# MATHÉMATIQUES BUISSONNIÈRES
## *en Europe*

*sous la direction de*
***Jean-Michel Kantor***


▶ MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
▶ MINISTÈRE DE LA RECHERCHE

Cet ouvrage a été réalisé à la demande du Comité scientifique national de la Semaine de la Science pour le Ministère de l'Éducation nationale et le Ministère de la Recherche, Direction de la recherche, Mission de la culture et de l'information scientifiques et techniques et des musées.

L'illustration de couverture représente la boîte du jeu mathématique intitulé « L'Arithmétique diabolique ou le calcul infernal ». Ce jeu, en compagnie de plusieurs autres, est conservé dans les collections du Musée des arts et métiers.

Leurs noms évocateurs ou mystérieux amusent déjà et suscitent la curiosité qui ne tarde pas à se transformer en intérêt dès l'ouverture de la boîte. On trouve ainsi : la tour de Hanoï, le baguenaudier, le taquin, le jeu de triangles, le jeu militaire, le jeu de pyramide, le jeu de Hamilton, l'icosagonal, la fasioulette, le jeu des mages…

Offerts au Conservatoire national des arts et métiers par le mathématicien Édouard Lucas, peu avant son décès en 1891, ces jeux datent, pour la plupart, de la fin du XIX^e siècle, même si certains étaient déjà connus dans les siècles précédents.

Une étude de ces jeux, qui posent des problèmes de logique, de combinatoire, d'organisation, de permutation, de topologie, récemment conduite par Élise Picard, Maître de conférences au Musée des arts et métiers, devrait permettre la réédition de certains d'entre eux.

L'auteur et l'éditeur remercient pour leur aimable concours tous les auteurs des textes de cet ouvrage, ainsi que Bruno Benitah, Marcel Berger, Catriona Byrne, Philippe Kantor et Pierre Pachet.

ISBN 2 7117 5300 X
numéro d'éditeur : MJ193

Composition, maquette et mise en pages : Arnaud Martin
Cliché de couverture : Alain Luguet. Collection du Musée des Arts et Métiers
Impression : STIGE, Turin



VUIBERT
http://www.vuibert.fr

# AVANT-PROPOS

*O mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon cœur comme une onde rafraîchissante.* Lautréamont, *Les chants de Maldoror* (Chant deuxième)

Lautréamont avait raison, les mathématiques sont à la fois sévères et peuvent provoquer plaisir esthétique et excitation intellectuelle. C'est en ce sens qu'elles sont diaboliques !

On admet généralement qu'elles tiennent un rôle éminemment formateur et qu'elles sont indispensables, comme science et langage des sciences. Ce rôle formateur s'exprime ici à travers le jeu de mini-recherches, mais il n'y a pas de frontière imperméable entre jeux et activités plus sérieuses : nées d'un pari au jeu de dés, les probabilités ont ouvert de colossaux marchés financiers virtuels ; c'est le même mathématicien, l'Anglais John Conway (il apparaît plusieurs fois dans ce livre), qui a créé le célèbre «jeu de la vie», une simulation passionnante de processus biologiques, qui a écrit un livre sur «les jeux et les nombres» et qui a participé à d'importantes aventures des mathématiques de ces dernières années ; Hamilton, inventeur du premier système de nombres non-commutatifs, les a illustrés par un parcours sur les sommets d'un polyèdre, sans doute aussi pour convaincre ses contemporains sceptiques (c'est à cette occasion qu'a été créée la notion de cycle hamiltonien, page 25).

Cette richesse à multiples facettes des mathématiques, qu'elles soient étudiées pour elles-mêmes ou bien en liaison avec des applications (on verra que les polymères ressemblent aux ballons de foot, page 4, et que l'organisation du travail repose sur la théorie des graphes, page 19) est l'une des raisons de la fascination universelle qu'exerce cette science. Nous vous proposons de vous en faire une petite idée au cours de cette promenade buissonnière, en compagnie d'une équipe que la Fête de la Science nous a permis de réunir. Enseignants et chercheurs illustrent ainsi le dynamisme des mathématiciens d'Europe.

