{64}$.

e. $p = 1 - p(\overline{\text{S}} ; \overline{\text{S}} ; \overline{\text{S}}) = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = 1 - \dfrac{27}{64} = \dfrac{37}{64}$.

6 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 348.

7 **a.** De quatre façons

b. De six façons

8 **1. a.** $\dbinom{17}{0} = 1$ **b.** $\dbinom{17}{1} = 17$

c. $\dbinom{17}{17} = 1$ **d.** $\dbinom{17}{16} = 17$

2. a. $\dbinom{17}{9} = \dbinom{17}{8} = 24\,310$

b. $\dbinom{18}{9} = \dbinom{17}{8} + \dbinom{17}{9} = 48\,620$

9 **a.**

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\dbinom{8}{k}$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \dbinom{8}{k} = 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1$

$= 256 = 2^8$.

Cette somme décrit l'ensemble des issues du schéma de Bernoulli, il y en a 2^8 car il y a 8 répétitions d'une expérience à 2 issues.

10 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 348.

11 **a.**

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\dbinom{10}{k}$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

b.

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\dbinom{13}{k}$	1	13	78	286	715	1287	1716

k	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
$\dbinom{13}{k}$	1716	1287	715	286	78	13	1

12 On peut compléter le tableau :

1	**19**	171	969	3876
	20	190	1140	4845
		210	1330	5985

On en déduit que $n = 19$ et $k = 2$.

13 **1.** $\dbinom{3}{0} - \dbinom{3}{1} + \dbinom{3}{2} - \dbinom{3}{3} = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$

$\dbinom{4}{0} - \dbinom{4}{1} + \dbinom{4}{2} - \dbinom{4}{3} + \dbinom{4}{4} = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0.$

On conjecture que les sommes alternées sont toujours nulles.

2.

a. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

$=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+\binom{n}{2}-\binom{n}{1}+\binom{n}{0}=0$.

b. A l'aide de la relation $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$, on obtient :

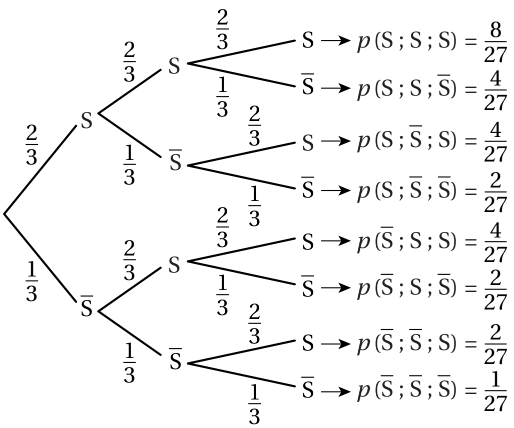
$\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}-\ldots-\binom{n+1}{n-1}+\binom{n+1}{n}-\binom{n+1}{n+1}$

$=\binom{n+1}{0}-\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)+\left(\cancel{\binom{n}{1}}+\cancel{\binom{n}{2}}\right)\ldots+\left(\cancel{\binom{n}{n-1}}+\binom{n}{n}\right)-\binom{n+1}{n+1}$

$= 1 - 1 + 1 - 1 = 0$.

3. Pour tout entier n on a $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

14 **a.**



b. $p_1=\frac{1}{27}$

c. $p_2 = 1 - p_1 = \frac{26}{27}$

d. $p(\overline{S} ; \overline{S} ; S) = \frac{2}{27}$

e. $p_3 = 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$

2. **a.** X suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(3 ; \frac{2}{3}\right)$ car le sportif répète trois fois la même expérience dont le succès a pour probabilité $\frac{2}{3}$.

b. $p(X{=}1)=\binom{3}{1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$.

15 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 348.

16 p(3 «pile»en 7 lancers)

$=\binom{7}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{2^7}$.

p(4 «pile»en 8 lancers) $=\binom{8}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{2^7}$.

