



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Tahri Mohamed- Béchar

Faculté de Technologie

Polycopié pédagogique

Intitulé

Cours et exercices corrigés

Module : Mathématiques 03

Présenté par :

Dr. Hamza DAOUDI

Destiné aux étudiants de deuxième année LMD.

Automatique-Télécommunication-Electronique-Electrotechnique.

Année universitaire 2023/2024

DAOUDI Hamza
MCA à université Tahri Mohammed Béchar
Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique
Email : daoudi.hamza@univ-bechar.dz

Introduction

Le document que je vous présente est une ressource complète et détaillée sur les principaux concepts mathématiques 03, axée sur plusieurs sujets fondamentaux en analyse mathématique et en théorie des équations différentielles.

Il débute par une exploration approfondie des intégrales simples et multiples, offrant une compréhension exhaustive des méthodes d'intégration, des applications et des techniques utilisées pour résoudre divers types de problèmes. Les intégrales impropres sont également abordées en détail, mettant en lumière les cas où les limites d'intégration sont infinies ou lorsque les fonctions présentent des discontinuités.

Une partie substantielle du livre est consacrée aux équations différentielles, couvrant divers aspects, dont les équations différentielles linéaires du premier ordre. Les méthodes analytiques pour résoudre ces équations sont expliquées en détail, offrant une compréhension approfondie des solutions et de leur interprétation géométrique. En outre, les équations différentielles linéaires d'ordre 2 sont étudiées en profondeur, explorant les solutions particulières, les problèmes aux limites et les applications pratiques de ces équations.

Ce manuscrit comprend également une section dédiée aux séries numériques et aux séries entières, présentant leurs propriétés, leurs convergences et leurs applications dans divers domaines mathématiques.

Il offre une analyse approfondie des séries de Fourier, explorant leur construction, leur convergence et leur utilisation dans la résolution de problèmes pratiques en ingénierie, physique et mathématiques appliquées.

De plus, une étude approfondie de la transformation de Fourier est proposée, décrivant sa définition, ses propriétés et son utilisation dans l'analyse de signaux et de fonctions périodiques.

La transformation de Laplace est également abordée de manière détaillée, exposant

ses applications dans la résolution d'équations différentielles et d'autres problèmes mathématiques et scientifiques. Enfin, chaque chapitre est enrichi d'une collection d'exercices corrigés, offrant aux lecteurs l'opportunité de consolider leur compréhension des concepts présentés et de perfectionner leurs compétences en résolution de problèmes. Ces exercices variés et complets permettent un apprentissage actif et une meilleure assimilation des connaissances présentées dans le livre.

Je demande à Dieu Tout-Puissant que cette œuvre soit sincère pour Lui, et de bénir ce travail de manière à le rendre non seulement pur, mais aussi enrichissant et bénéfique pour tous ceux qui le parcourront. Puissent les connaissances qu'il renferme éclairer les esprits des étudiants, des spécialistes et de toute personne intéressée par ce domaine. Que chaque page soit empreinte de clarté et de sagesse, et que sa lecture inspire et élève ceux qui s'y plongent. Que ce livre soit une source de lumière et de guidance pour tous ceux qui le lisent, et qu'il contribue à l'avancement du savoir et au bien-être de l'humanité.

Objectif général

Notre programme vise à fournir aux étudiants une compréhension approfondie et complète des principaux concepts mathématiques 03 , avec un accent particulier sur l'analyse mathématique et la théorie des équations différentielles. Nous souhaitons développer chez les étudiants une expertise solide dans ces domaines fondamentaux, indispensables à la compréhension avancée des sciences mathématiques et appliquées.

Dans le cadre de notre approche pédagogique, nous mettrons en œuvre des méthodes d'enseignement interactives et variées, telles que des cours magistraux dynamiques, des séances de travaux dirigés et des exercices pratiques en petits groupes. Ces méthodes visent à favoriser une participation active des étudiants et à encourager l'apprentissage collaboratif.

En outre, nous accorderons une attention particulière au développement des compétences transversales, telles que la résolution de problèmes, la pensée critique et la communication mathématique efficace. Ces compétences sont essentielles pour que les étudiants puissent non seulement maîtriser les concepts théoriques, mais aussi les appliquer de manière créative et innovante dans leur future carrière académique ou professionnelle.

En résumé, notre objectif est d'offrir aux étudiants une expérience d'apprentissage enrichissante et stimulante, qui non seulement renforce leur compréhension des mathématiques avancées, mais aussi développe leur capacité à relever des défis mathématiques complexes et à contribuer de manière significative à la recherche et au développement dans le domaine des sciences mathématiques et appliquées.

Semestre : 3

UE : UEF 2.1.1

Matière 1 : Mathématiques 3 (VHS: 67h30, Cours : 3h00, TD : 1h30)

Objectifs de l'enseignement:

À la fin de ce cours, l'étudiant(e) devrait être en mesure de connaître les différents types de séries et ses conditions de convergence ainsi que les différents types de convergence.

Connaissances préalables recommandées

Mathématiques 1 et Mathématiques 2

Contenu de la matière :

Chapitre 1 : Intégrales simples et multiples **3 semaines**

- 1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives.
- 1.2 Intégrales doubles et triples.
- 1.3 Application au calcul d'aires, de volumes...

Chapitre 2 : Intégrale impropres **2 semaines**

- 2.1 Intégrales de fonctions définies sur un intervalle non borné.
- 2.2 Intégrales de fonctions définies sur un intervalle borné, infinies à l'une des extrémités.

Chapitre 3 : Equations différentielles **3 semaines**

- 3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires.
- 3.2 Equations aux dérivées partielles.
- 3.3 Fonctions spéciales.

Chapitre 4 : Séries **2 semaines**

- 4.1 Séries numériques.
- 4.2 Suites et séries de fonctions.
- 4.3 Séries entières, séries de Fourier.

Chapitre 5 : Transformation de Fourier **3 semaines**

- 5.1 Définition et propriétés.
- 5.2 Application à la résolution d'équations différentielles.

Chapitre 6 : Transformation de Laplace **2 semaines**

- 6.1 Définition et propriétés.
- 6.2 Application à la résolution d'équations différentielles.

Mode d'évaluation : Contrôle continu : 40 % ; Examen final : 60 %.

Table des matières

1	Intégrales simples et multiples	11
1.1	Révision sur l'intégrale de Riemann	12
1.1.1	Intégrale de Riemann	12
1.1.2	Géométriquement	13
1.1.3	Sommes de Darboux	14
1.1.4	Caractéristiques de l'intégrale de Riemann	15
1.2	Valeur moyenne	16
1.3	Valeur efficace	16
1.4	Calcul de primitives (Intégrale indéfinie)	17
1.4.1	Intégration par parties	18
1.4.2	Changement de variable	19
1.5	Intégrale doubles	19
1.5.1	Théorème de Fubini	19
1.5.2	Changement de variable	20
1.5.3	Coordonnées polaires	21
1.6	Intégrales triples	22
1.6.1	Théorème de Fubini	22
1.6.2	Changement de variable	24
1.6.3	Coordonnées cylindriques	25
1.6.4	Coordonnées sphériques	26

1.7	Application au calcul d'aires, de volumes	27
1.7.1	Calcul l'aire	27
1.7.2	Calcul de volume	28
2	Intégrales Impropres	29
2.1	Intégrales impropres de Fonctions sur des intervalles non bornés . . .	30
2.2	Intégrale impropre de fonctions positives	30
2.3	Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle borné . . .	31
2.4	Intégrale absolument convergente	32
3	Equations différentielles	34
3.1	Rappel sur les équations différentielles ordinaires	35
3.1.1	Equations différentielles ordinaires d'ordre 1	35
3.1.2	Equations différentielles de variables séparées	35
3.2	Equation différentielle ordinaires linéaire	36
3.2.1	Equation différentielle linéaire du premier ordre 1	37
3.2.2	Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène . . .	38
3.2.3	Equation de Bernoulli	40
3.2.4	Equations différentielles linéaires d'ordre 2	41
3.3	Résolution de l'équation non homogène	43
3.4	Equation aux dérivées partielles	45
3.4.1	Dérivées successives	46
3.4.2	Dérivées d'une fonction composées de deux variables	46
3.4.3	Différentielles totales	47
3.4.4	Formes différentielles totales exactes	48
3.5	Application à l'intégration d'équation différentielle d'ordre 1	49
3.5.1	Facteur intégrant	52
3.5.2	Détermination de facteur intégrant	53

4	Séries numériques	56
4.1	Série Numérique	57
4.2	Séries à Termes Positifs	57
4.2.1	Critère d'Équivalence	57
4.2.2	Critère d'Alambert	58
4.2.3	Critère de Cauchy	59
4.3	Série Alternée	60
4.3.1	Critère de Leibniz	60
4.4	Suites et Séries de Fonctions	61
4.5	Séries Entières	62
4.5.1	Rayon de Convergence	62
4.6	Séries de Fourier	63
4.6.1	Applications des Séries Entières	64
4.6.2	Approximation de Fonctions	64
4.6.3	Solutions d'équations différentielles	65
5	Transformation de Fourier	66
5.1	La formule de la transformée de Fourier	68
5.2	Dérivation dans le domaine temporel	69
5.2.1	Dérivation dans le domaine fréquentiel	69
5.2.2	Translation en t	69
5.3	Propriétés de la transformée de Fourier	70
5.3.1	Linéarité de $\mathcal{TF}^{-1}$	70
5.3.2	Contraction du domaine [dilatation en t]	70
5.3.3	Modulation	70
5.3.4	Conjugaison	70
5.3.5	Convolution	71
5.3.6	Continuité	71

TABLE DES MATIÈRES	10
5.3.7 Comportement à l'infini	71
5.4 Application à la résolution des équations différentielles	72
6 Transformation de Laplace	74
6.1 Transformation de Laplace Directe	75
6.1.1 Existence de la Transformation de Laplace	75
6.1.2 Unicité de la Transformation de Laplace	76
6.2 Propriétés de la Transformation de Laplace	76
6.2.1 Linéarité	76
6.2.2 Dérivée	77
6.3 Application à la résolution des équations différentielles	77
7 Travaux Dirigés	82
7.1 Fiche TD 1	83
7.2 Fiche TD 2	84
7.3 Fiche TD 3	85
7.4 Fiche TD 4	86
7.5 Fiche TD 5	88
7.6 Correction Fiche TD 1	89
7.7 Correction Fiche TD 2	94
7.8 Correction Fiche TD 3	96
7.9 Correction Fiche TD 4	105
7.10 Correction Fiche TD 5	111
8 Exercices supplémentaires	116
Bibliographie Générale	127

Chapitre 1

Intégrales simples et multiples

Ce chapitre est consacré à l'étude des intégrales, en commençant par un rappel sur les intégrales de Riemann, qui constituent la base de la théorie de l'intégration. Ensuite, il aborde la notion de valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle, ainsi que la valeur efficace, qui est une mesure de la moyenne quadratique d'une fonction sur un intervalle.

Ensuite, le chapitre se penche sur le calcul des primitives, une étape essentielle dans la résolution de nombreuses équations différentielles et dans la détermination des intégrales indéfinies.

Le chapitre se poursuit avec l'étude des intégrales doubles, qui généralisent les intégrales simples à deux dimensions. Il aborde également le changement de variable dans les intégrales doubles, une technique importante pour simplifier les calculs et étendre les possibilités de résolution.

Enfin, le chapitre conclut avec les intégrales triples, qui généralisent les intégrales simples et doubles à trois dimensions. Il met en lumière les applications de ces intégrales dans le calcul d'aires et de volumes de formes tridimensionnelles, ce qui est essentiel dans de nombreux domaines, notamment en physique, en ingénierie et en sciences naturelles.

1.1 Révision sur l'intégrale de Riemann

Considérons une fonction f définie sur un intervalle fermé $[a, b]$, avec la condition que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

1.1.1 Intégrale de Riemann

Nous définissons une subdivision Δ de l'intervalle $[a, b]$ comme une collection finie de $n + 1$ nombres réels.

Ainsi :

$$\Delta = \{x_p \in [a, b] \mid 0 \leq p \leq n\} \quad (1)$$

où $x_0 = a, x_n = b$, et pour tout $p, x_p \leq x_{p+1}$.

$\delta(\Delta) = \max_{0 \leq p \leq n-1} (x_{p+1} - x_p)$ est désigné comme le "pas" de la subdivision Δ .