De Miguel de Guzman, auteur d'un best seller en Espagne, *Aventures d'un mathématicien*, à Osmo Pekonen, mathématicien et écrivain finlandais, d'Albert Beutelspacher, créateur d'un musée des mathématiques à Giessen en Allemagne, à l'équipe de l'Open University de Londres (avec qui même l'algèbre linéaire devient amusante, page 18), la plupart des pays de l'Europe actuelle sont réunis ici. Nous espérons que l'échange d'expériences pédagogiques autour des mathématiques sera fructueux. Notre but est d'ouvrir une fenêtre sur des mathématiques accessibles à tous, en excitant l'imagination et en mettant en mouvement les têtes, à l'image du «calendrier mathématique» que publient depuis plusieurs années nos amis hollandais (page 23).

Il n'y a qu'une seule règle à appliquer : chercher les réponses, seul ou en équipe (avant d'aller voir les solutions !).

À vos marques, FÊTE DES MATHS !

**Jean-Christophe Yoccoz**, Professeur au Collège de France, médaille Fields
**Jean-Michel Kantor**, Professeur à l'Université Paris VII

# LES SECRETS MATHÉMATIQUES DU BALLON DE FOOT

Albrecht Beutelspacher, **Allemagne**

On imagine habituellement le ballon de foot parfaitement rond mais, quand on y regarde de plus près, on s'aperçoit qu'il est formé de plusieurs morceaux, selon un arrangement qui vise à rendre le ballon aussi rond que possible. Les morceaux du ballon sont des polygones réguliers, pas tous les mêmes. Avec des morceaux tous identiques on ne peut fabriquer que des solides platoniciens (figure 1) qui ne sont pas bien ronds: vous imaginez-vous jouer au foot avec un ballon en forme de cube ?

figure 1

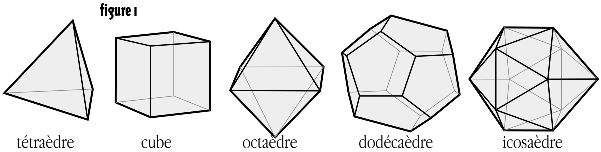
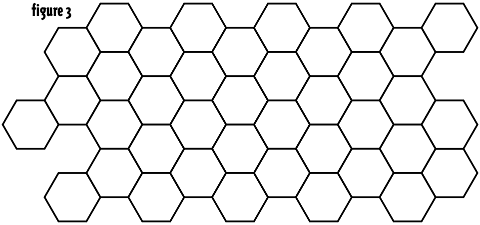



figure 2

Le ballon standard est formé d'hexagones et de pentagones réguliers. À chaque sommet trois morceaux se rejoignent (figure 2). Si on ne prenait que des hexagones, on obtiendrait une figure plate comme un réseau de nids d'abeilles (figure 3) ; un seul hexagone et deux pentagones à chaque sommet, cela donnerait un sommet trop marqué (trop pointu).

figure 3



On prend donc deux hexagones et un pentagone pour rendre la structure la plus sphérique possible. Si on fait la même combinaison à tous les sommets on obtient une structure homogène. En particulier on voit que deux pentagones ne se touchent jamais. Demandons-nous

**Albrecht Beutelspacher** (Albrecht.Beutelspacher@math.uni-giessen.de)
Parmi ses nombreuses activités tournées vers la popularisation des mathématiques, il prépare actuellement un musée des mathématiques.

combien il y a de pentagones et d'hexagones au total. Bien sûr, nous pourrions les compter. Mais on peut se tromper et compter deux fois le même morceau. Il y a des moyens ingénieux pour compter...