Les deux sont aussi probables.

17 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 348.

18 **a.** $p(X=1)=\binom{10}{1}\times\left(\frac{5}{16}\right)^1\times\left(\frac{11}{16}\right)^9\approx 0{,}107$.

b. $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$

$= 1-\binom{10}{0}\times\left(\frac{5}{16}\right)^0\times\left(\frac{11}{16}\right)^{10}\approx 0{,}976$.

19 **1.** $p(X = 6) = p^6$.

2. **a.** $p^6 > 0{,}5 > \Leftrightarrow p > \sqrt[6]{0{,}5} > 0{,}89$.

b. $p=\frac{n}{n+1}$ donc $\frac{n}{n+1}>0{,}89 \Leftrightarrow n > 0{,}89n + 0{,}89$

$\Leftrightarrow n > \frac{0{,}89}{0{,}11}$, Comme n est entier, il faut au moins 9 boules blanches.

c. $p(X = 6) = 0{,}9^6 \approx 0{,}53$

20 **a.** $E(X) = 7 \times 0{,}85 = 5{,}95$. Il peut espérer en passer 6.

b. $p(X \geqslant 5) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7)$

$=\binom{7}{5}\times 0{,}85^5\times 0{,}15^2+\binom{7}{6}\times 0{,}85^6\times 0{,}15^1+\binom{7}{7}$

$\times 0{,}85^7\times 0{,}15^0\approx 0{,}926$.

21 **1.** **a.** X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(8 ; \frac{1}{4})$ car l'on répète 8 fois la même expérience (répondre au hasard à une question) dont le succès a pour probabilité $\frac{1}{4}$.

b. $p(X=4)=\binom{8}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{5670}{65536}\approx 0{,}086$.

2. **a.** On peut établir le tableau des points :

Nombre de bonnes réponses	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de points	−4	−2,5	−1	0,5	2	3,5	5	6,5	8

Puis la loi de Y :

y_i	**−4**	**−2,5**	**−1**	**0,5**	**2**
$p(Y=y_i)$	$\frac{6561}{65536}$	$\frac{17496}{65536}$	$\frac{20412}{65536}$	$\frac{13608}{65536}$	$\frac{5670}{65536}$

y_i	**3,5**	**5**	**6,5**	**8**
$p(Y=y_i)$	$\frac{1512}{65536}$	$\frac{252}{65536}$	$\frac{24}{65536}$	$\frac{1}{65536}$

b. $E(Y) = -1$. $\sigma(Y) \approx 1{,}83$. On peut espérer obtenir un score de -1 en répondant au QCM au hasard, avec peu de chance d'obtenir un score positif.

3. $p = \frac{1}{2}$.

$P(X=4) = \binom{8}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{70}{256} \approx 0{,}273$.

y_i	−4	−2,5	−1	0,5	2	3,5
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$

y_i	5	6,5	8
$p(Y = y_i)$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

$E(Y) = 2$. $\sigma(Y) \approx 2{,}1$. On peut espérer obtenir un score de 2 en répondant au Vrai/Faux au hasard. L'issue est plus favorable pour le candidat.

22 **1.** X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(5\,;\,0{,}9)$ car l'on répète 5 fois la même expérience dont le succès a pour probabilité 0,9.

2. a.

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,00001	0,00045	0,00810	0,07290	0,32805	0,59049

b. $p(X \leqslant 4) = 1 - p(X = 5) = 1 - 0{,}59049 = 0{,}40951$

c. $p(X \geqslant 3) = 0{,}07290 + 0{,}32805 + 0{,}59049 = 0{,}99144$.

3. $E(X) = 5 \times 0{,}9 = 4{,}5$. Le tireur peut espérer atteindre 4,5 cibles en moyenne.

