

Corrigé
Maturité gymnasiale
Examen final de Mathématiques – Niveau 1
Session de mai-juin 2024

Problème 1. Analyse

(Poids 3)

Partie A

25 points

Soit la fonction réelle: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

1) Donner le domaine de définition de f

$D_f = \mathbb{R}$	1 pt
--------------------	------

2) Déterminer le(s) zéro(s) de f

$\ln(x^2 + 1) = 0 \iff x^2 + 1 = 1 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$ $Z_f = \{0\}$	1,5 pt
--	--------

Dans le système d'axes ci-dessous, nous avons tracé les graphes de f , de f' et de f''

3) Identifier clairement les graphes de f' et de f'' en l'indiquant directement dans le système d'axes

Identifier les graphes de f' et f''	1 pt
---	------

4) Par lecture graphique, compléter le tableau ci-dessous :

Les coordonnées du point à tangente horizontale de f	(0; 0)	0,5 point
Le nombre de points d'inflexion de f	2	1 point
L'ensemble image de f	$[0; +\infty[$	1 point
Déterminer les limites	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$	0,5 point
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$	0,5 point
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$	0,5 point
Total		4 points

5) Calculer la première dérivée et dresser le tableau de croissance de f

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ Comme $x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ a le même signe que x <table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr> </table>			x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	1 point
x	$-\infty$	0	$+\infty$												
$f'(x)$	-	0	+												
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$												
Le signe de la dérivée			1,5 point												
Les variations			1 point												
Les limites			1 point												
Le PTH			0,5 point												
Total			5 points												

6) Montrer que la deuxième dérivée de f est $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$	2 points
---	----------

7) Dresser le tableau de courbure de f

$f''(x)$ a le même signe que $-2x^2 + 2 = 2(1 - x^2) = 2(1 - x)(1 + x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(x)$	<i>concave</i> PI <i>Convexe</i> PI <i>Concave</i>						

Signe et les zéros de f''

Courbures

Total

2,5 points

2,5 points

5 point

2,5 points

2,5 points

8) Déterminer les coordonnées de(s) point(s) d'inflexion de f et l'équation de(s) droite(s) tangente(s) au graphe de f en ce(s) point(s)

D'après le tableau de courbure on a des points d'inflexion en $x = -1$ et $x = 1$ $f(-1) = f(1) = \ln(2)$ Les points d'inflexion sont : $(-1; \ln(2))$ et $(1; \ln(2))$	2 points
$f'(-1) = \frac{2 \cdot (-1)}{(-1)^2 + 1} = -1$	0,5 point
$f'(1) = \frac{2 \cdot (1)}{(1)^2 + 1} = 1$	0,5 point
Les tangentes: $y = -x - 1 + \ln(2)$ $y = x - 1 + \ln(2)$	0,5 point 0,5 point
Total	4 point

9) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit d une droite d'équation $y = \lambda$. À l'aide du graphique discuter le nombre de points d'intersection de la droite d avec le graphe de f en fonction des valeurs de λ

