

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — это специального вида последовательность. Поэтому прежде чем давать определение арифметической (а затем и геометрической) прогрессии, нам нужно вкратце обсудить важное понятие числовой последовательности.

Последовательность

Вообразите устройство, на экране которого высвечиваются одно за другим некоторые числа. Скажем, $2, -7, 13, 1, -6, 0, 3, \dots$. Такой набор чисел как раз и является примером последовательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовая последовательность — это множество чисел, в котором каждому числу можно присвоить уникальный номер (то есть поставить в соответствие единственное натуральное число)¹. Число с номером n называется n -м членом последовательности.

Так, в приведённом выше примере первый номер имеет число 2 — это первый член последовательности, который можно обозначить a_1 ; номер пять имеет число -6 — это пятый член последовательности, который можно обозначить a_5 . Вообще, n -й член последовательности обозначается a_n (или b_n, c_n и т. д.).

Очень удобна ситуация, когда n -й член последовательности можно задать некоторой формулой. Например, формула $a_n = 2n - 3$ задаёт последовательность: $-1, 1, 3, 5, 7, \dots$. Формула $a_n = (-1)^n$ задаёт последовательность: $-1, 1, -1, 1, \dots$.

Не всякое множество чисел является последовательностью. Так, отрезок $[0; 1]$ — не последовательность; в нём содержится «слишком много» чисел, чтобы их можно было перенумеровать. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел также не является последовательностью. Эти факты доказываются в курсе математического анализа.

Арифметическая прогрессия: основные определения

Вот теперь мы готовы дать определение арифметической прогрессии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Арифметическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа (называемого разностью арифметической прогрессии).

Например, последовательность $2, 5, 8, 11, \dots$ является арифметической прогрессией с первым членом 2 и разностью 3 . Последовательность $7, 2, -3, -8, \dots$ является арифметической прогрессией с первым членом 7 и разностью -5 . Последовательность $3, 3, 3, \dots$ является арифметической прогрессией с разностью, равной нулю.

Эквивалентное определение: последовательность a_n называется арифметической прогрессией, если разность $a_{n+1} - a_n$ есть величина постоянная (не зависящая от n).

Арифметическая прогрессия называется *возрастающей*, если её разность положительна, и *убывающей*, если её разность отрицательна.

¹А вот более лаконичное определение: *последовательность есть функция, определённая на множестве натуральных чисел*. Например, последовательность действительных чисел есть функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

По умолчанию последовательности считаются *бесконечными*, то есть содержащими бесконечное множество чисел. Но никто не мешает рассматривать и конечные последовательности; собственно, любой конечный набор чисел можно назвать конечной последовательностью. Например, конечная последовательность $1, 2, 3, 4, 5$ состоит из пяти чисел.

Формула n -го члена арифметической прогрессии

Легко понять, что арифметическая прогрессия полностью определяется двумя числами: первым членом и разностью. Поэтому возникает вопрос: как, зная первый член и разность, найти произвольный член арифметической прогрессии?

Получить искомую формулу n -го члена арифметической прогрессии нетрудно. Пусть a_n — арифметическая прогрессия с разностью d . Имеем:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В частности, пишем:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d, \end{aligned}$$

и теперь становится ясно, что формула для a_n имеет вид:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \quad (1)$$

Задача 1. В арифметической прогрессии $2, 5, 8, 11, \dots$ найти формулу n -го члена и вычислить сотый член.

Решение. Согласно формуле (1) имеем:

$$a_n = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1.$$

Отсюда

$$a_{100} = 3 \cdot 100 - 1 = 299.$$

Свойство и признак арифметической прогрессии

СВОЙСТВО АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ. В арифметической прогрессии a_n для любого $n \geq 2$ выполнено равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \quad (2)$$

Иначе говоря, каждый член арифметической прогрессии (начиная со второго) является средним арифметическим соседних членов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2} = a_n,$$

что и требовалось.

Более общим образом, для арифметической прогрессии a_n справедливо равенство

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

при любом $n \geq 2$ и любом натуральном $k < n$. Попробуйте самостоятельно доказать эту формулу — тем же самым приёмом, что и формулу (2).

Оказывается, формула (2) служит не только необходимым, но и достаточным условием того, что последовательность является арифметической прогрессией.

ПРИЗНАК АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ. Если для всех $n \geq 2$ выполнено равенство (2), то последовательность a_n является арифметической прогрессией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем формулу (2) следующим образом:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Отсюда видно, что разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n , а это как раз и означает, что последовательность a_n есть арифметическая прогрессия.

Свойство и признак арифметической прогрессии можно сформулировать в виде одного утверждения; мы для удобства сделаем это для трёх чисел (именно такая ситуация часто встречается в задачах).

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ. Три числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $2b = a + c$.