23 On étudie la fonction :
$V(p) = npq = np(1-p) = np - np^2$.
V est un polynôme de degré 2 qui admet un maximum (car $a = -n < 0$)

$$\text{pour } p = -\frac{b}{2a} = -\frac{n}{2(-n)} = \frac{1}{2}.$$

24 $np = 0{,}4$ et $npq = 0{,}6^2 = 0{,}36$. On en déduit $q = \frac{0{,}36}{0{,}4} = 0{,}9$. d'où $p = 0{,}1$ et $n = 4$.

25 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 348.

26 **a.** Le nombre de baguettes « parfaites » dans un panier est un entier compris entre 0 et 40.

b. f peut prendre comme valeur les 41 nombres suivants : 0, $\frac{1}{40}$, $\frac{2}{40}$, $\frac{3}{40}$ …, $\frac{39}{40}$, et 1.

27 **1.** Cette somme vaut 1 car l'événement « $0 \leqslant X \leqslant 40$ » est un événement certain.

2. a. 0,9568 **b.** 0,9806

c. 0,9921 **d.** 0,9971

3. a. α vaut 13, 14, 15 …..40. **b.** $\beta = 13$

28 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 348.

29 [0,02 ; 0,08]

30

Catégorie	S	M	L	XL
Intervalle de fluctuation	[1 ; 10]	[40 ; 60]	[26 ; 44]	[1 ; 8]

31 **a.** Loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}25$.

b. Intervalle de fluctuation : [0,14 ; 0 ,38]

32 **1. a.** a = 2

b. =SI(ET(C3>0,025 ;C2<=0,025) ; " a " ;"")

2. =SI(ET(C3>=0,975 ;C2<0,975) ; " b" ;"")

3. =SI(ET(C3>0,025 ;C2<=0,025) ; "a" ; SI(ET(C3>=0,975 ;C2<0,975) ; " b" ;"")

33 **a.** Intervalle de fluctuation : [0,32 ; 0 ,48].

b. Règle de décision : soit p la fréquence de l'échantillon.
Si p appartient à [0,32 ; 0,48], on accepte l'hypothèse que le réglage est de 40%.
Si p n'appartient pas à [0,32 ; 0,48], on réfute l'hypothèse que le réglage est de 40%.

c. 0,45 est dans l'intervalle [0,32 ; 0,48], donc on accepte au seuil 0,95 l'hypothèse que le réglage est de 40%.
Pour les bonbons non acidulés, l'intervalle de fluctuation est [0,52 ; 0 ,68].
0,55 est dans l'intervalle [0,52 ; 0,68] donc on accepte l'hypothèse que le réglage est de 40%.

34 Cet exercice est corrigé dans le manuel p. 348.

35 **a.** Il s'agit d'une épreuve à deux issues possibles reproduite de manière indépendante 50 fois. Donc X, le nombre de paires qui contiennent du coton dans un échantillon de taille 50, suit la loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0{,}9$.

b. [41 ; 49] car

k	$p(X \leqslant k)$	k	$p(X \leqslant k)$
40	0,0245	48	0,9662
41	0,0579	49	0,9948

c. Intervalle de fluctuation des fréquences [0,82 ; 0,98] ; $\frac{40}{50} = 0{,}8$. Le client n'a pas raison d'affirmer que l'affichage est mensonger mais peut, au seuil de 0,95, rejeter l'hypothèse que la proportion initiale était de 90%.

36 (1) X, le nombre de personnes chez qui le médicament est efficace parmi un échantillon de 57, suit la loi binomiale de paramètres $n = 57$ et $p = 0,85$.
(2) L'intervalle de fluctuation des fréquences au seuil de 0,95 est [0,75 ; 0,93]
car $\frac{43}{57} = 0,75$ et $\frac{53}{57} = 0,93$

k	$p(X \leqslant k)$
42	0,0187
43	0,0394

k	$p(X \leqslant k)$
52	0,9427
53	0,9790

Si la proportion p des personnes chez qui le médicament est actif est compris entre 0,75 et 0,93, on accepte l'hypothèse que la médicament est efficace dans 85% des cas au seuil de 0,95. Sinon on rejette l'hypothèse.
(3) $\frac{42}{57} = 0,737$.
(4) Au seuil de 0,95 on peut affirmer que ces statistiques ne sont pas conformes à l'affirmation du laboratoire.