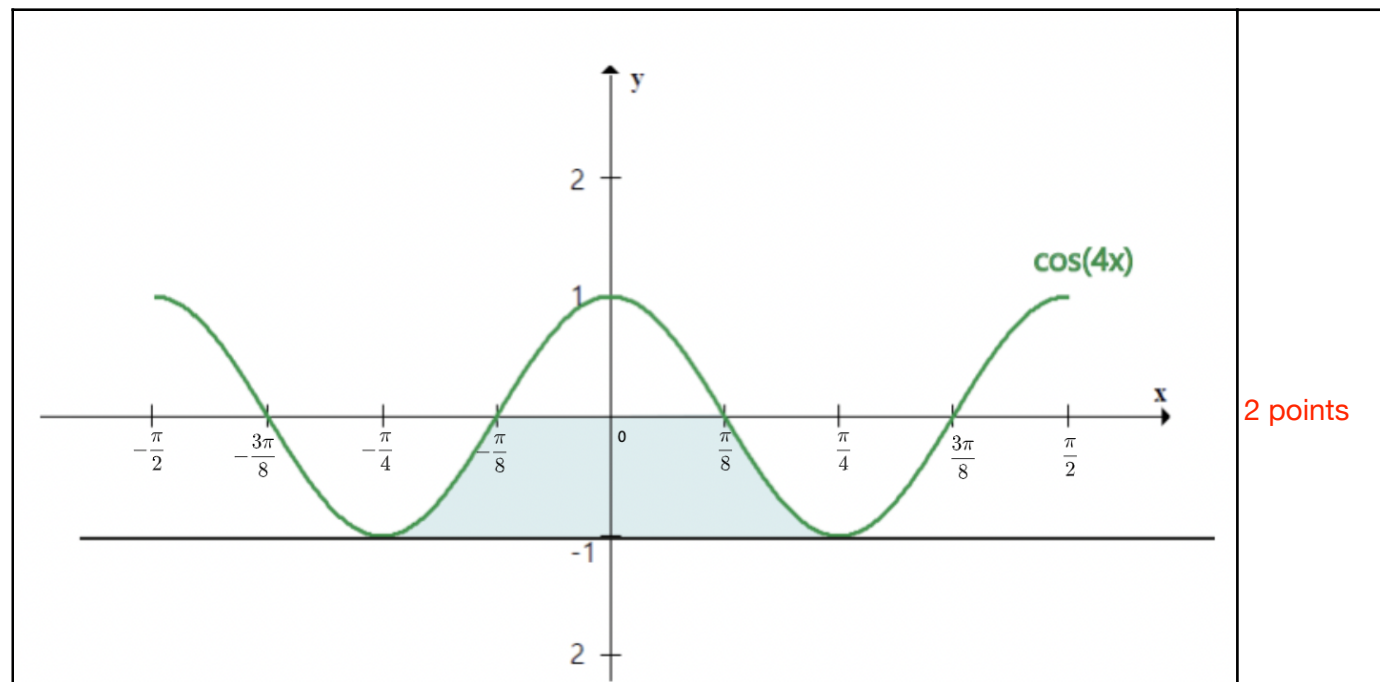
Pour $\lambda \in]-\infty; 0[$: 0 points d'intersection	0,5 point
Pour $\lambda = 0$: 1 point d'intersection	0,5 point
Pour $\lambda \in]0; +\infty[$: 2 points d'intersection	0,5 point
Total	1,5 point

Partie B

11 points

Soit la fonction réelle : $g(x) = \cos(4x)$ et une partie de son graphe représentée ci-dessous. L'axe x n'est volontairement pas gradué

1) Graduer l'axe x ci-dessus (x en radians)



2 points

2) Déterminer l'équation de la tangente t en $x = \frac{\pi}{8}$

$g'(x) = -4\sin(4x)$	1 point
$g'(\frac{\pi}{8}) = -4\sin(\frac{\pi}{2}) = -4$	0,5 point
$g(\frac{\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$	0,5 point
$t : y = -4x + \frac{\pi}{2}$	0,5 point
Total	2,5 points

3) Calculer l'angle aigu formé par cette tangente et l'axe y

$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \approx 0,97$	1,5 point
$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \approx 14,04^\circ \text{ ou } \alpha \approx 0,24 \text{ rad}$	0,5 point
Total	2 points

4) Considérons la surface S grisée ci-dessus délimitée par le graphe de g , l'axe x et la droite d'équation $y = -1$. Calculer son aire

$A = \frac{\pi}{4} \cdot 1 + 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\pi} (\cos(4x) + 1) dx$	1,5 point
$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\pi} (\cos(4x) + 1) dx = \frac{1}{4} [\sin(\pi) - \sin(\frac{\pi}{2})] + [\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}] = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$	2 point
$A = \frac{\pi}{4} + 2[-\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}] = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \approx 1,07 u^2$	1 point
Total	4,5 points

Problème 2. Géométrie

(Poids 3)

Partie A Géométrie plane

21 points

On considère les objets suivants :

- Le cercle $\mathcal{C}_1: (x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 25$
- Les droites $d_1: 3x - 4y + 20 = 0$ et $d_2: x = 12$
- Le point $M(4; 0)$

1) Déterminer le centre K et le rayon r_1 du cercle $\mathcal{C}_1$

$K(7; 4)$ $r_1 = 5$	1 point 0,5 point
Total	1,5 points

2) Montrer que le point M appartient au cercle $\mathcal{C}_1$

$(4 - 7)^2 + (0 - 4)^2 = 9 + 16 = 25$	1 point
---------------------------------------	---------

3) Soit N le point d'intersection de d_1 avec d_2 . Calculer les coordonnées du point N

$3 \cdot 12 - 4y + 20 = 0 \iff 4y = 56 \iff y = 14$ $N(12; 14)$	1 point 0,5 point
Total	1,5 point

4) Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}_2$, centré en K et passant par le point N