Définition 1.1

Pour une subdivision Δ sur $[a, b]$, et en sélectionnant $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}[$, on définit la somme de Riemann associée à Δ et à un ensemble de points $\alpha = (\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ comme suit :

$$\Re(f, \Delta, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i) (x_{i+1} - x_i) \quad (2)$$

Définition 1.2

On qualifie la fonction f d'intégrable selon le critère de Riemann si :

$$\lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} \Re(f, \Delta, \alpha) = I \text{ est finie } \forall \alpha \quad (3)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (4)$$

1.1.2 Géométriquement

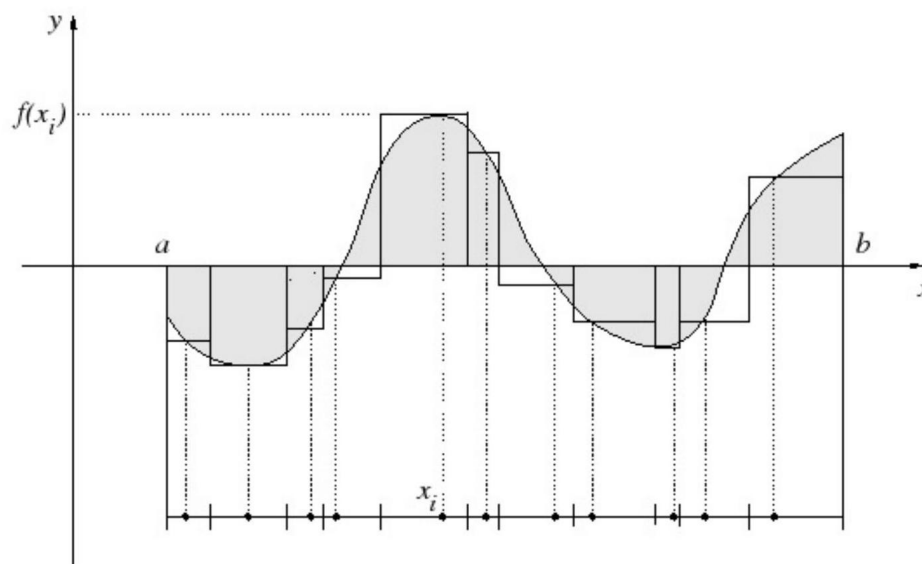


FIGURE 1.1 –

Exemple : 1.1

Pour une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$, notée $\{x_i = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n\}$, et en considérant la fonction $f(x) = x$ définie sur cet intervalle, on note que l'écart entre deux points successifs est donné par :

$$(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i = 0, \dots, n-1 \quad (5)$$

Nous évaluons ensuite la somme suivante :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

Cette somme est en fait une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.

1.1.3 Sommes de Darboux

Définition 1.3

On considère une subdivision Δ sur $[a, b]$ et on choisit $I_i + [x_i, x_{i+1}[$, on choisit

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}[} |f(x)| \quad (6)$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}[} |f(x)| \quad (7)$$

Les deux sommes suivantes

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{p+1} - x_p) \quad (8)$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{p+1} - x_p) \quad (9)$$

Aussi connues sous les noms de sommes de Darboux inférieure et supérieure.

Théorème 1.1

Si $\lim_{\delta(\Delta) \rightarrow +\infty} S(f, \Delta) = \lim_{\delta(\Delta) \rightarrow +\infty} s(f, \Delta) = f$ est donc intégrable selon la logique de Riemann.

Proposition 1.1

En fonction de Riemann sur I , toute fonction continue sur un intervalle I est une fonction intégrable.

Exemple : 1.2

$\{x_i = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n\}$. est une division de l'intervalle $[0, 1]$. $f(x) = x$, dans l'intervalle $[0, 1]$.
ona $\frac{1}{n}, \forall i = 0, \dots, n$

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}[}$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}[}$$

$$f(x) \Big| = \frac{i+1}{n}$$

Les deux sommes de Darboux sont calculées.

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{p+1} - x_p) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{p+1} - x_p) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

Il est observé que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \Delta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, \Delta) = \frac{1}{2}$

Ainsi, f peut être intégré dans le sens de Riemann.

1.1.4 Caractéristiques de l'intégrale de Riemann

Supposons que f et g soient deux fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R} (a \leq c \leq b)$, nous obtiendrons :

Lorsque la fonction f est intégrable sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$, elle est également intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, on obtient :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx \quad (10)$$

La fonction f peut être intégrée sur l'intervalle $[a, b]$ et $f(x)$ positif, donc
 equation $\int_a^b f(x)dx$ positif equation

Si les fonctions f et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, alors la fonction λf est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \quad (11)$$

En cas d'intégration des fonctions f et g sur l'intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)dx \quad (12)$$

Supposons que f soit une fonction intégrable sur $[a, b]$

1.2 Valeur moyenne

Définition 1.2

3. Le nombre de f dans $[a, b]$ est appelé moyen de f .

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \quad (13)$$

1.3 Valeur efficace

Définition 1.3

Le nombre v est connu sous le nom de valeur efficace de f dans $[a, b]$.

$$v^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (14)$$

1.4 Calcul de primitives (Intégrale indéfinie)

Définition 1.6

Considérons f comme une fonction continue sur I . La dérivée de F donne $f(F' = f)$ si $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I . On s'habitue donc à noter toute primitive de f sous la forme suivante :

$$F(x) = \int f(x) dx \quad (15)$$

connue sous le nom d'intégrale indéfinie de f .

Remarque 1.1

La primitive d'une fonction s'il existe n'a pas unique.

Proposition 1.2

Soient f et g deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) + \int g(x) dx \quad (16)$$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx \quad (17)$$

1.4.1 Intégration par parties

Théorème 1.2

Soient u et v deux fonctions dérivables. On a

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \quad (18)$$

Preuve 1.1

On a $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

alors $\int (u(x)v(x))'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$

donc

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

c'est à dire

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Exemple : 1.3

Calculons $\int x^2 e^x dx$

On a

$$\begin{aligned} x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ x e^x - e^x dx &= \int x^2 e^x dx \\ x^2 e^x - 2 \int x e^x dx &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.4.2 Changement de variable

Théorème 1.2.7 Soient u une fonction dérivable et f une fonction continue avec

$$F(x) = \int f(x)dx$$

On a $\int u' f(u)dx = \int f(u)du = F(u)$

1.5 Intégrale doubles

Définition : Soit $f(x, y)$ une fonction continue définie sur un domaine D du plan xy . L'intégrale double de f sur D est définie comme suit :

$$\iint_D f(x, y)dA = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (19)$$

où ΔA représente la subdivision de D en petits éléments de surface, (x_i^*, y_j^*) sont des points de chaque élément de surface, et ΔA_{ij} est la surface de l'élément (x_i^*, y_j^*) .

1.5.1 Théorème de Fubini

1. En l'occurrence, si $D = [a, b] \times [c, d]$, $a < b$ et $c < d$, on a.

$$\iint_D f(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \quad (20)$$

2. Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b, u(x) < y < v(x)\}$, où $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_D f(x, y) = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (21)$$

Proposition 1.3.2 Si $f(x, y) = g(x)h(y)$ avec $D = [a, b] \times [c, d]$, $a \leq b$ et $c \leq d$, on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \times \left[\int_c^d h(y) dy \right] \quad (22)$$

Exemple 1.4

On calcule

$$I = \iint_D (xy) dx dy$$

, où

$$D = [1, 2] \times [3, 5]$$

$$I = \left[\int_1^2 x dx \right] \times \left[\int_3^5 y dy \right] = \frac{3}{2} \times \frac{16}{2} = 12$$

Exemple 1.5

On calcule

$$I = \iint_D dx dy$$

où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$
$$\iint_D dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} dy \right] dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}$$

1.5.2 Changement de variable

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et

$$\varphi : U \rightarrow V$$

$$(u, v) \rightarrow (x, y)$$

une application de classe C^1 , et $\Delta \subset U$ et $D \subset V$

La matrice jacobien de φ est

$$j(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\det(j(\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Si $\varphi(\Delta) = D$, on obtient :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v)) \det(j(\varphi)) du dv \quad (23)$$

1.5.3 Coordonnées polaires

$$\varphi : (r, \theta) \rightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

La matrice jacobien de φ est :

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \left| \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} \right| = r$$

Si $\varphi(\Delta) = D$, on obtient :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |r| dr d\theta \quad (24)$$

Exemple : 1.6

On calcule

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy \quad D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{et } \Delta = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$$

$$\iint_{\Delta} \frac{r}{1+r^2} dr d\theta = \pi \ln 2$$

1.6 Intégrales triples**Définition : 1.4**

Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue définie sur un domaine D de l'espace tridimensionnel. L'intégrale triple de f sur D est définie comme suit :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{n, m, p \rightarrow \infty \\ V \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \cdot V \quad (25)$$

où $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ est un point arbitraire dans la (i, j, k) -ième subdivision de D , et V est le volume de cette subdivision.

1.6.1 Théorème de Fubini**Théorème 1.4**

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Cas où $D = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$, $a \leq b, c \leq d$ et $s \leq t$, on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_s^t f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx \quad (26)$$

2. Cas où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \Delta, u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$, où $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, D est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Delta} \left[\int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy \quad (27)$$

3. Cas où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq z \leq b, (x, y) \in \Delta(z)\}$, où $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, $D(z)$ est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2$, $\forall z \in [a, b]$, alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\iint_{\Delta(z)} f(x, y, z) dx dy \right] dz \quad (28)$$

Proposition

Si $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$ avec $D = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$, $a \leq b, c \leq d$ et $s \leq t$ on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \times \left[\int_c^d h(y) dy \right] \times \left[\int_s^t k(z) dz \right] \quad (29)$$

Exemple : 1.7

On calcule $\iiint_D (xyz) dx dy dz$, $D = [0, 1]^3$

$$\iiint_D (xyz) dx dy dz = \left[\int_0^1 x dx \right] \times \left[\int_0^1 y dy \right] \times \left[\int_0^1 z dz \right] = \frac{1}{8}$$

Exemple : 1.8

On calcule

$$\iiint_{\Delta} dx dy dz, \Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in D = [0, 1]^2, 0 \leq z \leq x\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta} dx dy dz &= \iint_D \left[\int_x^y dz \right] dx dy \\ &= \iint_D x dx dy \\ &= \left[\int_0^1 x dx \right] \times \left[\int_0^1 dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.6.2 Changement de variable

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^3$ et

$$\varphi : U \rightarrow V$$

$$(u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$$

une application de classe C^1 , et $\Delta \subset U$ et $D \subset V$

La matrice jacobien de φ est :

$$j(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$\det(j(\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Si $\varphi(\Delta) = D$, on obtient :

$$\iiint_D f(x, y, w) dx dy = \iiint_{\Delta} f(\varphi(u, v, w)) \det(j(\varphi)) du dv dw \quad (30)$$

1.6.3 Coordonnées cylindriques

$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \rightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ La matrice jacobien de φ est :

$$j(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(j(\varphi)) = r.$$

Si $\varphi(\Delta) = D$ la formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \det(j(\varphi)) dr d\theta dz \quad (31)$$

Exemple : 1.9

$$\iiint_D dx dy dz, D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$\Delta = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Delta} r dr d\theta dz = \left[\int_0^1 r dr \right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[\int_0^2 dz \right] = \frac{1}{2} 2\pi 2 = 2\pi$$

1.6.4 Coordonnées sphériques

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \beta) \rightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta \cos \beta, r \sin \theta \cos \beta, r \sin \beta)$$

La matrice jacobien de φ est :

$$j(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \beta & -r \sin \theta \cos \beta & -r \cos \theta \sin \beta \\ \sin \theta \cos \beta & r \cos \theta \cos \beta & -r \sin \theta \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & r \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\det(j(\varphi)) = r^2 \cos \beta$$

La formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \theta \cos \beta, r \sin \theta \cos \beta, r \sin \beta) r^2 |\cos \beta| dr d\theta d\beta \quad (32)$$

Exemple : 1.10

On calcule

$$\begin{aligned} & \iiint_D dx dy dz, D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \\ & \Delta = \left\{ (r, \theta, \beta) / 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \right\} \\ & \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} r^2 |\cos \beta| dr d\theta d\beta \\ & = \left[\int_0^1 r^2 dr \right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta d\beta \right] \\ & = \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

1.7 Application au calcul d'aires, de volumes

1.7.1 Calcul l'aire

Définition 1.7

Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. L'intégrale :

$$\iint_D dx dy \quad (33)$$

nous donne l'aire du domaine D .

Exemple : 1.11

On calcule l'aire délimitée par

$$y + x^2 = 4 \text{ et } y = 0$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 4 - x^2 \text{ et } -2 \leq x \leq 2\} \\ \iint_D dx dy &= \int_{-2}^2 \left[\int_0^{4-x^2} dy \right] dx \\ &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 \\ &= 32 - \frac{16}{3} = \frac{80}{3} \end{aligned}$$

1.7.2 Calcul de volume

Définition 1.8

Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$. L'intégrale :

$$\iiint_D dx dy dz \quad (34)$$

nous donne le volume du domaine D .

Exemple : 1.12

Calculons le volume du cylindre de rayon a et l'hauteur h

$$\iiint_D dx dy dz, D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\Delta = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq a \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Delta} r dr d\theta dz$$

$$\begin{aligned} \left[\int_0^a r dr \right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[\int_0^h dz \right] &= \frac{a^2}{2} 2\pi h \\ &= a^2 \pi h. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Intégrales Impropres

Ce chapitre explore les intégrales impropres, qui sont des généralisations des intégrales définies pour des fonctions sur des intervalles bornés. Il commence par examiner les intégrales impropres de fonctions sur des intervalles non bornés, où les bornes de l'intervalle d'intégration s'étendent jusqu'à l'infini. Cela inclut des discussions sur les conditions de convergence et les méthodes pour évaluer ces intégrales.

Ensuite, le chapitre se penche sur les intégrales impropres de fonctions positives, où les fonctions sont toujours positives sur l'intervalle d'intégration. Il examine les critères de convergence spécifiques pour ce type d'intégrale et discute de leurs propriétés. Une autre section importante aborde les intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle borné, où les fonctions peuvent devenir infinies à une extrémité de l'intervalle.

Le chapitre examine les conditions sous lesquelles de telles intégrales convergent et fournit des exemples pour illustrer ces concepts. Il explore les propriétés de ces intégrales et leur lien avec la convergence des intégrales impropres. Dans l'ensemble, ce chapitre fournit un cadre théorique et pratique pour comprendre et évaluer les intégrales impropres dans divers contextes mathématiques et scientifiques.

2.1 Intégrales impropres de Fonctions sur des intervalles non bornés

Une intégrale impropre est une généralisation de l'intégrale définie pour les fonctions qui ne sont pas bornées sur l'intervalle d'intégration.