37 **1. a.** X_F suit la loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,51$.
L'intervalle de fluctuation des fréquences au seuil de 0,95 est [0,41 ; 0,61] car :

k	$p(X \leqslant k)$
40	0,0177
41	0,0285

k	$p(X \leqslant k)$
60	0,9717
61	0,9825

b. X suit la loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,40$.
L'intervalle de fluctuation des fréquences au seuil de 0,95 est [0,31 ; 0,50] car :

k	$p(X \leqslant k)$
30	0,0248
31	0,0398

k	$p(X \leqslant k)$
49	0,9729
50	0,9832

2.
Règle de décision pour les canadiennes
Si p la proportion de FL dans un échantillon de taille 100 est dans l'intervalle [0,41 ; 0,61], on accepte au seuil 0,95 l'hypothèse que la situation n'a pas changée, sinon on la rejette.
Règle de décision pour les canadiens
Si p la proportion de FL dans un échantillon de taille 100 est dans l'intervalle [0,31 ; 0,50], on accepte au seuil 0,95 l'hypothèse que la situation n'a pas changée, sinon on la rejette.
Pour les canadiennes on accepte donc l'hypothèse que la proportion n'a pas changée, par contre pour les canadiens on rejette cette hypothèse.

38 Loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,5$.
L'intervalle de fluctuation des fréquences au seuil de 0,95 est : [0,4 ; 0,6] car :

k	$p(X \leqslant k)$
39	0,0176
40	0,0284

k	$p(X \leqslant k)$
59	0,9716
60	0,9824

0,66 n'appartient pas à [0,4 ; 0,6] donc on peut rejeter au seuil 0,95 l'hypothèse que la pièce est équilibrée mais …on ne peut pas affirmer que Théo a triché.

39 **a.** Il suffit de donner un exemple. $n = 20$ et $p = 0,2$.
L'intervalle de fluctuation des fréquences pour les boules blanches au seuil de 0,95 est [0,05 ; 0,40] car :

k	$p(X \leqslant k)$
0	0,0115
1	0,0692

k	$p(X \leqslant k)$
7	0,9679
8	0,9900

L'intervalle de fluctuation des fréquences pour les boules noires au seuil de 0,95 est [0,60 ; 0,95] car :

k	$p(X \leqslant k)$
11	0,0100
12	0,0321

k	$p(X \leqslant k)$
18	0,9308
19	0,9885

b. Pour $p = 0,5$ les deux intervalles sont les mêmes pour tout n entier naturel non nul car les deux lois binomiales sont les mêmes.

Raisonnement logique

40 **a.** Vrai. Les trois lancers de dés sont identiques et indépendants, on peut considérer l'issue 6 comme un succès.
b. Faux. La somme ne correspond pas au nombre de succès d'une expérience.
c. Vrai. En considérant comme un succès l'issue d'un lancer de dé donnant un multiple de 3.
d. Faux, la parité n'est pas une information numérique.

41 **a.** Faux. $p(X=1) = \binom{2}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$.
b. Vrai . $E(X) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.
c. Faux. $\sigma(X) = \sqrt{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

42 **a.** Faux
b. Vrai
c. Faux
d. Vrai : les valeurs d'une loi de probabilité de paramètres n et 0,5 sont toujours symétriques par rapport à $\frac{n}{2}$.

$$p(X = k) = \binom{n}{k} 0,5^{k}\, 0,5^{n-k} = \binom{n}{n-k} 0,5^{k}\, 0,5^{n-k} = p(X = n - k).$$

e. Faux : la formule vue en seconde permet de le constater mais on peut prendre un exemple :
$n = 100$ $p = 0{,}5$: intervalle de fluctuation $[0{,}4 ; 0{,}6]$ d'étendue 0,2.
$n = 200$ $p = 0{,}5$: intervalle de fluctuation $[0{,}43 ; 0{,}57]$ d'étendue 0,14.