Задача 2. (МГУ, экономич. ф-т, 2007) Три числа $8x, 3-x^2$ и -4 в указанном порядке образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите x и укажите разность этой прогрессии.

Решение. По свойству арифметической прогрессии имеем:

$$2(3 - x^2) = 8x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -5.$$

Если $x = 1$, то получается убывающая прогрессия $8, 2, -4$ с разностью -6 . Если $x = -5$, то получается возрастающая прогрессия $-40, -22, -4$; этот случай не годится.

Ответ: $x = 1$, разность равна -6 .

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Легенда гласит, что однажды учитель велел детям найти сумму чисел от 1 до 100 и сел спокойно читать газету. Однако не прошло и нескольких минут, как один мальчик сказал, что решил задачу. Это был 9-летний Карл Фридрих Гаусс, впоследствии один из величайших математиков в истории.

Идея маленького Гаусса была такова. Пусть

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100.$$

Запишем данную сумму в обратном порядке:

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1,$$

и сложим две этих формулы:

$$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1).$$

Каждое слагаемое в скобках равно 101, а всего таких слагаемых 100. Поэтому

$$2S = 101 \cdot 100 = 10100,$$

откуда

$$S = 5050.$$

Мы используем эту идею для вывода формулы суммы

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

первых n членов арифметической прогрессии. Именно, запишем друг под другом:

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, \\ S &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

и сложим:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Каждое слагаемое в скобках равно $a_1 + a_n$, а всего таких слагаемых n . Поэтому

$$2S = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

откуда

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \quad (3)$$

Полезная модификация формулы (3) получается, если в неё подставить формулу n -го члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$:

$$S = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n. \quad (4)$$

Задача 3. Найти сумму всех положительных трёхзначных чисел, делящихся на 13.

Решение. Трёхзначные числа, кратные 13, образуют арифметическую прогрессию с первым членом 104 и разностью 13; n -й член этой прогрессии имеет вид:

$$a_n = 104 + 13(n - 1) = 91 + 13n.$$

Давайте выясним, сколько членов содержит наша прогрессия. Для этого решим неравенство:

$$\begin{aligned} a_n &\leq 999, \\ 91 + 13n &\leq 999, \\ 13n &\leq 908, \\ n &\leq \frac{908}{13} = 69\frac{11}{13}, \\ n &\leq 69. \end{aligned}$$

Итак, в нашей прогрессии 69 членов. По формуле (4) находим искомую сумму:

$$S = \frac{2 \cdot 104 + 68 \cdot 13}{2} \cdot 69 = 37674.$$

Задачи

1. Придумайте формулу n -го члена для следующих последовательностей:

а) 1, 3, 5, 7, ...

б) 5, 8, 11, 14, ...

в) 1, 4, 9, 16, ...

г) 1, -2, 3, -4, ...

2. Сколько положительных чисел содержится в арифметической прогрессии 23,1; 22,7; ...?

3. Между числами 1 и 7 вставьте четыре числа так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

4. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна $5/3$, а произведение третьего и четвёртого её членов равно $65/72$. Найдите сумму первых 17 членов этой прогрессии.

$\frac{8}{611}$

5. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых 11 членов этой прогрессии.

$\frac{14}{11}$

6. Известно, что при любом n сумма первых n членов арифметической прогрессии равна $4n^2 - 3n$. Найдите десятый член этой прогрессии.

$\frac{82}{11}$

7. Первый член арифметической прогрессии равен 429, разность её равна -22 . Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

$\frac{18}{11}$ или 6

8. Найти сумму всех положительных чётных двузначных чисел, делящихся на 3.

$\frac{018}{11}$

9. Внутренние углы некоторого многоугольника, наименьший из которых равен 120° , образуют арифметическую прогрессию с разностью 5° . Найдите число сторон этого многоугольника.

$\frac{6}{11}$

10. Найти сумму всех положительных трёхзначных чисел, делящихся на 7.

$\frac{98802}{11}$

11. Сумма трёх чисел равна $11/18$. Сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найдите эти числа.

$\frac{6}{11}$ ' $\frac{9}{11}$ ' $\frac{8}{11}$

12. В арифметической прогрессии a_n известно, что $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$. Найдите сумму первых 19 членов этой прогрессии.

$\frac{1901}{11}$

13. Известно, что $a_1, \dots, a_{15}$ — арифметическая прогрессия и $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.

$\frac{2}{11}$

14. Найти трёхзначное число, цифры которого образуют (в том порядке, в котором они стоят в числе) возрастающую арифметическую прогрессию и которое делится на 45

$\frac{581}{11}$

15. Найти сумму чисел, являющихся одновременно членами прогрессии $3, 7, \dots, 203$ и прогрессии $2, 9, \dots, 212$.