Par exemple si on tient le ballon avec un pentagone au sommet ; il y en a alors un autre en bas et les autres pentagones forment deux ceintures de 5 pentagones chacun (comptez-les !). Au total cela fait $1+1+5+5=12$ pentagones. Et combien d'hexagones ? Pour les compter utilisons le nombre de pentagones: chaque pentagone a 5 voisins hexagonaux. Mais chaque hexagone a exactement 3 pentagones pour voisins (Regardez !), donc chaque hexagone est compté trois fois. Au total on obtient pour le nombre d'hexagones $12 \times 5 / 3 = 20$.

Vous imaginez la difficulté pour assembler un modèle en papier formé de 12 pentagones et de 20 hexagones. Voici un kit d'assemblage pratique.

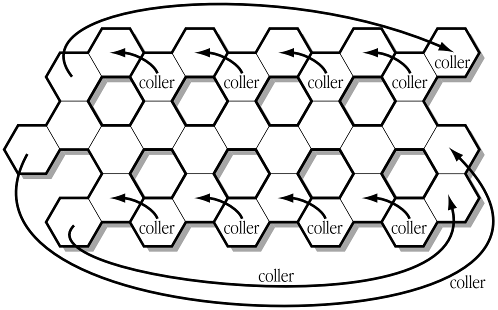



**figure 4.** On ne voit que des hexagones. Il faut couper le long des traits gras seulement, certains hexagones intérieurs deviennent des trous. L'étape finale consiste à transformer chaque trou hexagonal en un trou pentagonal en collant ensemble deux hexagones. Essayez, c'est facile et gratifiant ! Vous obtenez une balle de foot avec des hexagones solides et des pentagones formant des trous (qui ne se touchent pas).

Il y a 12 pentagones et chacun a 5 sommets donc 60 sommets au total. D'ailleurs il y a une relation magique entre les nombres que nous obtenons. Le nombre de morceaux (de faces, c'est le terme employé) est de $12+20=32$. Le nombre de sommets est 60.

Maintenant pensez au nombre de côtés, c'est-a-dire de segments qui sont à la frontière de deux faces. Il y en a beaucoup, leur nombre paraît compliqué à calculer sans faire d'erreurs... mais il y a un truc ! Une formule relie ces nombres : c'est la formule d'Euler, du nom d'un très grand mathématicien suisse, Leonhard Euler (1707-1783).

Notons $S$ le nombre de sommets, $A$ d'arêtes, $F$ de faces. On a :

$$S - A + F = 2.$$

La formule est valable pour tous les solides fabriqués comme le ballon de foot avec des faces qui se rencontrent suivant des arêtes ; une seule restriction : le solide doit être convexe, c'est-à-dire ne contenir ni partie rentrante ni trou. Si on applique cette formule pour le ballon de foot on trouve :

$$A = 60 + 32 - 2 = 90.$$

C'est plus simple que de les compter un par un !

En chimie on a fabriqué une molécule extraordinaire composée de 60 atomes de carbone. En langage chimique elle s'appelle $C_{60}$. Quand on a commencé, on avait du mal à se représenter la disposition la meilleure des atomes. Finalement en 1985 Harold Kroto (Université du Sussex) et Rick Smalley (Rice University) ont découvert que les 60 atomes devaient être aux sommets d'une microballe de foot et qu'alors les forces entre les atomes de carbone s'équilibraient parfaitement. Ils ont appelé ces molécules des fullérènes parce qu'elles ressemblent aux dômes construits par le célèbre architecte américain Buckminster Fuller. Ce sont les mêmes équations mathématiques qui expliquent la stabilité de ces dômes, celle des molécules de fullerènes (les forces entre les atomes s'équilibrent mutuellement) et qui font que le ballon de foot est presque rond : les morceaux s'équilibrent. Les inventeurs de cette molécule ont reçu en 1996 le Prix Nobel de chimie.

## LES BULLES DE SAVON, UN JEU D'ENFANT ?

### Michele Emmer, **Italie**

Non, ce n'est pas *qu'un* jeu d'enfant !