43 **a.** Pour tout k compris entre 0 et n,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

b. Il existe p compris entre 0 et 1 tel que :

$$p(X = k) = p(X = n - k)$$

c. Pour tout k compris entre 0 et 2012,

$$\binom{2012}{k} \leq \binom{2012}{1006}.$$

Restitution des connaissances

44 **a.** $\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}$

$$= \underbrace{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}}+\underbrace{\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}}$$

$$= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+2}$$

b. $\binom{n}{k}+3\binom{n}{k+1}+3\binom{n}{k+2}+\binom{n}{k+3}$

$$= \underbrace{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}}+2\underbrace{\left(\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}\right)}+\underbrace{\binom{n}{k+2}+\binom{n}{k+3}}$$

$$= \binom{n+1}{k} + 2\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} = \binom{n+3}{k+3}$$

d'après **a.**

c. $\binom{7}{3} = \binom{4}{0}+3\binom{4}{1}+3\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$

$= 1 + 3 \times 4 + 3 \times 6 + 4 = 35.$

45 Si $a = 0$, $p(X \leqslant 0) > 0{,}025 \Leftrightarrow \binom{n}{0} 0{,}5^n > 0{,}025$

$\Leftrightarrow 2^n < \dfrac{1}{0{,}025} \Leftrightarrow 2^n < 40 \Leftrightarrow n < 5.$

Se tester sur…

QCM : Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 348.

Prêt pour le contrôle ?

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p. 348

Problèmes

57 **1.** $p = \dfrac{3}{4}$

2. $E(X) = n \times \dfrac{3}{4} = 6 \Leftrightarrow n = 8.$

3. a. $p(X{=}1) = \binom{n}{1} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^1 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = \dfrac{3n}{4^n}.$

b. $n = 6.$

58 **1. a.** X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(3 ; 0{,}3)$ car l'on répète 3 fois la même expérience dont le succès a pour probabilité 0,3.

b. $p(X = 2) = \binom{3}{2} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^1 = 0{,}189 = 18{,}9\%$

2. a. On peut établir le tableau de correspondance entre X et Y :

Nombre de paires de jumeaux X	0	1	2	3
Nombre d'enfants Y	3	4	5	6
$\boldsymbol{p(Y = y_i) = p(X = x_i)}$	0,343	0,441	0,189	0,027

b. $E(X) = 3{,}9$ et $\sigma(X) = 0{,}79$.
Le couple peut espérer avoir quatre enfants mais le risque d'en avoir 3 ou 5 reste important.

59 **1. a.** X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(10 ; \dfrac{1}{2})$ car l'on répète 10 fois la même expérience dont le succès a pour probabilité $\dfrac{1}{2}$.

b. $p(X{=}k) = \binom{10}{k} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10-k} = \dfrac{\binom{10}{k}}{1024}.$

c. $p(4 \leqslant X \leqslant 6) = p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) =$

$$\frac{\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}}{1024} = \frac{210+252+210}{1024} = \frac{21}{32}.$$

d. $p = 1 - \dfrac{21}{32} = \dfrac{11}{32}.$

2. $p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \left(\dfrac{23}{32}\right)^6 \approx 0{,}86.$

60 ***Traduction***

Une fontaine ornementale est représentée ci-contre. Chaque vasque se remplit d'1L d'eau puis déborde et s'écoule de manière régulière dans les deux vasques inférieures.
Au début les vasques sont vides.
Combien de litres d'eau doit-on verser dans la vasque 1 pour que la vasque 5 soit complètement remplie ? Et pour que la vasque 4 soit pleine ? et la 8 ? Expliquez vos réponses.