Soit $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle non borné $[a, \infty)$. L'intégrale impropre de $f(x)$ sur cet intervalle est définie comme suit :

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

Exemple 2.1 :

Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

sur l'intervalle $[1, \infty)$. L'intégrale impropre de $f(x)$ sur cet intervalle est :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1$$

Donc, l'intégrale impropre converge.

2.2 Intégrale impropre de fonctions positives

Si $f(x)$ est une fonction positive sur l'intervalle $[a, \infty)$, alors l'intégrale impropre converge si et seulement si la limite suivante existe finie :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

Exemple 2.2 :

Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

sur l'intervalle $[1, \infty)$. L'intégrale impropre de $f(x)$ sur cet intervalle est :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(x)]_1^b = \infty$$

Donc, l'intégrale impropre diverge.

2.3 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle borné

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle borné $[a, b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$. L'intégrale impropre de $f(x)$ sur cet intervalle est définie comme :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{b-\epsilon} f(x) dx + \int_{b+\epsilon}^a f(x) dx \right) \quad (3)$$

Exemple 2.3 :

Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$. L'intégrale impropre de $f(x)$ sur cet intervalle est :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_{1+\epsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right)$$

Cette intégrale diverge, car l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

est singulière en $x = 0$.

2.4 Intégrale absolument convergente

Une intégrale est dite absolument convergente si l'intégrale de la valeur absolue de la fonction converge.

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty \tag{4}$$

Exemple 2.4 :

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

sur l'intervalle $[0, \infty)$ est absolument convergente car :

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx < \infty$$

Résumé du chapitre

Les intégrales impropres généralisent les intégrales définies pour les fonctions non bornées sur les intervalles d'intégration, utiles pour traiter les fonctions discontinues ou divergentes.

Intégrales impropres sur des intervalles non Bornés Pour une fonction continue $f(x)$ sur un intervalle non borné $[a, \infty)$, l'intégrale impropre est définie comme la limite de l'intégrale bornée lorsque la borne supérieure tend vers l'infini.

Intégrale Impropre de Fonctions Positives Si $f(x)$ est une fonction positive sur $[a, \infty)$, alors l'intégrale impropre converge si et seulement si la limite de l'intégrale bornée est finie.

Intégrales Impropres sur des Intervalles Bornés Pour une fonction définie sur un intervalle borné $[a, b]$, l'intégrale impropre est définie comme la somme des intégrales sur chaque sous-intervalle borné lorsque les bornes tendent vers les limites de l'intervalle.

Chapitre 3

Equations différentielles

Ce chapitre est une exploration approfondie des équations différentielles, commençant par un rappel sur les équations différentielles ordinaires du premier et du deuxième ordre. Il aborde ensuite les méthodes de résolution des équations différentielles de variables séparées, qui consistent à réorganiser l'équation pour isoler les variables.

Ensuite, le chapitre se penche sur les équations différentielles ordinaires linéaires du premier ordre et du deuxième ordre, ainsi que sur les équations linéaires homogènes. Ces équations sont étudiées en détail pour comprendre leurs propriétés et leurs solutions.

Le chapitre continue avec la résolution des équations différentielles non homogènes, où l'on introduit les concepts de termes non homogènes et de méthodes de résolution spécifiques pour ces cas.

Enfin, le chapitre conclut avec les équations aux dérivées partielles, une généralisation des équations différentielles ordinaires qui impliquent des fonctions de plusieurs variables. Il aborde les dérivées d'une fonction composée de deux variables, la différentielle totale et la forme différentielle totale exacte, ainsi que leurs applications à l'intégration des équations différentielles du premier ordre.

3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

3.1.1 Equations différentielles ordinaires d'ordre 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre une équation de la forme

$$y' = f(t, y) \quad (1)$$

on dit que la fonction dérivable, $y_0 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle d'ordre 1 sur I si

$$y_0'(t) = f(t, y_0(t)), \forall t \in I \quad (2)$$

Exemple 3.1.1 La fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = e^t$ est une solution de l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$y' = y$$

sur $\mathbb{R}$, car $x'(t) = e^t = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Equations différentielles de variables séparées

Une équation différentielle de 1^{er} ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(y)y' = g(x) \quad (3)$$

donc

$$F(y) = G(x) + k, k \in \mathbb{R} \quad (4)$$

(F est une primitive de f et G est une primitive de g) donc

$$y = F^{-1}(G(x) + c) \quad (5)$$

Exemple 3.1.2

Résoudre sur $I = [2, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y$$

On peut séparer les variables (x et y) en divisant par $yx \ln x$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x}$$

donc

$$\ln y = \int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx + c, c \in \mathbb{R}$$

c'est à dire

$$y = e^{\int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx + c}, c \in \mathbb{R}$$

3.2 Equation différentielle ordinaires linéaire

Définition 3.2.1

Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = f(x) \quad (6)$$

l'équation homogène associée est

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \quad (7)$$

Proposition 3.2.2

Si y_1 et y_2 deux solutions de (3.2). Alors $y_1 + y_2$ et αy_1 sont aussi deux solutions de (3.2).

Exemple 3.2.3

$y_1(x) = x$ et $y_2(x) = 5$ deux solutions de l'équation $y''' + y'' = 0$, alors $y_3(x) = x + 5$ et $y_4(x) = 10x$ sont aussi des solutions.

Proposition 3.2.4 Si S_0 est l'ensemble des solutions de (3.2) et y_p une solution particulière de (3.1), alors l'ensemble des solutions de (3.1) est donné par $S = \{y + y_p / y \in S_0\}$.

3.2.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre 1

Définition 3.2.5

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle du premier ordre avec

$$x' = f(t) \cdot x + g(t) \quad (8)$$

avec f, g des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle homogène associée est

$$x' = f(t) \cdot x \quad (9)$$

Exemple 3.2.6

L'équation différentielle

$$y' = t^2 y + t$$

est une equation différentielle linéaire d'ordre 1. L'équation différentielle homogène associée est

$$y' = t^2 y$$

3.2.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène

$$x' = f(t) \cdot x \tag{10}$$

c'est à dire $\frac{x'}{x} = f(t)$ donc

$$\ln |x| = \int f(t) dt + c, c \in \mathbb{R} \tag{11}$$

alors

$$x = k e^{\int f(t) dt}, k \in \mathbb{R}$$

Résolution d'une équation différentielle linéaire non homogène

$$x' = f(t) \cdot x + g(t)$$

Si x_p est une solution particulière de cette équation

alors

$$x(t) = ke^{\int f(t)dt} + x_p(t), k \in \mathbb{R} \quad (12)$$

Exemple 3.2.7

On considère l'équation

$$xy' + 2y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

L'équation homogène associée est

$$xy' + 2y = 0$$

la solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = \frac{k}{x^2}, k \in \mathbb{R}$$

Solution particulière de l'équation non homogène

$$y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2}$$

donc

$$y'_p(x) = \frac{k'(x)x^2 - 2k(x)x}{x^4}$$

et on a aussi

$$xy'_p + 2y_p = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{k'(x)x^2 - 2k(x)x}{x^3} + \frac{2k(x)}{x^2} &= \frac{x^2}{x^2 + 1} \implies \frac{k'(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 + 1} \\
\implies k'(x) &= \frac{x^3}{x^2 + 1} \\
\implies k'(x) &= \frac{x^3 + x - x}{x^2 + 1} \\
\implies k'(x) &= x - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} \\
\implies k(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)
\end{aligned}$$

donc

$$y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \ln(x^2 + 1)$$

finalemt la solution générale l'équation non homogène est

$$y(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \ln(x^2 + 1), k \in \mathbb{R}$$

3.2.3 Equation de Bernoulli

Définition 3.2.8

On appelle équation de Bernoulli une équation de la forme

$$x' = p(t)x + q(t)x^\alpha \tag{13}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}/\{1\}$ et p, q sont des fonctions continues.

On se place sur les intervalles où x ne s'annule pas. On peut alors diviser par x^α , et poser $z = x^{1-\alpha}$, on obtient alors

$$z' = (1 - \alpha)(p(t)z + q(t)) \tag{14}$$

est une équation linéaire en z .

3.2.4 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Définition 3.2.9

Une EDL du ^{eme} ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (15)$$

ou $a, b, c \in \mathbb{R} (a \neq 0)$ et $f \in C^0(I)$ (I ouvert de $\mathbb{R}$). L'équation homogène (ou sans second membre) associée est

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (16)$$

Proposition 3.2.10

Si y_h est une solution générale de (EH) et y_p est une solution particulière de (E). Alors $y_p + y_h$ est une solution générale de (E)

Résolution de l'équation homogène associée (E.H.)

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (17)$$

On cherche la solution sous la forme $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. On a donc $y'(x) = ry(x)$ et $y''(x) = r^2y(x)$, donc (EH) devient

$$y (ar^2 + br + c) = 0 \quad (18)$$

Définition 3.2.11

L'équation

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (19)$$

se nomme équation caractéristique de (E.H.).

Proposition 3.2.12

Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :

1. $\Delta > 0$: (EC) admet 2 racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, et

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (20)$$

est une solution générale de (EH)

2. $\Delta = 0$: (EC) admet une racine double $r \in \mathbb{R}$

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{rx}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (21)$$

3. $\Delta < 0$: (EC) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$) et

$$y(x) = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (22)$$

Exemple 3.2.13

$y'' - 4y' + 3y = 0$ l'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$ admet 2 racines réelles distinctes $r_1 = 1, r_2 = 3$, l'ensemble des solutions de (E) sont : $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Exemple 3.2.14

$y + 2y' + y = 0$; l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$; $r = -1$ racine double, l'ensemble des solutions de (E) sont :

$$y(x) = (c_1x + c_2)e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (23)$$

Exemple 3.2.15

$y'' + 2y' + 4y = 0$; l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 4 = 0$, $\Delta = -12$ donc $r_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $r_2 = -1 - \sqrt{3}i$, d'où l'ensemble des solutions de (E) sont :

$$y(x) = \left(c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x \right) e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.3 Résolution de l'équation non homogène

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (24)$$

Solution particulière à (E)

1. Si $f(x) = P(x)$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.

On cherche la solution sous la forme $y = x^k Q(x)$ tel que Q est un polynôme et $\deg Q = \deg P$

$k = 0$, si 0 n'est pas racine de (EC)

$k = 1$, si 0 est l'une des deux racines de (EC)

$k = 2$, si 0 est racine double de (EC)

2. Si $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.

On cherche la solution sous la forme $y = x^k e^{\alpha x} Q(x)$ tel que Q est un polynôme et $\deg Q = \deg P$

$k = 0$, si α n'est pas racine de (EC)

$k = 1$, si α est l'une des deux racines de (EC)

$k = 2$, si α est racine double de (EC)

Exemple 3.2.16

$$y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^x$$

l'équation homogène est

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

l'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$; on a $\Delta = 0$; $r = 2$ racine double donc la solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$y_h = (c_1x + c_2)e^{2x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. On cherche une solution particulière de l'équation non homogène, comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors $y_p(x) = q(x)e^x$ tel que $\deg q = 2$;

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{ donc}$$

$$y'_p(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

$$y''_p(x) = 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

En remplaçant dans (E), on trouve

$$\begin{aligned}
& 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x - 4(2ax + b)e^x - 4(ax^2 + bx + c)e^x + 4(ax^2 + bx + c)e^x \\
& (x^2 + 1)e^x \\
& ((a - 1)x^2 + (b - 4a)x + c + b + 2a - 1)e^x = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 4a = 0 \\ c - 2b + 2a - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 7 \end{cases}$$

donc la solution particulière $y_p(x) = (x^2 + 4x + 7)e^x$

finalemt la solution générale de l'équation non homogène est

$$y(x) = y_h = (c_1x + c_2)e^{2x} + (x^2 + 4x + 7)e^x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.4 Equation aux dérivées partielles

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles défini au voisinage de $A(a, b)$ Si la fonction $x \rightarrow f(x, b)$ a une dérivée par rapport x , on la note $f'_x(a, b)$. On peut définir la dérivée partielle par rapport a x par

$$f'_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f'_x(x, y)$$

on définit la dérivée partielle par rapport a y par meme méthode, on note

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

3.4.1 Dérivées successives

De la même façon, on peut définir la dérivée de la fonction f'_x par rapport à x , on la note f''_{x^2} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

aussi la dérivée de la fonction f'_x par rapport à y , on la note f''_{xy} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

la dérivée de la fonction f'_y par rapport à y , on la note f''_{y^2} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

la dérivée de la fonction f'_y par rapport à x , on la note f''_{yx} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Théorème 3.3.1 de Schwarz

Si les dérivées partielles f''_{xy} et f''_{yx} sont continues, alors ces dérivées sont égales

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Exemple 3.3.2

Déterminer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

pour la fonction $f(x, y) = x^2 + xy^2 - y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y$$

3.4.2 Dérivées d'une fonction composées de deux variables

Soit la fonction $F(x, y) = f(u, v)$, tel que u, v des fonctions de x et y admettant des dérivées partielles, si f admet des dérivées partielles, alors F admet des dérivées partielles et

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

Exemple 3.3.3

Soit $f(u, v) = u^2 + uv + v$

$$u(x, y) = 2x - y$$

$$v(x, y) = x + y$$

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

3.4.3 Différentielles totales

Soit $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles continues

La différentielle totale de U s'écrit par

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad (25)$$

Si $U(x, y) = C$ alors $dU = 0$.