Soit r_2 rayon de $\mathcal{C}_2$: $r_2 = \ \overrightarrow{KN}\ $	0,5 point
$\overrightarrow{KN} = \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ 14 - 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{KN} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$	1 point
$r_2 = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$	0,5 point
$\mathcal{C}_2 : (x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 125$	0,5 point
Total	2,5 points

5) Quelle est la position relative des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$? Justifier votre réponse

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont concentriques	0,5 point
Justification: Même centre et $r_1 < r_2$	0,5 point
Total	1 point

6) Déterminer l'équation de la droite d_3 , la droite tangente au cercle $\mathcal{C}_1$ au point M

$\overrightarrow{n_{d_3}} = \overrightarrow{KM} = \begin{pmatrix} 4 - 7 \\ 0 - 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{KM} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	1 point
$d_3 : 3x + 4y + c = 0$	0,5 point
$M \in d_3 \implies 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + c = 0 \implies c = -12$	0,5 point
$d_3 : 3x + 4y - 12 = 0$	0,5 point
Total	2,5 points

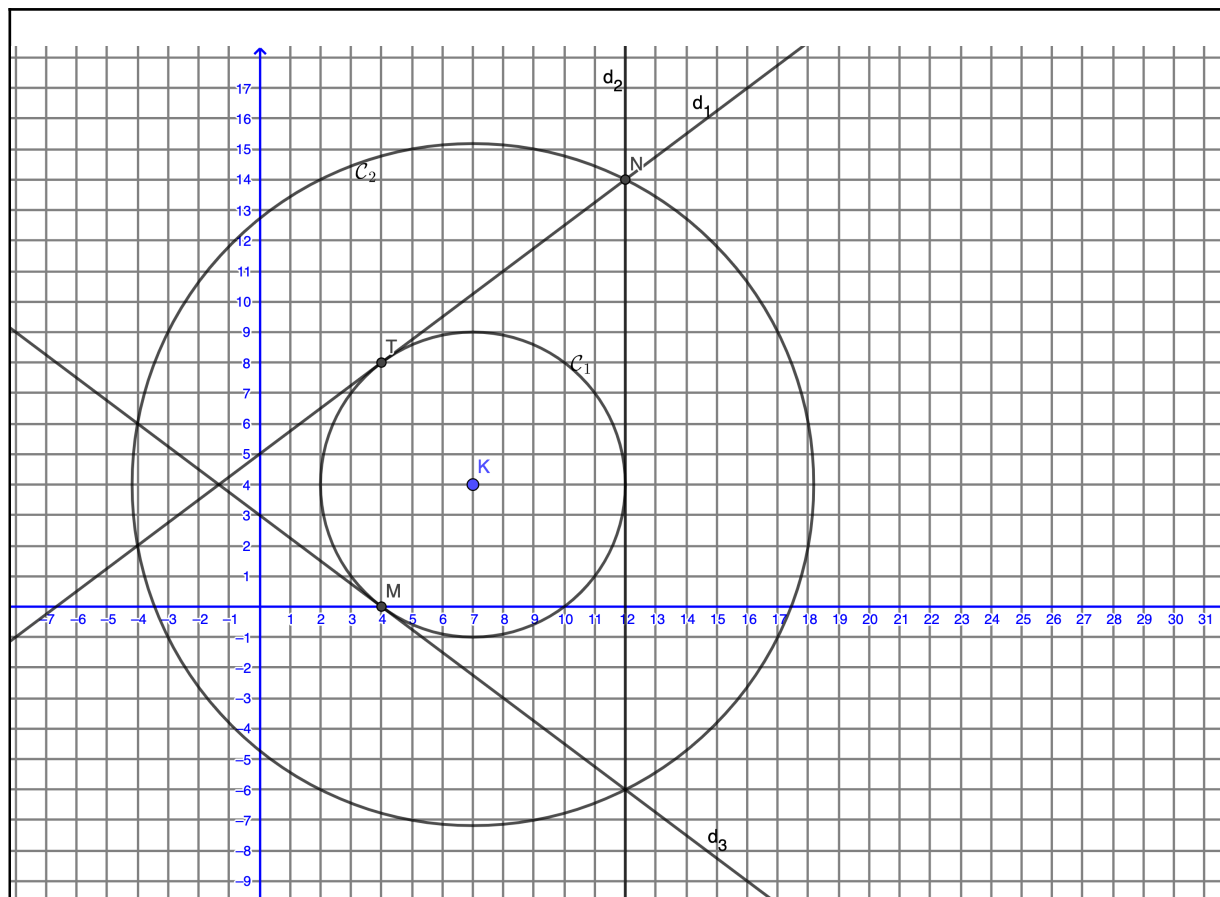
7) Calculer la distance entre le point M et la droite d_1