Corrigé

Pour que la vasque 5 soit pleine, il faut verser 5L dans la vasque 1.

Pour que la vasque 4 soit pleine, il faut verser 7L dans la vasque 1.

Pour que la vasque 8 soit pleine, il faut verser $7\text{L} + \frac{4}{3}$ L dans la vasque 1.

61 **a.**

$$p(X=0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{n}\right)^0 \times \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n .$$

b. $p(X=1) = \binom{n}{1}$

$$\times \left(\frac{1}{n}\right)^1 \times \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = n \times \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} .$$

c. La première suite semble croissante et la seconde décroissante. Elles semblent converger vers la même limite, environ 0,36.

d. Si $\lim p(X=0) = \lim p(X=1)$, alors

$$\lim \frac{p(X=0)}{p(X=1)} = 1 .$$

Lorsque n devient grand, il y a autant de chance d'obtenir 0 ou 1 succès.

62 **1. a.** Il s'agit d'une répétition de 25 épreuves identiques à deux issues de manière indépendante. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0{,}15$.

b. $E(X) = 3{,}75$; $\sigma_X \approx 1{,}785$.

2. a. $p(E(X) - \sigma \leqslant X \leqslant E(X) + \sigma) = p(1{,}9 \leqslant X \leqslant 5{,}5)$

$$= \sum_{k=2}^{k=5} P(X=k) = 0{,}745$$

b. $p(E(X) - 2\sigma \leqslant X \leqslant E(X) + 2\sigma) = p(0{,}1 \leqslant X \leqslant 7{,}3)$

$$= \sum_{k=1}^{k=7} P(X=k) = 0{,}957$$

c. $p(E(X) - 3\sigma \leqslant X \leqslant E(X) + 3\sigma) = p(-1{,}6 \leqslant X \leqslant 9{,}1)$

$$= \sum_{k=0}^{k=9} P(X=k) = 0{,}998.$$

3. Il faudrait qu'il y ait moins de 10 rouleaux à défauts dans le carton. A partir des hypothèses on sait que $p(X \leqslant 10) = 0{,}9995$. Ceci donne la probabilité pour que l'entreprise puisse tenir son engagement.

63 **1. a.**

k	0	1	2	3	4	5
$p(X=k)$	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246

k	6	7	8	9	10
$p(X=k)$	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001

b. Intervalle de fluctuation fréquence : [0,2 ; 0,8].

c. 0,8-0,2 = 0,6.

2. a.

n	10	100	500	1000	2000	5000
Étendue	0,6	0,2	0,088	0,062	0,044	0,028

b.

n	10	100	500	1000	2000	5000
$\dfrac{\textbf{Étendue}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$	1,8974	2	1,96773982	1,96	1,968	1,952

c. $\dfrac{\text{Étendue}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ vaut environ 2 donc Étendue $\approx \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

d. $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 10^{-2} \Leftrightarrow n > 40000$

64 **1. a.** $4 - 100 = -96$.

b. $E(X) = -\dfrac{96}{36} + 4 \times \dfrac{35}{36} = 1{,}22$.

c. Non car elle a une probabilité de $\dfrac{1}{36}$ de perdre 96 €.

2. a. Il s'agit d'une répétition de 140 épreuves identiques à deux issues de manière indépendante. Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 140$ et $p = \dfrac{1}{36}$.

b. $[a_1 ; b_1]$ est [1 ; 8] car :

k	$p(Y \leqslant k)$
0	0,0194
1	0,0969

k	$p(Y \leqslant k)$
7	0,9576
8	0,9833

c. Gain algébrique avec $a_1 = 1$ gagnant :

$$139 \times 4 - 96 = 460.$$

Gain algébrique avec $a_2 = 8$ gagnants :

$$132 \times 4 - 8 \times 96 = -240.$$

d. Non, car la probabilité qu'elle perde de l'argent n'est pas négligeable.