Exemple 3.3.4

$$U \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = x^2 + xy$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 2x + y, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x$$

$$dU = (2x + y)dx + xdy$$

3.4.4 Formes différentielles totales exactes

On considère l'équation différentielle suivante

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (26)$$

Si on peut trouver une fonction $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \quad (27)$$

Alors la solution :

$$U(x, y) = Cte$$

Proposition 3.3.5

Soit $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \quad (28)$$

Si M, N des fonctions continues alors

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (29)$$

Preuve. On a

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

donc

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x, y)$$

et M, N des fonctions continues alors d'après théorème de Schwarz on trouve

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Remarque 3.3.6

On a

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

danc $U(x, y) = \int M(x, y)dx + k(y)$

aussi $\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y)dx \right) + k'(y) = N(x, y)$ c'est à dire

$$k'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y)dx \right)$$

3.5 Application à l'intégration d'équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle suivante

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \tag{30}$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{31}$$

Si on peut trouver une fonction $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \tag{32}$$

Alors la solution :

$$U(x, y) = Cte$$

Exemple 3.3.7

Résoudre l'équation

$$y' = -\frac{1 + 2xy^3}{3x^2y^2}$$

donc

$$(1 + xy^3) + (3x^2y^2) y' = 0$$

c'est à dire

$$(1 + xy^3) dx + (3x^2y^2) dy = 0$$

on pose

$M(x, y) = 1 + 2xy^3, N(x, y) = 3x^2y^2$ on obtient

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 6xy^2$$

Alors il existe une fonction U tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 1 + 2xy^3, \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2$$

$$U(x, y) = x + x^2y^3 + k(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + k'(y) = 3x^2y^2$$

donc $k'(y) = 0 \implies k(y) = \text{Cte.}$

finalement

$$x + x^2 y^3 = \text{Cte} \implies y = \sqrt[3]{\frac{c - x}{x^2}}$$

,

$$c = 0 : y(x) = -x^{-\frac{1}{3}}, y'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1 + 2xy^3}{3x^2y^2} = -\frac{1 - 2xx^{-1}}{3x^2x^{-\frac{2}{3}}} \\ &= -\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

.

Exemple 3.3.8

Résoudre l'équation

$$y' = -\frac{1 + 2xy}{x^2}$$

donc

$$1 + 2xy + x^2y' = 0$$

c'est à dire

$$(1 + 2xy)dx + x^2dy = 0$$

on pose

$M(x, y) = 1 + 2xy, N(x, y) = x^2$ on obtient

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x$$

Alors il existe une fonction U tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 1 + 2xy, \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x^2$$

$$U(x, y) = x + x^2y + k(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x^2 + k'(y) = x^2$$

$$\text{donc } k'(y) = 0 \implies k(y) = \text{Cte.}$$

finalement

$$x + x^2y = \text{Cte} \implies y = \frac{c-x}{x^2}$$

3.5.1 Facteur intégrant

Soit une différentielle de la forme

$$dV = M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{33}$$

tel que

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

cette différentielle n'est pas totales.

On cherche alors une fonction $F(x, y)$ tel que

$$dU = F(x, y)M(x, y)dx + F(x, y)N(x, y)dy$$

est une diff totales

cette fonction est appelée facteur intégrant de la diff dV .

3.5.2 Détermination de facteur intégrant

Il suffit de trouver la fonction F qui vérifie la relation

$$\frac{\partial(FM)}{\partial y} = \frac{\partial(FN)}{\partial x}$$

c'est à dire

$$F \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial F}{\partial y} = F \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial F}{\partial x}$$

Facteur intégrant de la forme $F(x)$

Donc dans ce cas on a

$$F \frac{\partial M}{\partial y} = F \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial F}{\partial x}$$

ce qui implique

$$N \frac{\partial F}{\partial x} = F \frac{\partial M}{\partial y} - F \frac{\partial N}{\partial x}$$

alors

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

donc $F(x) = e^{\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx}$

Facteur intégrant de la forme $F(y)$

Donc dans ce cas on a

$$F \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial F}{\partial y} = F \frac{\partial N}{\partial x}$$

ce qui implique

$$M \frac{\partial F}{\partial y} = F \frac{\partial N}{\partial x} - F \frac{\partial M}{\partial y}$$

alors

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$\text{donc } F(y) = e^{\int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy}$$

Exemple 3.3.9

Résoudre

$$y - xy' = 0$$

on peut écrire cette équation sous la forme

$$dV = ydx - xdy = 0$$

cette différentielle n'est pas totale.

On cherche alors une fonction $F(x)$ tel que

$$dU = F(x)dV = F(x)ydx - F(x)xdy$$

est une diff totale

donc

$$F(x) = e^{\int \frac{1}{-x}(1+1)dx}$$

c'est à dire $F(x) = \frac{1}{x^2} + c, c \in \mathbb{R}$

et on a

$$dU = \frac{1}{x^2}(ydx - xdy)$$

Donc on a $\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2}$ et

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{x}$$

alors

$$U(x, y) = \frac{-y}{x} + k(y)$$

ce qui implique

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{x} + k'(y) = \frac{-1}{x}$$

c'est à dire $k'(y) = 0 \implies k(y) = \text{Cte.}$

$$U(x, y) = \frac{-y}{x} + \text{Cte}$$

.

donc la solution est

$$\frac{-y}{x} = \text{Cte.} \implies y = cx, c \in \mathbb{R}$$

finalemt la solution de (E) est $y=c x, c \in \mathbb{R}$

Chapitre 4

Séries numériques

Ce chapitre explore différents aspects des séries, en commençant par les séries à termes positifs, où il examine les critères de convergence tels que le critère d'équivalence, le critère d'Alembert, le critère de Cauchy et le critère d'intégrale de Cauchy. Ces critères sont des outils essentiels pour déterminer si une série converge ou diverge.

Ensuite, le chapitre aborde les séries alternées, qui sont des séries dont les termes alternent en signe. Il explore les propriétés spécifiques de ces séries et présente des critères de convergence spécifiques à ce type de séries. Il se penche également sur les séries à termes quelconques, où les termes de la série peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Dans ce contexte, le chapitre examine les suites et séries de fonctions, en mettant en lumière les différents types de convergence, tels que la convergence uniforme et la convergence ponctuelle. En outre, le chapitre explore les caractéristiques des suites de fonctions, mettant en évidence les concepts de convergence uniforme et de continuité limite, qui sont cruciaux dans l'analyse des séries de fonctions.

Il se termine par des applications des séries entières, qui sont des séries de puissances formelles, notamment dans le calcul de limites et dans la représentation de fonctions par des séries de Taylor et de Maclaurin.

4.1 Série Numérique

Une série numérique est une somme infinie d'une séquence de nombres réels. Elle est représentée comme une somme infinie de termes, souvent notée sous la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

où a_n est la suite des termes de la série.

4.2 Séries à Termes Positifs

Une série est dite à termes positifs si tous ses termes sont positifs ou nuls. Ce type de série possède des propriétés particulières en ce qui concerne la convergence.

4.2.1 Critère d'Équivalence

Le critère d'équivalence stipule que si deux séries ont des termes équivalents, alors elles ont la même nature de convergence.

Démonstration

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deux séries telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad (2)$$

Alors, les deux séries ont la même nature de convergence.

Exemple :

Considérons les séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Bien que les termes ne soient pas identiques, ils sont équivalents car $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Par conséquent, les deux séries ont la même nature de convergence.

4.2.2 Critère d'Alambert

Le critère d'Alambert, également appelé le critère du rapport, est un critère de convergence pour les séries à termes positifs. Il se base sur la limite du rapport des termes consécutifs de la série.

Démonstration

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série à termes positifs.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, alors la série converge.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, alors la série diverge.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, le test est indéterminé.

Exemple

Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Utilisons le critère d'Alambert en calculant la limite du rapport des termes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Puisque cette limite est inférieure à 1, la série converge.

4.2.3 Critère de Cauchy

Le critère de Cauchy, également connu sous le nom de critère du quotient, est un autre critère de convergence pour les séries à termes positifs. Il se base sur la limite du rapport des termes consécutifs de la série.

Démonstration

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série à termes positifs.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, alors la série converge.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, alors la série diverge.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, le test est indéterminé.

Exemple

Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Utilisons le critère de Cauchy en calculant la limite du rapport des termes :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0\end{aligned}$$

Puisque cette limite est inférieure à 1, la série converge.

Critère d'Intégrale de Cauchy

Le critère d'intégrale de Cauchy utilise une comparaison avec une intégrale pour déterminer la convergence d'une série. Si l'intégrale associée à la série converge, alors la série converge également, et inversement.

Démonstration

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série à termes positifs.

Si $\int_1^{\infty} a_n dx$ converge, alors la série converge.

Si $\int_1^{\infty} a_n dx$ diverge, alors la série diverge.

Exemple

Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Utilisons le critère d'intégrale de Cauchy en comparant la série avec l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Puisque cette intégrale converge, la série converge également.

4.3 Série Alternée

Une série alternée est une série dans laquelle les termes alternent de signe, c'est-à-dire qu'ils sont positifs puis négatifs, ou vice versa.

4.3.1 Critère de Leibniz

Le critère de Leibniz est un critère de convergence pour les séries alternées. Il stipule que si les termes de la série diminuent en valeur absolue vers zéro et alternent de signe, alors la série converge.

Démonstration : Soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{3}$$

une série alternée.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ pour tout n , alors la série converge.

Exemple : Considérons la série alternée :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Les termes de cette série alternent de signe et diminuent en valeur absolue vers zéro. Par conséquent, la série converge.

4.4 Suites et Séries de Fonctions

Une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ est une séquence de fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ définies sur un même domaine D .

Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble D . On dit que la suite de fonctions converge simplement vers une fonction $f(x)$ sur D si, pour tout x dans D , la suite de nombres réels $\{f_n(x)\}$ converge vers $f(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

Exemple

Considérons la suite de fonctions :

$$\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{x^n}{n} \right\}$$

définie sur l'intervalle $[0, 1]$. Cette suite converge simplement vers la fonction nulle $f(x) = 0$ sur $[0, 1]$.

4.3.3 Convergence Simple et Uniforme

La convergence simple et la convergence uniforme sont deux modes de convergence pour les suites de fonctions.

Définition Mathématique

Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble D . On dit que la suite de fonctions converge uniformément vers une fonction $f(x)$ sur D si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout x dans D et pour tout $n > N$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Exemple

Considérons la suite de fonctions $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x^n}{n}\right\}$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$. Cette suite converge uniformément vers la fonction nulle $f(x) = 0$ sur $[0, 1]$.

4.5 Séries Entières

Une série entière est une série de puissances de la variable réelle x . Elle est généralement écrite sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4)$$

4.5.1 Rayon de Convergence

Le rayon de convergence d'une série entière est la distance maximale entre le point où la série converge et le point central de la série.

Définition : Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière. Le rayon de convergence R est défini par :

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (5)$$

Démonstration : Le rayon de convergence R d'une série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

est donné par la formule de Cauchy-Hadamard :

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Exemple : Considérons la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Son rayon de convergence est infini, ce qui signifie qu'elle converge pour tout x réel.

4.6 Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont des séries infinies utilisées pour représenter des fonctions périodiques comme une somme infinie de fonctions trigonométriques.

Les séries de Fourier sont des séries infinies utilisées pour représenter des fonctions périodiques comme une somme infinie de fonctions trigonométriques.

Définition

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π . Sa série de Fourier est donnée par :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (6)$$

où les coefficients de Fourier sont définis par les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{aligned}$$

Exemple : Considérons la fonction périodique $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ses coefficients de Fourier peuvent être calculés à l'aide des intégrales de Fourier.

4.6.1 Applications des Séries Entières

Les séries entières, en tant qu'expansion d'une fonction en une somme infinie de termes, ont de nombreuses applications dans divers domaines des mathématiques et des sciences. Elles sont largement utilisées pour approximer des fonctions complexes, résoudre des équations différentielles et étudier le comportement des fonctions dans diverses situations.

4.6.2 Approximation de Fonctions

Les séries de Taylor, un type de série entière, sont souvent utilisées pour approximer des fonctions complexes autour d'un point donné. Une fonction $f(x)$ peut être approximée par sa série de Taylor autour du point a comme suit :

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (7)$$

Cette approximation devient plus précise à mesure que le nombre de termes de la série augmentent.

Exemple : Approximation de la fonction exponentielle par sa série de Taylor autour de $a = 0$:

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (8)$$

Cette série est connue comme la série exponentielle et converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4.6.3 Solutions d'équations différentielles

Les séries entières sont également utilisées pour résoudre des équations différentielles. En substituant une série entière dans une équation différentielle, une solution sous forme de série peut souvent être trouvée en identifiant les coefficients de la série.

Exemple : Résolution de l'équation différentielle :

$$y'' - xy = 0$$

en utilisant une série entière. En supposant que la solution est de la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

nous pouvons substituer cette série dans l'équation différentielle et identifier les coefficients pour obtenir une solution.

Chapitre 5

Transformation de Fourier

Ce chapitre explore les propriétés et les applications fondamentales de la transformation de Fourier (TF), une puissante technique mathématique utilisée en analyse des signaux et en traitement du signal.

Il commence par examiner la linéarité de la transformation de Fourier, démontrant comment elle permet de décomposer un signal complexe en composantes plus simples, facilitant ainsi son analyse.

Ensuite, le chapitre aborde les aspects de la dérivation dans les domaines temporel et fréquentiel. Il met en évidence comment la dérivation d'un signal dans un domaine se traduit par une opération mathématique spécifique dans l'autre domaine, ce qui offre des perspectives intéressantes pour l'analyse de la dynamique des signaux.

Il explore également des opérations telles que la translation dans le temps, la contraction du domaine, la modulation et la conjugaison, qui permettent de manipuler et de transformer les signaux de différentes manières.