Qui n'a pas joué avec des bulles de savon ? Ce sont aussi des objets très sérieux : « *Amusons-nous sur la terre et sur l'onde / malheureux qui se fait un nom / Richesses,honneurs, faux éclat de ce monde / Tout n'est que bulles de savon* », dit un poète inconnu, mais ces bulles sont un exemple de la matière molle qui intéresse les chimistes, les physiciens comme Pierre-Gilles de Gennes, et les mathématiciens. On attribue à Archimède (au deuxième siècle avant J.-C.) la remarque que, parmi les solides à surface donnée, c'est la sphère qui a le plus grand

**Michele Emmer** (emmer@mat.uniroma1.it)
Université de Rome La Sapienza, il a réalisé de nombreux films sur les relations entre l'art et les mathématiques.

volume, c'est-à-dire qui est solution du problème isopérimétrique (voir Le conte de fées mathématique, page 11). Autrement dit, à volume constant, on obtient la surface minimale pour la sphère. Ce n'est qu'en 1884 qu'on a donné une démonstration mathématique rigoureuse de ce fait. Le résultat analogue en dimension quelconque sera établi en 1958 par le mathématicien italien Ennio De Giorgi.

Les premières observations systématiques de bulles de savon sont dues au mathématicien belge Plateau (il a publié le résultat de 50 ans de recherche sous le titre «Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires »). Il étudie les films de savon qui s'appuient sur un contour donné, un fil de fer. Parmi toutes les surfaces imaginables s'appuyant sur le contour, le film de savon a la surface la plus petite. De plus une caractéristique locale, la courbe moyenne, est nulle (figure 1).

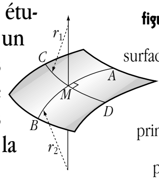



**figure 1.** La courbure moyenne de la surface est définie par l'intermédiaire de deux rayons appelés rayons principaux, qui sont dans des plans perpendiculaires.

La première surface connue connue, à part l'hélicoïde (formée par une droite en rotation et translation autour d'un axe perpendiculaire), est formée par la rotation d'une chaînette (voir page 15) autour d'un axe. La surface s'appelle caténoïde et a été déterminée en 1744 par l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, Euler. Vous pouvez la fabriquer en formant des bulles de savon s'appuyant sur deux cercles.

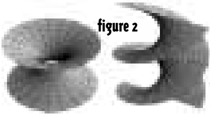


**figure 2**

caténoïde hélicoïde

Mais il y a bien d'autres surfaces minimales. Plateau a observé expérimentalement que, si on a plusieurs surfaces qui se rencontrent, les angles que font entre elles les surfaces des bulles ont deux valeurs précises : 120° (comme deux demi-sphères, figure 3) ou 109°28 (quand quatre lignes de raccordement se rencontrent). C'est seulement en 1976 que la mathématicienne américaine Jean Taylor a expliqué ce résultat expérimental. Plateau observa aussi deux bulles de savon de volumes égaux ou différents qui se rencontrent. Les équations à résoudre sont compliquées (non-linéaires) et on a utilisé de manière décisive les ordinateurs. Les mêmes ordinateurs ont servi à fabriquer des images de surfaces minimales d'une grande qualité.

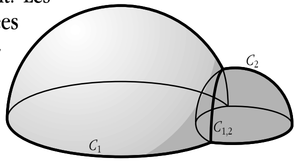



**figure 3.** Les films ne peuvent se rencontrer le long d'une ligne que par trois et forment alors deux à deux des angles de 120°.

Dans la période récente on a obtenu un riche «bestiaire de surfaces minimales», avec des images qui ont permis de faire des recherches très poussées. Par exemple on s'est intéressé aux surfaces minimales dont la «courbure totale» est bornée, même si la surface « va à l'infini ».On pensait que les seules surfaces existantes de ce type étaient le plan et la caténoïde. Les travaux de mathématiciens aidés de visualisations informatiques ont montré le contraire. Voilà un nouveau type de recherche pour géomètres informaticiens : dessiner à partir de données mathématiques des images utiles.