3. a. Z suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 140 \times 20 = 2800$ et $p = \dfrac{1}{36}$.

b. $[a_2 ; b_2]$ est [61 ; 95] car :

k	$p(X \leqslant k)$
60	0,0203
61	0,0273

k	$p(X \leqslant k)$
94	0,9699
95	0,9765

c. Gain algébrique avec $a_2 = 1$ gagnant :

$$(2800 - 61) \times 4 - 61 \times 96 = 5100.$$

Gain algébrique avec $a_2 = 8$ gagnants :

$$(2800 - 95) \times 4 - 95 \times 96 = 1700.$$

d. L'association n'est quand même pas certaine de ne pas être perdante.

65 Le nombre de clients non satisfaits dans un échantillon de taille 668 suit une loi binomiale de paramètres $n = 668$ et $p = 0{,}04$.
L'intervalle de fluctuation des effectifs au seuil 0,95 pour de tels échantillons est [17 ; 37] car :

k	$p(X \leqslant k)$
16	0,0164
17	0,0283

k	$p(X \leqslant k)$
36	0,9686
37	0,9793

Comme 12 n'est pas dans l'intervalle [17 ; 37], on peut rejeter l'hypothèse que le taux de clients non satisfaits est resté à 4%.

66 **A. 1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}5$.
2. $p(X = 75) = 0{,}065$
3. a. et **b.**
$p(63 \leqslant X \leqslant 87) = 0{,}9592$ $p(62 \leqslant X \leqslant 86) = 0{,}9564$
$p(64 \leqslant X \leqslant 88) = 0{,}9564$
c.

$[a\,;b]$	[63 ; 87]	[62 ; 86]	[64 ; 88]
$p(X \leqslant a - 1)$	0,02	0,014	0,030
$p(X \geqslant b + 1)$	0,02	0,030	0,014

[63 ; 87] est celui des 3 qui a en plus les deux probabilités $p(X \leqslant a-1)$ et $p(X \geqslant b + 1)$ inférieures à 0,025
4. L'intervalle de fluctuation des effectifs au seuil 0,95 est [63 ; 87] car :

k	$p(X \leqslant k)$
62	0,0204
63	0,0300

k	$p(X \leqslant k)$
86	0,9700
87	0,9796

B. a. Monsieur Bleu ne peut être certain de gagner.
b. 96 n'appartient pas à l'intervalle [63 ; 87].
« Au seuil de 0,95, on peut rejeter l'hypothèse que les deux protagonistes sont à égalité ».

67 **1. a.** Oui, c'est exact :
Rapport entre les taux 2004 et 1995 : 0,39 (par millions de vols) et 0,27 (par nombre de jours).
Baisse en % entre 2004 et 1995 : – 61% (par millions de vols) et – 73% (par nombre de jours).
b. $\dfrac{367}{3653} \approx 0{,}10$
2. (1) Proportion de catastrophes durant les 4 années :
$\dfrac{53}{1461} \approx 0{,}036 \approx \dfrac{1}{27}$.
(2) Prise d'échantillon de taille 366 avec une proportion de 0,036 : loi binomiale de paramètres $n = 366$ et $p = 0{,}036$.

(3) Intervalle de fluctuation des effectifs au seuil de 0,95 : [7 ; 21] car :

k	$p(X \leqslant k)$
6	0,0216
7	0,0464

k	$p(X \leqslant k)$
20	0,9741
21	0,9856

(4) n est le nombre d'accidents qui seront observés en 2012 : si n appartient à [7 ; 21], on acceptera au seuil 0,95 l'hypothèse que le taux d'accidents par jour est de 0,036. Sinon on rejette cette hypothèse.
Si le nombre de catastrophes en 2012 est inférieur à 7 ou supérieur à 21 on pourra penser qu'il aura sensiblement évolué.

Notes