672

16. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^4 - 10x^2 + a = 0$ образуют арифметическую прогрессию?

6

17. Найти все значения a , при которых уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно четыре корня и эти корни образуют арифметическую прогрессию.

$\frac{6}{28}$

18. Упростите выражение $k^2 - (k - 1)^2$, после чего докажите, что:

$$\text{а) } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2; \quad \text{б) } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

19. Упростите выражение $k^3 - (k - 1)^3$, после чего докажите, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

20. (МГУ, физический ф-т, 1992) Девятый член арифметической прогрессии в 2 раза больше десятого, а сумма шестого и двенадцатого членов равна 8. Найти первый член и разность прогрессии.

2 и 02

21. (МГУ, физический ф-т, 1979) Седьмой член арифметической прогрессии равен 21, а сумма первых семи членов равна 105. Найти первый член и разность прогрессии.

7 и 6

22. (МГУ, ИСАА, 1993) Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых семи её членов.

82

23. (МГУ, биологич. ф-т, 1991) Лыжник проходил каждый следующий виток круговой трассы на одно и то же время дольше, чем предыдущий. На второй и четвёртый витки он затратил в сумме 3 мин 20 с. За какое время лыжник прошёл первые пять витков?

8 мин 20 с

24. (МГУ, экономич. ф-т, 1987) В магазине продано 12 т орехов трёх сортов по цене 6, 4 и 2 руб/кг на общую сумму 42000 рублей. Количества проданных орехов первого, второго и третьего сорта (в данном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найти эти количества.

2, 5, 5 т

25. (МГУ, ВМК, 1988) Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого её членов равна 10.

09

26. (МГУ, ВМК, 1995) Разность арифметической прогрессии отлична от нуля, а сумма членов с четвёртого по четырнадцатый равна 77. Найти номер того её члена, который равен 7.

6

27. (МГУ, ВМК, 1990) Среди первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии сумма членов с нечётными номерами на 19 больше, чем с чётными. Найти двенадцатый член прогрессии, если её двадцатый член равен утроенному девятому.

21

28. (МГУ, мехмат, 2002) Найти восемнадцатый член арифметической прогрессии, если первый и одиннадцатый её члены — натуральные числа, а сумма первых четырнадцати членов равна 77.

9—

29. (МГУ, мехмат, 2003) Найдите первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на пять сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

49

30. (МГУ, ВШБ, 2003) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$25x^5 + 25(a - 1)x^3 - 4(a - 7)x = 0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

7—

31. (МГУ, мехмат, 2004) Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2}; \quad a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2}; \quad \dots; \quad a_n = \frac{-10}{6m - m^2},$$

где m — некоторое целое число.

$\frac{7}{11}, \frac{9}{12}$

32. (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Три числа, являющиеся длинами рёбер прямоугольного параллелепипеда с диагональю 6, образуют арифметическую прогрессию. Кубы этих чисел тоже образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

$2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$

33. (МГУ, ВМК, 2005) Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n = (-1)^n \cdot a_n + (-1)^n \cdot b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых её двадцати трёх членов равна -60 . Найдите b_{40} и сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

09091 '18

34. (МГУ, ВМК, 2005) В убывающей арифметической прогрессии разность девятого и четвёртого членов равна третьему, а сумма квадратов первого и второго членов равна 4. Найдите сумму первых двадцати пяти членов этой прогрессии.

091—

35. (МГУ, геологич. ф-т, 2005) В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвёртого членов равен сумме второго и пятого членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?

3 или 0

36. (МГУ, МШЭ, 2005) Найдите четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних чисел равна 18, а второе число меньше третьего на 20%.

6, '8, 10, 12

37. («Покори Воробьёвы горы», 2006) Первый член арифметической прогрессии равен -12 , разность равна $24/11$. Найдите сумму первых n членов этой прогрессии при условии, что она меньше -39 .

—
432
11

38. (МГУ, мехмат, 2006) Первый член арифметической прогрессии меньше 0, сотый не меньше 74, а двухсотый меньше 200. Количество членов прогрессии на интервале $(0,5; 5)$ ровно на два меньше, чем на отрезке $[20; 24,5]$. Найдите первый член и разность прогрессии.

—
1
1
3

39. (МГУ, географич. ф-т, 2006) Числа y и z таковы, что последовательность $1, \sqrt{y}, \sqrt{z}$, а также последовательность $1, y - 1, z - y$ являются арифметическими прогрессиями. Найдите разность второй прогрессии.

2

40. (МГУ, геологич. ф-т, 2007) Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырём?

24

41. (МГУ, экономич. ф-т, 2007) Три числа $12x$, $x^2 - 5$ и 4 в указанном порядке образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите x и укажите разность этой прогрессии.

—
1
8