Le chapitre se penche également sur des concepts avancés tels que la convolution, qui décrit l'interaction entre deux signaux et joue un rôle crucial dans de nombreux domaines de l'ingénierie et des sciences appliquées.

Il examine également la continuité de la transformation de Fourier et son comportement aux fréquences infinies, offrant ainsi des informations précieuses sur la représentation

spectrale des signaux.

Enfin, le chapitre met en lumière l'utilisation de la transformation de Fourier pour résoudre les équations différentielles, démontrant comment elle permet de transformer des problèmes temporels complexes en des problèmes plus simples dans le domaine fréquentiel, facilitant ainsi leur résolution.

Définition 5.1

L^1 est l'ensemble des fonctions sommables.

Définition 5.2

L^2 est l'ensemble des fonctions à carré sommable.

Définition 5.3

$\mathcal{L}^1$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, continues en dehors de ces points, et absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.

Définition 5.4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, f est dite à décroissance rapide, et on note $f \in \mathcal{S}$ si $f \in C^\infty$ et si,

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \exists C_{k,n} : |x^k f^{(n)}(x)| \leq C_{k,n}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Définition 5.5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, f est une fonction test si elle est indéfiniment différentiable à support compact, et on note $f \in \mathcal{D}$, autrement dit

$$f \in C^\infty \text{ et } \exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq b, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b], f(x) = 0$$

5.1 La formule de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un outil mathématique puissant qui permet de décomposer une fonction périodique ou à décroissance rapide en une somme infinie

de sinus et de cosinus. Cette décomposition est très utile dans de nombreux domaines tels que le traitement du signal, l'analyse de circuits électriques, l'optique, etc.

La formule de la transformée de Fourier est la suivante :

Soit $f(t)$ une fonction à valeurs complexes, définie sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant certaines conditions de régularité (par exemple, f doit être intégrable sur tout intervalle borné). Alors sa transformée de Fourier, notée $\mathcal{F}[f](w)$ ou $\hat{f}(w)$, est définie par :

$$\mathcal{F}[f](w) = \hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iwt} dt \quad (2)$$

où w est la variable de fréquence.

5.2 Dérivation dans le domaine temporel

$$\mathcal{TF} \left(\frac{d^n f}{dt^n} \right) (t) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) \quad (3)$$

5.2.1 Dérivation dans le domaine fréquentiel

$$\frac{d^n \hat{f}}{dt^n}(\omega) = \mathcal{TF}((it\omega)^n f)(t) \quad (4)$$

5.2.2 Translation en t

$$\mathcal{TF}(f)(t - t_0) = e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega) \quad (5)$$

Remarque : Un terme correspondant à un déphasage linéaire en fonction de la fréquence ($e^{-i\omega t}$) est traduit par la translation dans le temps. Le module de la transformée de Fourier ne s'altère pas par cette opération.

5.3 Propriétés de la transformée de Fourier

5.3.1 Linéarité de $\mathcal{TF}^{-1}$

Supposons que λ et μ soient deux nombres complexes quelconques $\widehat{f}(\omega)$ et $\widehat{g}(\omega)$, deux fonctions localement intégrables et absolument intégrables sur $\mathbb{C}$. On obtient alors que

$$\mathcal{TF}^{-1}(\lambda\widehat{f} + \mu\widehat{g})(\omega) = \lambda f(t) + \mu g(t) \quad (6)$$

5.3.2 Contraction du domaine [dilatation en t]

$$\mathcal{TF}(f)(at) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (7)$$

5.3.3 Modulation

$$\mathcal{TF}(e^{i\omega_0 t} f)(t) = \widehat{f}(\omega - \omega_0) \quad (8)$$

Remarque : Dans le domaine temporel, la multiplication par une sinusoïde se traduit par une translation dans le domaine fréquentiel.

5.3.4 Conjugaison

$$\mathcal{TF}(\bar{f})(t) = \overline{\widehat{f}(\omega)} \quad (9)$$

5.3.5 Convolution

Définition 5.6

La fonction $f * g$ est le produit de convolution des fonctions réelles ou complexes f et g , définie comme suit.

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \quad (10)$$

Le produit des transformées est la transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions.

$$\mathcal{TF}(f * g)(t) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) \quad (11)$$

5.3.6 Continuité

$$f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \mathcal{TF}(f) \in C(\mathbb{R}) \quad (12)$$

5.3.7 Comportement à l'infini

$$\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\omega) = 0 \quad (13)$$

Remarque 5.1

En cas de réalité et de paire $f(t)$, alors $\mathcal{TF}(f)$ est réelle et paire.

S'il est vrai et impaire que $f(t)$. L'imaginaire $\Rightarrow \mathcal{TF}(f)$ est pur et impaire.

En cas de $f(t)$ imaginaire et paire. $\Rightarrow \mathcal{TF}(f)$ est une proposition imaginaire et une paire.

En cas d'imaginaire et d'impair de $f(t)$. La relation $\Rightarrow \mathcal{TF}(f)$ est vraie et nulle.

Théorème 5.1

Soit $f, g \in \mathcal{S}$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}d\omega \quad (14)$$

Théorème 5.2

(de Parseval) Soit $f(t)$ une fonction à énergie finie ($f \in L^2$) et $\widehat{f}(\omega)$ sa transformée de Fourier. Les fonctions $f(t)$ et $\widehat{f}(\omega)$ ont la même énergie c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (15)$$

5.4 Application à la résolution des équations différentielles

Grâce à la transformation de Fourier, il est possible de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire en la simplifiant.

Proposition 5.1

Supposons que f soit une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ avec des valeurs dans $\mathbb{C}$, notamment $\mathcal{TF}(f) = F$. Alors nous a

$$\mathcal{TF}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = (2i\pi\omega)F(\omega) \text{ et } \mathcal{TF}\left(\frac{d^2f}{dt^2}(t)\right) = (2i\pi\omega)^2F(\omega) \quad (16)$$

En générale

$$\mathcal{TF}\left(\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right) = (2i\pi\omega)^n F(\omega) \quad (17)$$

Considérons l'équation différentielle à coefficients constants suivante

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} y^{(n-j)}(t) = g(t) \quad (18)$$

avec $y^{(0)}(t) = y(t)$. Appliquons la transformée de Fourier aux deux membres de (5.24) et utilisons ses propriétés, on obtient

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} \mathcal{TF}(y^{(n-j)}(t)) = \mathcal{TF}(g(t)) \quad (19)$$

Utilisons la Proposition 5.1, (5.25) donne

$$\left[\sum_{j=0}^n a_{n-j} (2i\pi\omega)^{n-j} \right] F(\omega) = \mathcal{TF}(g(t))$$

où $\mathcal{TF}(y(t)) = F(\omega)$. De (5.26), on a

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \left[\sum_{j=0}^n a_{n-j} (2i\pi\omega)^{n-j} \right]^{-1} \mathcal{TF}(g(t)) \\ &= \mathcal{TF}(h(t)) \mathcal{TF}(g(t)) \\ &= \mathcal{TF}(h(t) * g(t)) \end{aligned} \quad (20)$$

Chapitre 6

Transformation de Laplace

Ce chapitre explore la Transformation de Laplace, en commençant par une discussion sur la transformation directe de Laplace. Il examine ensuite l'existence de cette transformation, en mettant en évidence les conditions nécessaires pour qu'elle soit définie pour une fonction donnée. Ensuite, le chapitre se penche sur l'unicité de la transformation de Laplace, démontrant que pour une fonction donnée, sa transformation de Laplace est unique.

Il aborde également différentes propriétés de la transformation de Laplace, telles que sa linéarité, qui permet de traiter les fonctions composées de manière simple et efficace. Enfin, le chapitre discute de la dérivée de la transformation de Laplace, montrant comment elle peut être utilisée pour résoudre des équations différentielles et étudier le comportement des fonctions.

La transformation de Laplace est une opération intégrale qui permet de convertir une fonction à variable réelle en une fonction à variable complexe. De plus, elle permet de convertir les équations différentielles linéaires en équations algébriques, ce qui facilite leur résolution.

6.1 Transformation de Laplace Directe

La transformation de Laplace directe est une méthode utilisée pour convertir une fonction du domaine temporel vers le domaine complexe de Laplace. La transformation de Laplace d'une fonction $f(t)$ est définie comme suit :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

où $F(s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$, s est une variable complexe, et t est le temps.

Exemple 6.1

Trouvons la transformée de Laplace de la fonction échelon unité $u(t)$.

En utilisant la définition, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

6.1.1 Existence de la Transformation de Laplace

La transformation de Laplace existe pour toute fonction $f(t)$ qui est localement intégrable sur l'intervalle $[0, \infty)$. Cela signifie que la fonction doit être intégrable sur tout intervalle borné de la forme $[0, T]$, où T est un réel positif.

Exemple : La fonction $f(t) = e^{-at}$ est localement intégrable pour tout $a > 0$, donc sa transformée de Laplace existe.

6.1.2 Unicité de la Transformation de Laplace

Si deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ ont la même transformée de Laplace $F(s)$, alors $f(t) = g(t)$ pour presque tout $t \geq 0$. Autrement dit, la transformée de Laplace est une fonction injective.

Exemple 6.2

Soit $f(t) = t$ et $g(t) = 2t$. Leur transformée de Laplace est la même, $\mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\{2t\} = \frac{1}{s^2}$, mais $f(t)$ n'est pas égal à $g(t)$ pour tout t .

6.2 Propriétés de la Transformation de Laplace

La transformation de Laplace possède plusieurs propriétés utiles, telles que la linéarité, la propriété du décalage dans le temps, la propriété de la dérivation, et la propriété de la convolution.

6.2.1 Linéarité

La transformation de Laplace est linéaire, ce qui signifie que pour des constantes a et b et des fonctions $f(t)$ et $g(t)$, on a :

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad (2)$$

Exemple 6.3

Soit

$$f(t) = e^{-at} \operatorname{etg}(t) = \sin(\omega t)$$

La transformée de Laplace de $f(t) + g(t)$ est :

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \frac{1}{s + a} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

6.2.2 Dérivée

La dérivée de la transformée de Laplace de $f(t)$ par rapport à s est égale à la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$ par rapport à t . Cela peut être exprimé comme :

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} \quad (3)$$

Exemple 6.4

Trouvons la transformée de Laplace de la dérivée première de $f(t) = e^{-at}$. Nous avons :

$$\frac{d}{dt}e^{-at} = -ae^{-at}$$

La transformée de Laplace de $-ae^{-at}$ est $aF(s)$, donc la transformée de Laplace de $f'(t)$ est $aF(s)$.

6.3 Application à la résolution des équations différentielles

La Transformation de Laplace est un outil très puissant pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Elle permet de transformer une équation différentielle en une équation algébrique, beaucoup plus facile à résoudre.

Considérons une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme :

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (4)$$

où a_2, a_1, a_0 sont des constantes réelles et $f(t)$ est une fonction continue par morceaux.

Pour résoudre cette équation à l'aide de la Transformation de Laplace, nous suivons les étapes suivantes :

Étape 1 : Appliquer la Transformation de Laplace

En appliquant la Transformation de Laplace à l'équation différentielle, on obtient :

$$a_2 L\{y''(t)\} + a_1 L\{y'(t)\} + a_0 L\{y(t)\} = L\{f(t)\} \quad (5)$$

En utilisant les propriétés de la Transformation de Laplace, on a :

$$a_2(s^2 Y(s) - sy_0 - y'_0) + a_1(sY(s) - y_0) + a_0 Y(s) = L\{f(t)\} \quad (6)$$

Où $Y(s) = L\{y(t)\}$.

Rassemblons les termes et réécrivons cette équation sous forme algébrique :

$$a_2 s^2 Y(s) + (a_1 s + a_0) Y(s) = a_2 s y_0 + a_2 y'_0 + a_1 y_0 + L\{f(t)\} \quad (7)$$

Étape 2 : Résoudre l'équation algébrique obtenue

L'équation algébrique obtenue est une équation du second degré en $Y(s)$:

$$a_2 s^2 Y(s) + (a_1 s + a_0) Y(s) = a_2 s y_0 + a_2 y'_0 + a_1 y_0 + L\{f(t)\} \quad (8)$$

Nous pouvons résoudre cette équation du second degré pour obtenir l'expression

de $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{a_2 s y_0 + a_2 y'_0 + a_1 y_0 + L\{f(t)\}}{a_2 s^2 + (a_1 s + a_0)} \quad (9)$$

Étape 3 : Déterminer la solution $y(t)$ par Transformation de Laplace inverse

Pour trouver la solution $y(t)$, nous devons calculer la Transformation de Laplace inverse de $Y(s)$. Cela peut se faire en décomposant $Y(s)$ en éléments simples, puis en appliquant les formules de Transformation de Laplace inverse connues.

Soit $Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, où $N(s)$ et $D(s)$ sont des polynômes en s . Nous décomposons $Y(s)$ en éléments simples :

$$Y(s) = \sum_i \frac{A_i}{s - s_i} \quad (10)$$

où les A_i sont des constantes et les s_i sont les racines du dénominateur $D(s)$.

Ensuite, nous appliquons la Transformation de Laplace inverse à chaque terme de la décomposition en éléments simples pour obtenir la solution $y(t)$ dans le domaine temporel.

En résumé, l'application de la Transformation de Laplace à la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants comprend trois étapes principales :

1. Appliquer la Transformation de Laplace à l'équation différentielle pour obtenir une équation algébrique en $Y(s)$.
2. Résoudre l'équation algébrique obtenue pour trouver l'expression de $Y(s)$.
3. Déterminer la solution $y(t)$ dans le domaine temporel en calculant la Transformation de Laplace inverse de $Y(s)$.