$\delta(M; d_1) = \frac{ 3 \cdot 4 - 4 \cdot 0 + 20 }{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{32}{5} = 6,4$	1 point
--	---------

8) Sachant que la droite d_1 est tangente au cercle $\mathcal{C}_1$. Déterminer par calculs les coordonnées de T , le point de tangence de d_1 avec $\mathcal{C}_1$

$d_1 : 3x - 4y + 20 = 0 \iff y = \frac{3}{4}x + 5$	0,5 point
$d_1 \cap \mathcal{C}_1 : (x - 7)^2 + \left(\frac{3}{4}x + 5 - 4\right)^2 = 25 \iff x^2 - 14x + 49 + \left(\frac{3}{4}x + 1\right)^2 = 25$	
$\iff x^2 - 14x + 49 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 25$	
$\iff \frac{25}{16}x^2 - \frac{25}{2}x + 25 = 0 \iff \left(\frac{5}{4}x - 5\right)^2 = 0 \iff x = 4$	1,5 point
$y = \frac{3}{4} \cdot 4 + 5 = 8$	0,5 point
$T(4; 8)$	0,5 point
Total	3 point

9) Dessiner les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et les droites d_1 , d_2 et d_3 dans le système d'axes ci-dessous



Les deux cercles: (vérification: centre+rayon)

2 points

d_1 et d_3 (vérification: deux points de la droite)

2 point s

d_2

0,5 point

Total

4,5 points

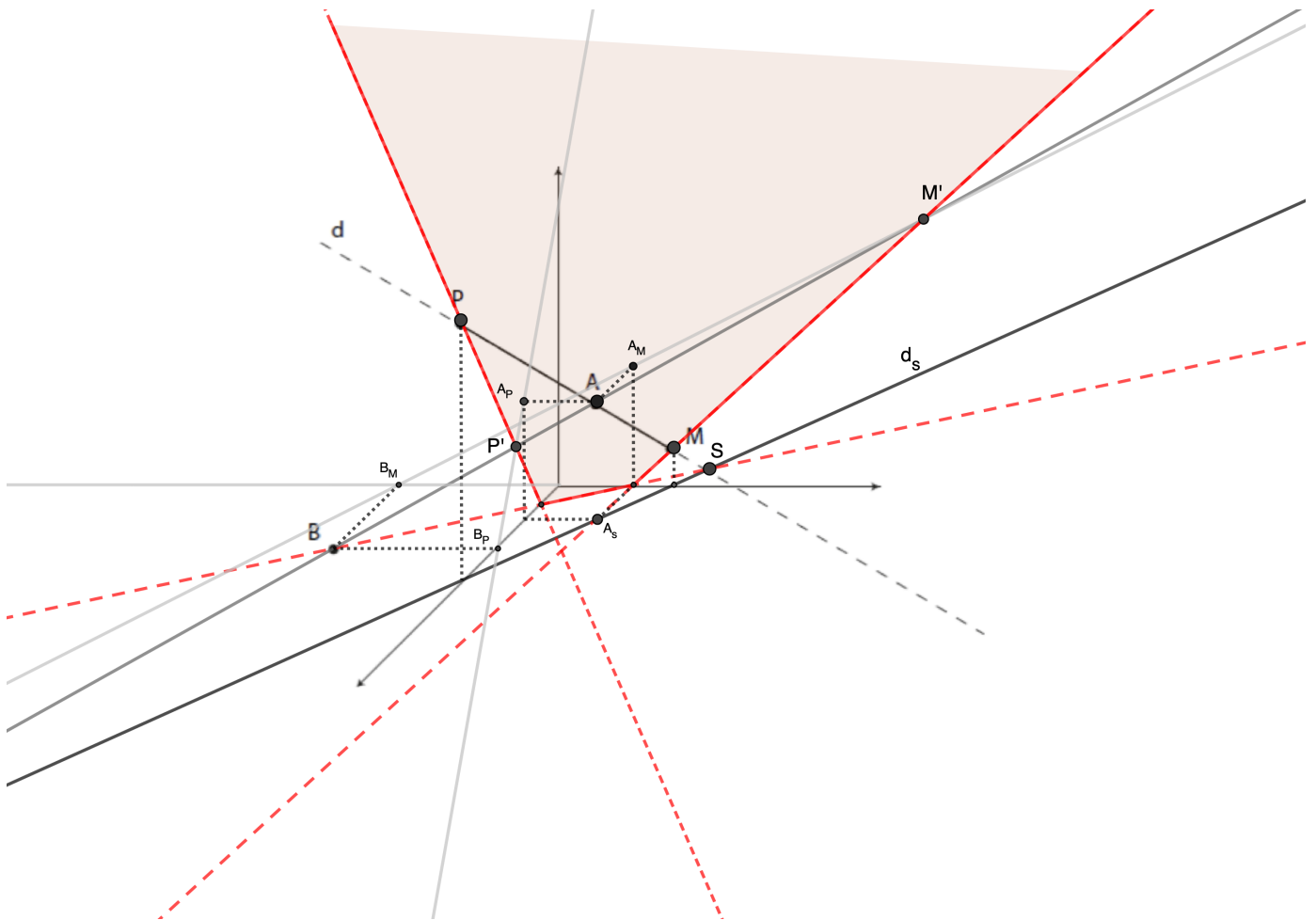
10) Calculer l'angle aigu entre d_1 et d_3