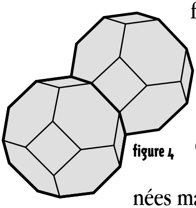


figure 4

Mais d'autres problèmes apparaissent naturellement, par exemple ceux soumis aux mathématiciens par les physiciens des matières molles comme les mousses : comment remplir l'espace avec des cellules (des bulles) de manière que la surface de contact ait une aire minimum ?

Si on ne considère qu'une seule cellule, nous avons vu que c'est la sphère qui est la solution. Mais s'il faut remplir l'espace, on imagine des dômes à la Buckminster Fuller (voir page 6). Cette question fut posée en 1887 par un physicien, Lord Kelvin (oui, celui des degrés, un écossais né en Irlande ). Récemment la solution de Kelvin (figure 4) a été améliorée grâce à une subtile utilisation d'informatique graphique. Encore un nouvel exemple de recherches interdisciplinaires où les mathématiques ont leur part…

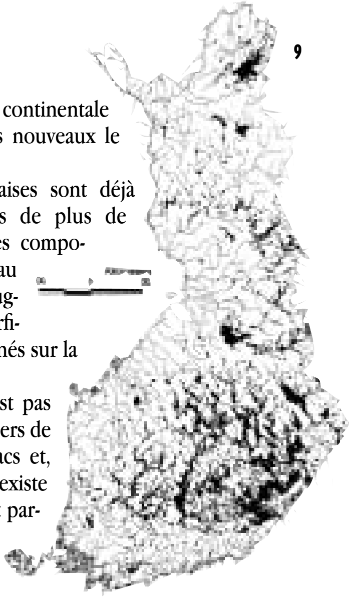
Vous voyez, ce n'est pas qu'un jeu d'enfant !

## LE PAYS LE PLUS FRACTAL D'EUROPE

Osmo Pekonen, **Finlande**

La Finlande ! Quel pays étonnant, aux contours imprécis et poétiques, qui témoignent toujours de la dernière glaciation qui a façonne son relief. Sur une superficie de 337 000 km², on compte 180 000 lacs de plus de 500 mètres carrés. C'est la masse glacière qui les a creusés en se retirant vers le nord, il y a 11 000 ans. Le recul du glacier provoqua un lent mouvement tectonique ascendant qui continue encore de nos

**Osmo Pekonen** (pekonen@math.jyu.fi)
Né en Finlande en 1960, il enseigne les mathématiques à l'université de Jyvaskyla. Il est aussi connu comme écrivain.



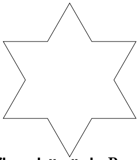
jours. Le soulèvement de la plaque continentale fait apparaître des îles et des îlots nouveaux le long des côtes de la Mer Baltique.

Les eaux territoriales finlandaises sont déjà ponctuées d'environ 81 000 îles de plus de 100 mètres carrés. Le nombre des composantes connexes de la Finlande, au sens de la topologie élémentaire, augmente-t-il ? Difficile à dire, la superficie du pays augmente de 7 $km^2$ gagnés sur la mer tous les ans.

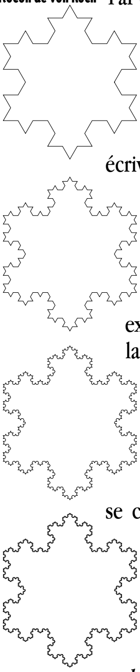
Décidemment, la Finlande n'est pas simplement connexe. Il y a des milliers de lacs, des milliers d'îles dans les lacs et, pour confondre le topologue, il existe des îles qui contiennent des lacs, et parfois il y a même des îles dans ces lacs-là… Pour décrire une telle géométrie, on a pensé aux fractales. Personne n'ignore plus ces objets mathématiques, introduits par Mandelbrot, qui apparaissent souvent comme des frontières. On en trouve quand on ne peut définir une frontière claire et nette entre deux ensembles de forme compliquée, comme celle entre les eaux et les terres de Finlande.