Cette méthode permet de résoudre efficacement les équations différentielles linéaires à coefficients constants, en transformant le problème dans le domaine de Laplace, où il est plus facile à traiter.

Exemple 6.5

Équation différentielle du second ordre homogène

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \quad (11)$$

Appliquons la méthode en trois étapes :

Étape 1 - Appliquer la transformation de Laplace :

$$\begin{aligned} Ly''(t) + 4Ly'(t) + 3Ly(t) &= 0 \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) &= 0 \\ (s^2 + 4s + 3)Y(s) &= s + 1 \end{aligned}$$

Étape 2 - Résoudre l'équation algébrique :

$$Y(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 4s + 3} \quad (12)$$

Étape 3 - Trouver la solution $y(t)$ par transformation de Laplace inverse :

$$y(t) = L^{-1} \frac{s + 1}{s^2 + 4s + 3} = e^{-t}(\cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t))$$

Exemple 6.6

Équation différentielle du second ordre non homogène

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (13)$$

Appliquons la méthode en trois étapes :

Étape 1 - Appliquer la transformation de Laplace :

$$\begin{aligned}Ly''(t) + 4Ly'(t) + 3Ly(t) &= Le^{-t} \\s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 3Y(s) &= \frac{1}{s+1} \\(s^2 + 4s + 3)Y(s) &= \frac{1}{s+1}\end{aligned}$$

Étape 2 - Résoudre l'équation algébrique :

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+3)} \quad (14)$$

Étape 3 - Trouver la solution $y(t)$ par transformation de Laplace inverse :

$$y(t) = L^{-1} \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+3)} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \sin(2t)$$

Chapitre 7

Travaux Dirigés

Ce chapitre propose une série de cinq fiches de travaux dirigés conçues pour offrir aux étudiants une expérience d'apprentissage enrichissante et stimulante. L'objectif est de renforcer non seulement leur compréhension des mathématiques avancées, mais également de développer leur capacité à relever des défis mathématiques complexes.

À travers ces activités pratiques, les étudiants auront l'opportunité de mettre en application les concepts théoriques vus en chaque chapitre et de contribuer de manière significative à la recherche et au développement dans le domaine des sciences mathématiques et appliquées. Cette approche pédagogique vise à préparer les étudiants à devenir des acteurs engagés et innovants dans leur future carrière.

7.1 Fiche TD 1

Exercice 01 :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

Montrer que la fonction f est intégrable au sens de Riemann.

Exercice 02 :

Calculer l'intégrale suivante :

$$I_1(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t)) dt$$

Exercice 03 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_2(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$$

$$I_3(x) = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$$

Exercice 04 :

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que la fonction f est intégrable au sens de Riemann.

Exercice 05 :

Calculer l'intégrale suivante :

$$I_4(x) = \int_0^x t \ln(t) dt$$

7.2 Fiche TD 2**Exercice 01 :**

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1(x) = \iint_D \frac{x}{y} dx dy, \text{ où } D = [1, 3] \times [1, 5]$$

$$I_2(x) = \iint_D (x + 2y) dx dy, \text{ où } D = (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$$

$$I_3(x) = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ où } D = (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25$$

Exercice 02 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1(x) = \iiint_D (xyz) dx dy dz, \text{ où } D = [1, 3]^3$$

$$I_2(x) = \iiint_D (x + y + 2z) dx dy dz, \text{ où } D = (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in [5, 7]^2, y \leq z \leq x$$

$$I_3(x) = \iiint_D 5 dx dy dz, \text{ où } D = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

Exercice 03 :

Calculer l'aire délimitée par :

$$x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0$$

Exercice 04 :

Calculer le volume du :

$$D = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

7.3 Fiche TD 3

Exercice 01 :

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, & I_2(x) &= \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx \\ I_3(x) &= \int_0^1 \frac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^2} dx, & I_4(x) &= \int_0^3 \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}} dx \end{aligned}$$

Exercice 02 :

1) Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, & I_2(x) &= \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^3} dx \\ I_3(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx, & I_4(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx \end{aligned}$$

2) Montrer que l'intégrale suivante :

$$I_1(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2 \cos x}{x^2} dx$$

est absolument convergente.

Exercice 03 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$xy' = y + 1; \quad yy' = -2; \quad xy' = e^y; \quad y' = y + x^2y^3$$

Exercice 04 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + 2y' + y = x^2e^x$$

7.4 Fiche TD 4**Exercice 01 :**

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes et calculer leur somme si elles sont convergentes :

$$1 - \sum \frac{n^2}{n^3 + 1} \quad 2 - \sum \frac{1}{(n+1)^2 + 1} \quad 3 - \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 02 :

Soit la série

$$\sum a_n \quad \text{où} \quad a_n = \frac{2n-1}{(2n)!(2n+1)}$$

.

1. Montrer que la série est convergente.
2. Calculer la somme de la série.

Exercice 03 :

Étudier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme si elles sont convergentes :

$$1 - \sum \frac{n}{n^2 + 1} \quad 2 - \sum \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1} \quad 3 - \sum \frac{2n - 1}{3n^2 + 1}$$

Exercice 04 :

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Calculer la limite de la suite (u_n) .
3. En déduire la somme de la série.

Exercice 05 :

Étudier la convergence des séries suivantes :

$$1 - \sum \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \quad 2 - \sum \frac{1}{n^3 + 2} \quad 3 - \sum \frac{n^2 - 2n + 1}{n^3 + 1}$$

Exercice 06 :

Soit la série $\sum a_n$ où

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + n}$$

.

1. Montrer que la série est convergente.

2. Calculer la limite de la suite (a_n) .
3. En déduire la somme de la série.

Exercice 07 :

1. Déterminer la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}+n}$.
2. Si la série est convergente, calculer sa somme.

7.5 Fiche TD 5

exercice 1

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$f(t) = t^n e^{-at} \text{ pour } a > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

$$f(t) = \cos(\omega_0 t)$$

exercice 2

Soit $f(t) = u(t) - u(t - a)$ où $u(t)$ est la fonction échelon unitaire.

1. Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$.
2. Interpréter le résultat obtenu.

exercice 3

Soit $f(t) = t e^{-at}$ avec $a > 0$.

1. Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$.
2. En déduire la transformée de Laplace de $\frac{df(t)}{dt}$.

exercice 4

Soit $f(t) = \text{rect}(t/T)$ avec $\text{rect}(x) = 1$ si $|x| \leq 1/2$ et 0 sinon.

1. Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$.
2. En déduire la transformée de Laplace de $\frac{df(t)}{dt}$.

exercice 5

Soit $f(t) = \text{tri}(t/T)$ avec $\text{tri}(x) = 1 - |x|$ si $|x| \leq 1$ et 0 sinon.

1. Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$.
2. En déduire la transformée de Laplace de $\frac{df(t)}{dt}$.

exercice 6

Soit $f(t) = \text{sgn}(t)$, où $\text{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, 0 si $x = 0$, et -1 si $x < 0$.

1. Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$.
2. En déduire la transformée de Laplace de $\frac{df(t)}{dt}$.

7.6 Correction Fiche TD 1

Exercice 1

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Montrer que la fonction f est intégrable au sens de Riemann.

1. On a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f(x) = 2x + 1$ sur $[a, b]$

On choisit $\Delta = \left\{ x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, i = 0, \dots, n \right\}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et $I_i = [x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, \dots, n$.

Calculons maintenant les deux sommes de Darboux

$$S(\Delta, f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) \text{ tel que } M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) = 2 \left(a + \frac{(i+1)(b-a)}{n} \right) + 1$$

$$s(\Delta, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) \text{ tel que } m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) = 2 \left(a + \frac{i(b-a)}{n} \right) + 1$$

on remarque que $x_{i+1} - x_i = \frac{(b-a)}{n}$

Donc

$$\begin{aligned} S(\Delta, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(2 \left(a + \frac{(i+1)(b-a)}{n} \right) + 1 \right) \frac{(b-a)}{n} \right] \\ &= \frac{(b-a)}{n} \left[2a \sum_{i=0}^{n-1} 1 + 2 \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) + \sum_{i=0}^{n-1} 1 \right] \\ &= \frac{(b-a)}{n} \left[2a \cdot n + 2 \frac{(b-a)}{n} \frac{n(n+1)}{2} + n \right] \\ &= 2a(b-a) + (b-a)^2 \frac{n(n+1)}{n^2} + (b-a) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S(\Delta, f) &= 2a(b-a) + (b-a)^2 + (b-a) \\ &= b^2 - a^2 + (b-a) \end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned} s(\Delta, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(2 \left(a + \frac{i(b-a)}{n} \right) + 1 \right) \frac{(b-a)}{n} \right] \\ &= \frac{(b-a)}{n} \left[2a \sum_{i=0}^{n-1} 1 + 2 \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} 1 \right] \\ &= \frac{(b-a)}{n} \left[2a \cdot n + 2 \frac{(b-a)}{n} \frac{n(n-1)}{2} + n \right] \\ &= 2a(b-a) + (b-a)^2 \frac{n(n-1)}{n^2} + (b-a) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} s(\Delta, f) &= 2a(b-a) + (b-a)^2 + (b-a) \\ &= b^2 - a^2 + (b-a)\end{aligned}$$

finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(\Delta, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(\Delta, f)$$

c'est à dire intégrable en sens de Riemann.

Exercice 2

Calculer l'intégrale suivante :

$$I_1(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t)) dt$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}I_1(x) &= \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(t)) dt \\ &= \left[-\frac{1}{x} \sin(x \sin(t)) \right]_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{1}{x} \sin(x \sin(\pi/2)) + \frac{1}{x} \sin(x \sin(0)) \\ &= -\frac{1}{x} \sin(x) + 0 \\ &= -\frac{\sin(x)}{x}\end{aligned}$$

Donc l'intégrale $I_1(x)$ a pour valeur $-\frac{\sin(x)}{x}$.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_2(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$$

$$I_3(x) = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$$

1. Calcul de $I_2(x)$: En posant $u = t^2 + 1$, on a $du = 2t dt$ et $dt = \frac{du}{2t}$. Donc :

$$I_2(x) = \int_{x^2+1}^{4x^2+1} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} [(4x^2 + 1) - (x^2 + 1)] = \frac{1}{2}(3x^2) = \frac{3x^2}{2}$$

Donc $I_2(x) = \frac{3x^2}{2}$.

2. Calcul de $I_3(x)$: En factorisant le numérateur, on a :

$$I_3(x) = \int_0^1 \frac{(x^2 - 1)}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1}\right) dx = \left[x - \frac{2}{x^2 + 1}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{2} - (0 - 0) = \frac{1}{2}$$

Donc $I_3(x) = \frac{1}{2}$.

Exercice 04 :

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Pour montrer que f est intégrable au sens de Riemann sur $[-1, 1]$, il suffit de vérifier que f est bornée sur $[-1, 1]$.

En effet, on a :

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Donc f est bornée sur $[-1, 1]$ et par conséquent, f est intégrable au sens de Riemann sur $[-1, 1]$.

Exercice 05 :**Exercice 05 : Calcul d'intégrale**

Calculer l'intégrale suivante :

$$I_4(x) = \int_0^x t \ln(t) dt$$

Pour calculer cette intégrale, on peut procéder par intégration par parties en posant :

$$u = \ln(t)$$

$$dv = t dt$$

Alors on a :

$$du = \frac{1}{t} dt$$

$$v = \frac{t^2}{2}$$

En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_4(x) &= \left[t^2 \ln(t) - \int_0^x \frac{t^2}{2} dt \right] \\ &= \left[x^2 \ln(x) - \frac{x^3}{2} \right] - [0 - 0] \\ &= x^2 \ln(x) - \frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

Donc $I_4(x) = x^2 \ln(x) - \frac{x^3}{2}$.

7.7 Correction Fiche TD 2

Exercice 1 :

1. $I = \left[\int_1^3 x dx \right] \times \left[\int_1^5 \frac{1}{y} dy \right] = 4 \ln 5.$
2. $I = \int_0^1 \left[\int_0^x (x + 2y) dy \right] dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$
3. $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25\}$

$$\varphi : (r, \theta) \rightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\text{La matrice jacobien de } \varphi \text{ est } J(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \left| \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} \right| = r$$

$$\Delta = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$\varphi(\Delta) = D$, on obtient :

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = I = \iint_{\Delta} r^2 r dr d\theta = \left[\int_0^5 r^3 dr \right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] =$$

Exercice 2

1. $I = \iiint_D (xyz) dx dy dz$, où $D = [1, 3]^3$
2. $I = \left[\int_1^3 x dx \right] \times \left[\int_1^3 y dy \right] \times \left[\int_1^3 z dz \right] = 64$
3. $I = \iiint_D (x + y + 2z) dx dy dz$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in [5, 7]^2, y \leq z \leq x\}$

$$I = \iint_D (x + y + 2z) dx dy dz = \iint_{[5, 7]^2} \left[\int_y^x (x + y + 2z) dz \right] dx dy$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{[5, 7]^2} 2(x^2 - y^2) dx dy \\ &= 2 \int_5^7 \left[\int_5^7 (x^2 - y^2) dx \right] dy \end{aligned}$$

3. $I = \iiint_D 5 dx dy dz$, où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \beta) \rightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta \cos \beta, r \sin \theta \cos \beta, r \sin \beta)$$

La matrice jacobien de φ est $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \beta & -r \sin \theta \cos \beta & -r \cos \theta \sin \beta \\ \sin \theta \cos \beta & r \cos \theta \cos \beta & -r \sin \theta \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & r \cos \beta \end{pmatrix}$

$$\det(j(\varphi)) = r^2 \cos \beta \quad \Delta = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Delta} r^2 |\cos \beta| dr d\theta d\beta \\ &= \left[\int_0^5 r^2 dr \right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta d\beta \right] \\ &= \frac{4}{3} \pi 2^3 \end{aligned}$$

Exercice 3 : Calculons l'aire délimitée par

$$x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0$$

$$\iiint_D dx dy dz, D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$\Delta = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Delta} r dr d\theta dz = \left[\int_0^5 r dr \right] \times \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right] = \frac{25}{4} \pi$$

Exercice 4 :

Calculons le volume du :

$$\begin{aligned}
D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \\
\Delta &= \{(r, \theta, \beta) / 0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\} \\
\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Delta} r^2 |\cos \beta| dr d\theta d\beta \\
&= \left[\int_0^2 r^2 dr \right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta d\beta \right] \\
&= \frac{4}{3} \pi 2^3
\end{aligned}$$

7.8 Correction Fiche TD 3

Exercice 1 :

Déterminons la nature des intégrales impropres suivantes :

1-

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie en 0

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
\int_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx &= \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_t^1 \\
[2\sqrt{x}]_t^1 &= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{t}
\end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = 2$$

donc l'intégrale I_1 est convergente.