$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{7}{25} = 0,28$	1 point
$\alpha = \cos^{-1}(0,28) = 73,74^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha = 1,29 \text{ rad}$	0,5 point
Total	1,5 point

11) Calculer l'aire entre les deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$

$\text{Aire} = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2 = \pi(125 - 25) = 100\pi$	1 point
--	---------

7 points



Dessiner d_s	1 point
Les 3 projections de A	1,5 point
Le point A se trouve dans le premier octant	0,5 point
Les trois traces de π	3 points
Hachurer la partie visible de π	1 point
Total	7 points

Problème 3. Probabilités

(Poids 2)

Partie A Analyse combinatoire

6,5 points

Un passionné de jeux vidéo veut tester ses performances en jouant contre un système d'intelligence artificielle qui propose quatre algorithmes de jeu différents nommés A , B , C et D .

De combien de manières différentes peut-il faire chacun des essais suivants si on tient compte de l'ordre dans lequel les algorithmes sont lancés?

1) Jouer quatre parties chacune avec un algorithme différent

$4! = 24$	1 point
-----------	---------

2) Jouer deux parties pour essayer deux algorithmes différents

$A_2^4 = 12$	1 point
--------------	---------

3) Jouer cinq parties en essayant deux fois consécutives l'algorithme A et une fois chacun des trois autres algorithmes

$4! = 24$	1 point
-----------	---------

4) Jouer trois parties et utiliser au moins une fois l'algorithme A

$4^3 - 3^3 = 37$	1,5 point
------------------	-----------

5) Jouer quatre parties et utiliser exactement trois fois l'algorithme A

$A_1^4 \cdot A_1^3 = 12$	1 point
--------------------------	---------

6) Jouer quatre parties en utilisant les 4 algorithmes dans l'ordre suivant : $DCAB$

1 possibilité	1 point
---------------	---------

Partie B Probabilité

16 points

En jouant contre l'intelligence artificielle citée précédemment, la probabilité qu'un joueur réussisse lorsqu'il est confronté aux algorithmes B , C ou D est de 30 %. Cette probabilité s'élève à 60 % avec l'algorithme A , qui est réglé de manière plus favorable à la victoire.

1) Un joueur sélectionne aléatoirement un algorithme et joue une partie

a) Quelle est la probabilité qu'il choisisse l'algorithme A et réussisse ?

$\frac{1}{4} \cdot 0,6 = 0,15$	1 point
--------------------------------	----------------

b) Quelle est la probabilité qu'il réussisse ?

$\frac{3}{4} \cdot 0,3 + \frac{1}{4} \cdot 0,6 = 0,375$	1,5 point
---	------------------

c) Sachant qu'il a réussi, quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'algorithme A ?

$P(A R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0,15}{0,375} = 0,4$	2 point
--	----------------

2) Un joueur joue 10 fois avec l'algorithme A

a) Quelle est la probabilité qu'il réussisse exactement 2 fois ?

$C_2^{10} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^8 = 0,0106$	2 point
---	----------------

b) Quelle est la probabilité qu'il réussisse la première partie et une des 9 autres ?

$0,6 \cdot C_1^9 \cdot 0,6 \cdot 0,4^8 = 0,002$	2 point
---	----------------

c) Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins une fois ?

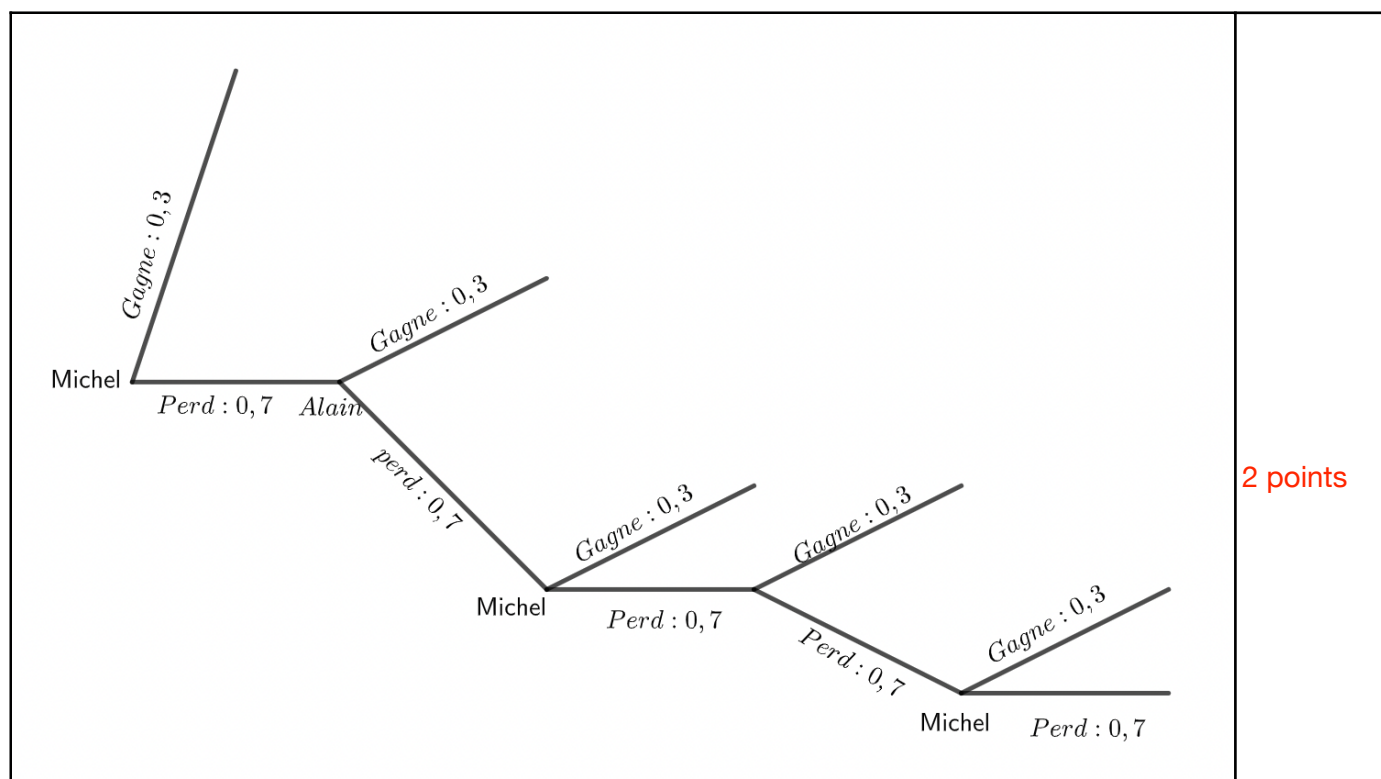
$1 - 0,4^{10} = 0,9999$	1,5 point
-------------------------	------------------

3) En choisissant l'algorithme **A**, combien de parties doit-il jouer au minimum pour que la probabilité de réussir au moins une fois soit supérieure à 99,9%?

$1 - 0,4^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,4^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,4)} \Leftrightarrow n \geq 7,53$	2 point
Il doit jouer au minimum 8 parties	0,5 point
Total	2,5 points

4) Deux amis (Michel et Alain) décident d'utiliser l'algorithme **B** et alternent pour jouer jusqu'à ce que l'un d'eux réussisse et donc le jeu s'arrête. Michel commence le jeu. On veut calculer la probabilité que ce dernier gagne à sa troisième partie.

a) Représenter l'expérience par un arbre de probabilité



b) Calculer cette probabilité

$0,7^4 \cdot 0,3 = 0,072$	1,5 point
---------------------------	-----------