2.

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$$

la fonction $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ n'est pas définie en 0

$$F(t) = \int_t^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$$

$$y = e^x \implies dy = e^x dx = y dx$$

c'est à dire $dx = \frac{dy}{y}$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x - 1} dx &= \int \frac{1}{y(y-1)} dy \\ \int \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy &= -\ln y + \ln(y-1) \\ &= -\ln e^x + \ln(e^x - 1) \end{aligned}$$

$$\text{donc } F(t) = \int_t^1 \frac{1}{e^x - 1} dx = [-\ln e^x + \ln(e^x - 1)]_t^1 = -1 + \ln(e-1) + t - \ln(e^t - 1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = +\infty$$

donc l'intégrale I_2 divergente.

3-

$$I_3 = \int_0^1 \frac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^2} dx$$

$$F(t) = \int_t^1 \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 1)}{(x - 1)^2} dx$$

$$\begin{aligned} \int_t^1 (x+1)^2 dx &= \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_t^1 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{(t+1)^3}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

donc l'intégrale I_3 est convergente.

4.

$$I_4 = \int_0^3 \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

on a

$$\int_0^3 \left| \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}} \right| dx \leq \int_0^3 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

et

$$F(t) = \int_t^3 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 x^{-\frac{2}{3}} dx &= \left[\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \right]_t^3 \\ &= 3 \times 3^{\frac{1}{3}} - 3t^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = 3 \times 3^{\frac{1}{3}}$$

donc l'intégrale I_4 est convergente.**Exercice 2 :**

1) Déterminons la nature des intégrales impropres suivantes

1-

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{-1}{x} \right]_1^t &= \frac{-1}{t} - \left(\frac{-1}{1} \right) \\ &= \frac{-1}{t} + 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$$

donc l'intégrale I_1 est convergente.

$$I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3} dx$$

on pose

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}$$

et

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

alors

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3} dx$$

et

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

de la meme nature.

donc l'intégrale I_2 est convergente.

3.

$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

$$F_1(t) = \int_c^t \frac{1}{x^3} dx$$

$$\int_c^t x^{-3} dx = \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_1^t$$

$$\frac{-1}{2t^2} - \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2c^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_1(t) = \frac{1}{2c^2} F_2(t) = \int_t^c \frac{1}{x^3} dx$$

$$\int_t^c x^{-3} dx = \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_1^t$$

$$\frac{-1}{2t^2} - \left(\frac{-1}{2} \right) = -\frac{1}{2c^2} - \frac{-1}{2t^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_2(t) = +\infty$$

donc l'intégrale I_3 est divergente.

4.

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$$

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx$$

par la méthode de l'intégrale par parties on trouve

$$\begin{aligned} \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} &\implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \\ \frac{x}{e^x} dx &= \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{donc } F(t) = \int_0^t \frac{x}{e^x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}]_1^t = -t e^{-t} - e^{-t} + 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +1$$

donc l'intégrale I_4 est convergente.

2. On montre que l'intégrale impropre

$$I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2 \cos x}{x^2} dx$$

est absolument convergente.

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x + 2 \cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente

donc I_5 est convergente

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1. \quad xy' = y + 1 \implies \frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x}$$

donc

$$\int \frac{y'}{y+1} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln |y+1| = \ln |x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{alors } e^{\ln |y+1|} = e^{\ln |x| + c}, c \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = kx - 1, k \in \mathbb{R}$$

donc $y'(x) = k$ et

$$xk = kx - 1 + 1$$

$$xy' = y + 1$$

$$2. \quad yy' = -2$$

$$\text{alors } \int yy' dx = \int -2 dx$$

$$\text{c'est à dire } \int y dy = \int -2 dx$$

$$\text{donc } \frac{y^2}{2} = -2x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = -4x + c, c \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad xy' = e^y$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{y'}{e^y} &= \frac{1}{x} \\ \int y' e^{-y} dx &= \int \frac{1}{x} dx \\ \int e^{-y} dy &= \int \frac{1}{x} dx \\ -e^{-y} &= \ln |x| + c, c \in \mathbb{R} \\ e^{-y} &= -(\ln |x| + c), c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dans le cas

$$-(\ln |x| + c) \geq 0$$

on a :

$$y(x) = -\ln(-(\ln |x| + c))$$

$$4. \quad y' = y + x^2 y^3$$

$$\text{alors } \frac{y'}{y^3} = \frac{y}{y^3} + x^2 \implies \frac{y'}{y^3} = \frac{1}{y^2} + x^2$$

$$\text{on pose } z = \frac{1}{y^2} \implies z' = -3 \frac{y'}{y^3}$$

donc

$$\frac{z'}{-3} = z + x^2$$

$$\text{c'est à dire } z' = -3z - 3x^2 \iff z' + 3z = -3x^2$$

$$\text{on cherche une solution particulière } z_p = ax^2 + bx + c$$

$$z'_p = 2ax + b$$

$$z' + 3z = -3x^2$$

$$2ax + b + 3(ax^2 + bx + c) = -3x^2$$

$$3ax^2 + (2a + 3b)x + 3c + b = -3x^2$$

$$\begin{cases} 3a = -3 \\ 2a + 3b = 0 \\ 3c + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{-2}{9} \end{cases}$$

donc la solution particulière est

$$z_p(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{-2}{9}$$

Résoudre l'équation homogène :

$$z' + 3z = 0$$

c'est à dire

$$\frac{z'}{z} = -3$$

donc

$$\int \frac{z'}{z} dx = \int -3 dx$$

$\ln z = -3x + c, c \in \mathbb{R}$ alors

$$z_h(x) = ke^{-3x}, k \in \mathbb{R}$$

la solution générale de l'équation non homogène est

$$z(x) = ke^{-3x} - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{-2}{9}, k \in \mathbb{R}$$

Exercice 4 :

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'' + 2y' + y = x^2 e^x$$

l'équation homogène est

$$y'' + 2y' + y = 0$$

l'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$; on a $\Delta = 0$; $r = -1$ racine double
donc la solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$y_h = (c_1 x + c_2) e^{-x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. On cherche une solution particulière de l'équation non homogène, comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors $y_p(x) = q(x)e^x$ tel que $\deg q = 2$;

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c) e^x \text{ donc}$$

$$y'_p(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c) e^x$$

$$y''_p(x) = 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c) e^x$$

En remplaçant dans (E), on trouve

$$2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c) e^x - 4(2ax + b)e^x - 4(ax^2 + bx +$$

$$ce^x + 4(ax^2 + bx + c)e^x = x^2e^x$$

$$((a-1)x^2 + (b-4a)x + c + b + 2a)e^x = 0$$

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b-4a=0 \\ c-2b+2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=6 \end{cases}$$

donc la solution particulière $y_p(x) = (x^2 + 4x + 6)e^x$

finalement la solution générale de l'équation non homogène est

$$y(x) = y_h = (c_1x + c_2)e^{-x} + (x^2 + 4x + 6)e^x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

7.9 Correction Fiche TD 4

Exercice 1

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

1. Étude de la convergence :

— $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

— La série est convergente d'après le critère de Cauchy.

2. Calcul de la somme :

— $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

— En posant $u_n = \frac{n^2}{n^3+1}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, donc la série est convergente.

— La somme vaut donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1}$

[label=()] Étude de la convergence :

1. — $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2+1} = 0$

— La série est convergente d'après le critère de Cauchy.

2. Calcul de la somme :

— $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1}$

— En posant $u_n = \frac{1}{(n+1)^2+1}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, donc la série est convergente.

— La somme vaut donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{\pi}{4}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

[label=()]Étude de la convergence :

1. — $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$

— Les termes alternent de signe et leur valeur absolue décroît vers 0, donc la série est convergente d'après le critère de Leibniz.

2. Calcul de la somme :

— $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

— En posant $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, donc la série est convergente.

— La somme vaut donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

1. Montrer que la série est convergente

— $a_n = \frac{2n-1}{(2n)!(2n+1)}$

— $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{(2n)!(2n+1)} = 0$

— La série est convergente d'après le critère de Cauchy.

2. Calculer la somme de la série

— $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!(2n+1)}$

— En posant $u_n = \frac{2n-1}{(2n)!(2n+1)}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, donc la série est convergente.

— La somme vaut donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 :

Étudier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme si elles sont convergentes :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

[label=()]Étude de la convergence :

1. — $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$

— La série est convergente d'après le critère de Cauchy.

2. Calcul de la somme :

— $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

— En posant $u_n = \frac{n}{n^2+1}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, donc la série est convergente.

— La somme vaut donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = \ln(2)$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3+1}$

[label=()]Étude de la convergence :

1. — $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

— La série est convergente d'après le critère de Cauchy.

2. Calcul de la somme :

— $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3+1}$

— En posant $u_n = \frac{n^2-1}{n^3+1}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, donc la série est convergente.

— La somme vaut donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3+1} = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+1}$

[label=()]Étude de la convergence :

1. — $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3n} = 0$

— La série est convergente d'après le critère de Cauchy.

2. Calcul de la somme :

— $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+1}$

- En posant $u_n = \frac{2n-1}{3n^2+1}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, donc la série est convergente.
- La somme vaut donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+1} = \frac{\ln(3)}{3}$.

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente

- $u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$
- La série est convergente d'après le critère de Cauchy.

2. Calculer la limite de la suite (u_n)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$

3. En déduire la somme de la série

- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$
- En posant $u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, donc la série est convergente.
- La somme vaut donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = \ln(2)$.

Exercice 5 :

Étudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ Posons $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\
 &= \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\
 &\sim \frac{1}{n} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Donc $\sum a_n$ est une série harmonique généralisée de paramètre $p = 1$, qui est convergente.

2. $\sum \frac{1}{n^3+2}$ Posons $a_n = \frac{1}{n^3+2}$. Alors :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^3+2} \\ &\sim \frac{1}{n^3} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Donc $\sum a_n$ est une série harmonique généralisée de paramètre $p = 3$, qui est convergente.

3. $\sum \frac{n^2-2n+1}{n^3+1}$ Posons $a_n = \frac{n^2-2n+1}{n^3+1}$. Alors :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2-2n+1}{n^3+1} \\ &= \frac{n-1}{n^3+1} \\ &\sim \frac{1}{n^2} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Donc $\sum a_n$ est une série harmonique généralisée de paramètre $p = 2$, qui est convergente.

Exercice 6 :

Soit la série $\sum a_n$ où $a_n = \frac{n^2+1}{n^3+n}$.

1. Montrer que la série est convergente. Posons $b_n = \frac{1}{n^3+n}$. Alors :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n^3+n} \\ &\sim \frac{1}{n^3} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Donc $\sum b_n$ est une série harmonique généralisée de paramètre $p = 3$, qui est convergente. Comme $a_n = \frac{n^2+1}{n^3+n} \leq b_n$, la série $\sum a_n$ est également convergente (critère de comparaison).

2. Calculer la limite de la suite (a_n) .

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{n + \frac{1}{n}} \\ &= 0\end{aligned}$$

3. En déduire la somme de la série. Comme la série $\sum a_n$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors la somme de la série est égale à la limite de la suite partielle $\sum_{k=1}^n a_k$, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

Exercice 7 :

1. Déterminer la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}+n}$. Posons $a_n = \frac{1}{n^{3/2}+n}$. Alors :

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n^{3/2} + n} \\ &\sim \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Donc $\sum a_n$ est une série harmonique généralisée de paramètre $p = 3/2$, qui est divergente.

2. Si la série est convergente, calculer sa somme. La série étant divergente, il n'y a pas de somme à calculer.

7.10 Correction Fiche TD 5

Exercice 1

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(t) = e^{-at}$ pour $a > 0$ La transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-at}\} &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt \\ &= \frac{1}{a+s}\end{aligned}$$

car l'intégrale converge pour $a+s > 0$, soit $s > -a$.

2. $f(t) = t^n e^{-at}$ pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ La transformée de Laplace de $f(t) = t^n e^{-at}$ peut être calculée par intégration par parties répétée :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n e^{-at}\} &= \int_0^{\infty} t^n e^{-(a+s)t} dt \\ &= \left[-\frac{t^n e^{-(a+s)t}}{a+s} \right]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1} e^{-(a+s)t}}{a+s} dt \\ &= \frac{n!}{(a+s)^{n+1}}\end{aligned}$$

car l'intégrale converge pour $a+s > 0$, soit $s > -a$.

3. $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ La transformée de Laplace de $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} &= \int_0^{\infty} \sin(\omega_0 t) e^{-st} dt \\ &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}\end{aligned}$$

car l'intégrale converge pour $s > 0$.

4. $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ La transformée de Laplace de $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} &= \int_0^\infty \cos(\omega_0 t) e^{-st} dt \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\end{aligned}$$

car l'intégrale converge pour $s > 0$.

Exercice 2

Soit $f(t) = u(t) - u(t - a)$ où $u(t)$ est la fonction échelon unitaire.

1. Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$. La transformée de Laplace de $f(t) = u(t) - u(t - a)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t - a)\} \\ &= \frac{1}{s} - e^{-as} \frac{1}{s}\end{aligned}$$

car $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ et $\mathcal{L}\{u(t - a)\} = e^{-as} \frac{1}{s}$.

2. Interpréter le résultat obtenu. Le résultat obtenu montre que la transformée de Laplace de $f(t) = u(t) - u(t - a)$ est égale à $\frac{1}{s} - e^{-as} \frac{1}{s}$. Cette fonction représente la différence entre deux fonctions échelon unitaire, décalées d'un temps a . Cela correspond à un créneau unitaire de durée a .

Exercice 3

Soit $f(t) = te^{-at}$ avec $a > 0$.

- (a) Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$. La transformée de Laplace

de $f(t) = te^{-at}$ peut être calculée par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{te^{-at}\} &= \int_0^\infty te^{-(a+s)t} dt \\ &= \left[-\frac{te^{-(a+s)t}}{a+s} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} dt \\ &= \frac{1}{(a+s)^2}\end{aligned}$$

car l'intégrale converge pour $a+s > 0$, soit $s > -a$.

- (b) En déduire la transformée de Laplace de $\frac{df(t)}{dt}$. En utilisant la propriété de dérivation dans la transformation de Laplace, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \\ &= s \cdot \frac{1}{(a+s)^2} - 0 \\ &= \frac{s}{(a+s)^2}\end{aligned}$$

Exercice 4

Soit $f(t) = t^2e^{-at}$ avec $a > 0$.

- (a) Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$. La transformée de Laplace de $f(t) = t^2e^{-at}$ peut être calculée par intégration par parties à deux reprises :

$$\mathcal{L}t^2e^{-at} = \int_0^\infty t^2e^{-(a+s)t} dt$$

$$\left[-\frac{t^2e^{-(a+s)t}}{a+s} \right]_0^\infty + 2 \int_0^\infty \frac{te^{-(a+s)t}}{a+s} dt = 2 \left[-\frac{te^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} \right]_0^\infty + 2 \int_0^\infty \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} dt$$

$$= \frac{2}{(a+s)^3}$$

car l'intégrale converge pour $a+s > 0$, soit $s > -a$.

- (b) En déduire la transformée de Laplace de $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$. En utilisant la propriété de dérivation dans la transformation de Laplace, on a :

$$\mathcal{L} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = s^2 \mathcal{L} f(t) - s f(0) - \frac{df(0)}{dt} = s^2 \cdot \frac{2}{(a+s)^3} - 0 - 0 = \frac{2s^2}{(a+s)^3}$$

Exercice 5

Soit $f(t) = \text{sinc}^2(t/T)$ avec $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$.

La transformée de Laplace de $f(t) = \text{sinc}^2(t/T)$ est donnée par :

$$\mathcal{L} \text{sinc}^2(t/T) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \right)^2 e^{-st} dt = \frac{T}{2}$$

car l'intégrale converge pour tout s .

Interpréter le résultat obtenu.

Le résultat obtenu montre que la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal au carré $\text{sinc}^2(t/T)$ est égale à $T/2$, quelle que soit la valeur de s . Cela signifie que la transformée de Laplace d'une fonction porte au carré (rectangle au carré) dans le domaine temporel est une constante divisée par 2 dans le domaine de Laplace. Cette propriété est également très utile en traitement du signal, notamment pour l'analyse de la réponse fréquentielle des systèmes linéaires.

Exercice 6

Soit $f(t) = te^{-at}$ avec $a > 0$.

- i. Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$. La transformée de Laplace de $f(t) = te^{-at}$ peut être calculée par intégration par parties :

$$\mathcal{L}te^{-at} = \int_0^{\infty} te^{-(a+s)t} dt = \left[-\frac{te^{-(a+s)t}}{a+s} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} dt = \frac{1}{(a+s)^2}$$

car l'intégrale converge pour $a+s > 0$, soit $s > -a$.

- ii. En déduire la transformée de Laplace de $\frac{df(t)}{dt}$. En utilisant la propriété de dérivation dans la transformation de Laplace, on a :

$$\mathcal{L} \frac{df(t)}{dt} = s\mathcal{L}f(t) - f(0) = s \cdot \frac{1}{(a+s)^2} - 0 = \frac{s}{(a+s)^2}$$

Exercice 7

Soit $f(t) = \text{sinc}(t/T)$ avec $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

- A. Calculer la transformée de Laplace de $f(t)$. La transformée de Laplace de $f(t) = \text{sinc}(t/T)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\text{sinc}(t/T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} e^{-st} dt = T$$

car l'intégrale converge pour tout s .

- B. Interpréter le résultat obtenu. Le résultat obtenu montre que la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(t/T)$ est égale à T , quelle que soit la valeur de s . Cela signifie que la transformée de Laplace d'une fonction porte (rectangle) dans le domaine temporel est une constante dans le domaine de Laplace. Cette propriété est très utile en traitement du signal, notamment pour l'analyse de la réponse fréquentielle des systèmes linéaires.

Chapitre 8

Exercices supplémentaires

Dans ce chapitre, nous avons soigneusement sélectionné cinq exercices pour chacun des axes de notre programme pédagogique. L'objectif principal est de fournir aux étudiants une occasion supplémentaire de mettre en pratique les concepts abordés lors des travaux dirigés. Ces exercices sont conçus pour couvrir une gamme variée de compétences et de difficultés, permettant ainsi aux étudiants de consolider leur compréhension.

Chaque exercice est élaboré avec précision pour offrir des défis adaptés au niveau d'apprentissage des étudiants, tout en leur fournissant des opportunités d'exploration et de réflexion approfondies. En engageant activement les étudiants dans ces exercices, nous visons à renforcer leur confiance dans l'application des méthodes d'intégration et à favoriser leur développement.

Les integrales simples

Exercice 1 :

Calculer l'intégrale de la fonction

$$f(x) = x^2$$

sur l'intervalle $[0, 3]$.

Exercice 2 :

Évaluer l'intégrale de la fonction exponentielle

$$f(x) = e^x$$

entre 0 et 1 .

Exercice 3 :

Déterminer la valeur de l'intégrale de

$$f(x) = \cos(x) \text{ sur } [0, \pi].$$

Exercice 4 :

Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^2 (3x + 4)dx$$

Exercice 5 :

Trouver l'aire sous la courbe de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

entre -1 et 1 .

Les integrales doubles

Exercice 1 :

Calculer l'intégrale double de la fonction $f(x, y) = x^2y$ sur la région délimitée par $y = x^2$ et $y = 4$.

$$\int_0^2 \int_{x^2}^4 x^2 y dy dx$$

Exercice 2 :

Évaluez l'intégrale double de $f(x, y) = e^{x+y}$ sur le rectangle défini par $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 2$.

$$\int_0^1 \int_0^2 e^{x+y} dy dx$$

Exercice 3 :

Trouvez la valeur de l'intégrale double de $f(x, y) = xy$ sur la région triangulaire avec des sommets aux points $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$.

$$\int_0^1 \int_0^x xy dy dx$$

Exercice 4 :

Calculer l'intégrale double de la fonction $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ sur le carré $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x) \cos(y) dy dx$$

Exercice 5 :

Évaluez l'intégrale double en coordonnées polaires de la fonction $f(r, \theta) = r^3 \sin(\theta)$ sur la région définie par $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \sin(\theta) r dr d\theta$$

Les integrales triples

Exercice 1

Calculez l'intégrale triple de la fonction $f(x, y, z) = xyz$ sur le domaine délimité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et le plan $x + y + z = 1$.

Exercice 2

Évaluez

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

où D est la région délimitée par les surfaces $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, et $x + y = 2$.

Exercice 3

Trouvez le volume du solide situé sous le plan

$$z = 4 - x - 2y$$

et au-dessus du triangle dans le plan xy défini par les points $(0, 0)$, $(2, 0)$, et $(0, 3)$.

Exercice 4

Calculez

$$\iiint_D e^{x+y+z} \, dx \, dy \, dz$$

où D est le domaine délimité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et $x + y + z = 1$.

Exercice 5

Trouvez le centre de masse d'une laminaire de densité $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ dont la forme est délimitée par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et

le plan $z = 1$.

Les integrales impropres

Exercice 1

Calculer l'intégrale impropre de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Exercice 2

Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Étudier la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^1 f(x) dx$$

Exercice 3

Trouver la valeur de a pour que l'intégrale impropre

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^3} dx$$

converge.

Exercice 4

Déterminer si l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^1 e^x dx$ est convergente ou divergente.

Exercice 5

Étudier la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Les équations différentielles**Exercice 1**

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$$

Exercice 3

Trouver la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x) + y^2$$

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + 2xy = 3x$$

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = y(x - 1)$$

Les Séries Numériques

Exercice 1

Calculer la somme des termes de la série géométrique infinie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Exercice 2

Déterminer si la série harmonique alternée converge ou diverge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Exercice 3

Étudier la convergence de la série suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 + 2}$$

Exercice 4

Trouver la somme de la série télescopique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Exercice 5

Déterminer si la série suivante converge absolument, converge conditionnellement ou diverge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

Transformation de Fourier**Exercice 1**

Calculer la transformation de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-ax^2}$ où $a > 0$.

Exercice 2

Trouver la transformée de Fourier de la fonction porte $g(x) = \text{rect}(x)$, définie par

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3

Donner l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $h(x) = \sin(x)$.

Exercice 4

Calculez la transformée de Fourier de la fonction $k(x) = \cos(ax)$, où a est une constante réelle.

Exercice 5

Trouvez la transformée de Fourier de la fonction $m(x) = e^{-|x|}$.

Transformation de Laplace**Exercice 1**

Calculer la transformation de Laplace de la fonction

$$f(t) = e^{-at}$$

Exercice 2

Trouver la transformation de Laplace de

$$g(t) = \sin(\omega t)$$

Exercice 3

Déterminer la transformation de Laplace de la fonction

$$h(t) = t^2$$

Exercice 4

Calculer la transformée de Laplace de la fonction $u(t - a)$, où $u(t)$ est la fonction échelon unité.

Exercice 5

Trouver la transformation de Laplace de la fonction

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

Bibliographie

- [1] Beddani Abdallah, Djebbar Samir, Cours Mathématiques 3, 2 année LMD-Sciences et Techniques avec les fiches TD corrigées, Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane, 2018 .
- [2] Dubois, Pierre, "Théorie des équations différentielles : Approche pratique et théorique", 3ème édition, France, 2017.
- [3] Dubois, Pierre, "Théorie des nombres : Fondements et applications", 3ème édition, France, 2017.
- [4] Garcia, Luisa, "Analyse fonctionnelle : Théorie et applications", 4ème édition, Espagne, 2016.
- [5] Garcia, Maria, "Équations différentielles ordinaires : Théorie et applications", 4ème édition, Espagne, 2017.
- [6] Gonzalez, Javier, "Calcul intégral : Méthodes avancées et applications", 2ème édition, Espagne, 2016.
- [7] Gonzalez, Maria, "Analyse harmonique : Principes et applications", 4ème édition, Espagne, 2019.
- [8] Johnson, David, "Optimisation : Méthodes avancées et applications", 5ème édition, Royaume-Uni, 2018.
- [9] Kim, Sung, "Mathématiques discrètes : Fondements et applications", 2ème édition, Corée du Sud, 2017.

- [10] Kim, Young, "Systèmes dynamiques : Introduction et applications", 3ème édition, Corée du Sud, 2018.
- [11] Lamrani Alaoui, Mohammed, "Analyse mathématique avancée : Concepts et applications", 2ème édition, France, 2018.
- [12] Lee, Hyun, "Théorie des groupes : Fondements et applications", 2ème édition, Corée du Sud, 2017.
- [13] Li, Xin, "Algèbre matricielle : Applications dans l'ingénierie et les sciences", 2ème édition, Chine, 2018.
- [14] Martin, Marie, "Probabilités et statistiques : Méthodes et applications", 4ème édition, France, 2020.
- [15] Miloudi Yamina, "Analyse 3, Cours Détaillés et Exercices Corrigés", 2016.
- [16] Mustapha. Sadouki, "Cours mathématiques pour la Physique".
- [17] Nguyen, Thanh, "Introduction à la théorie des graphes : Applications en informatique", 2ème édition, Vietnam, 2019.
- [18] Patel, Sanjay, "Analyse numérique : Méthodes et algorithmes", 6ème édition, Inde, 2020 .
- [19] Rossi, Giovanni, "Calcul vectoriel : Théorie et applications", 3ème édition, Italie, 2019 .
- [20] Smith, John, "Introduction à l'algèbre linéaire : Applications dans les sciences et l'ingénierie", 5ème édition, États-Unis, 2019.
- [21] Wang, Li, "Géométrie analytique : Fondements et applications", 3ème édition, Chine, 2018.
- [22] Wang, Xiaoli, "Intégration complexe : Théorie et applications", 2ème édition, Chine, 2018.