Peut-on modéliser la Finlande à l'aide de fractales ? Pour caractériser des objets qui peuvent être infiniment irréguliers, Mandelbrot a introduit le concept de *dimension fractale*. Si un objet fractal est contenu dans un espace ordinaire de dimension $d$, sa dimension fractale $D$ est comprise entre 0 et $d$ ; mais, contrairement aux dimensions habituelles qui sont toujours entières, $D$ peut être une fraction ou même un nombre irrationnel.

Pour expliquer cette notion de dimension fractale, il est commode de considérer une classe importante d'objets fractals, les objets dits *autosimilaires*. Une tel objet peut être divisé en $k$ parties égales, chaque partie étant une réduction de l'objet initial dans un rapport $r$, plus petit que 1. Cette division peut, en principe, être répétée indéfiniment, puisque les $k$ parties de l'objet initial, semblables à cet objet, peuvent être divisées à leur tour en $k$ parties égales, et ainsi de suite. Certains objets de la géométrie usuelle ont cette propriété : segments de droite, carrés, cubes… Pour ces objets, on peut se convaincre aisément que la



flocon de Von Koch



dimension topologique habituelle $d$ se calcule par la formule ;

$$d = -\,(\log k \,/\, \log r).$$

Par exemple, pour le carré, on peut prendre $k = 4$, $r = 1/2$, ce qui donne :

$$d = -\,(\log 4 \,/\, \log (1/2)) \;=\; 2.$$

Même résultat pour $k = 9$, $r = 1/3$. Et cela marche évidemment avec n'importe quel facteur de réduction. En écrivant $R = 1/r$, ceci correspond au théorème bien connu selon lequel, si on agrandit une figure géométrique d'un facteur $R$, les longueurs sont multipliées par $R$, les surfaces par $R^2$, les volumes par $R^3$…

Pour définir la dimension fractale $D$, il faut généraliser notre formule à des objets plus complexes. Par exemple, le contour d'un flocon de neige, ou d'un lac finlandais, est une ligne extrêmement irrégulière. En augmentant à l'infini l'irrégularité de cette ligne, elle ressemblerait presque à une surface. Ce ne serait donc plus vraiment une ligne à une dimension, ni tout à fait une surface à deux dimensions. La définition même d'une fractale peut se faire en disant que cette classe d'objets se caractérise par une dimension fractale strictement plus grande que la dimension topologique :

$$D > d.$$

Les flocons de neigne ne manquent pas en Finlande non plus… Un modèle mathématique devenu classique est *le flocon de Von Koch*, introduit par le mathématicien allemand Helge Von Koch en 1904. Si vous le grossissez par un facteur $R = 3$, chaque segment est remplacé par $k = 4$ nouveaux petits segments. On a :

$$D = (\log k \,/\, \log R) = (\log 4 \,/\, \log 3) = 1{,}2618\ldots$$

À Jyväskylä, un groupe de recherche dirigé par le professeur Pertti Mattila se penche sur les mystères d'objets fractals encore plus compliqués. Pendant les crues, on aurait constaté des petites fluctuations de la dimension fractale… de la Finlande !

## LA PLAQUE DE CHOCOLAT

### Paul Halmos

Voici une plaque de chocolat rectangulaire ($5 \times 9$ carrés) : on y joue à deux. Le premier joueur choisit l'un des 45 carrés, disons celui marqué « 1 » sur la figure 2, et l'enlève ainsi que tous les carrés situés au-dessus et à sa droite.

Le deuxième joueur choisit alors l'un des carrés qui n'ont pas été enlevés, disons le carré marqué « 2 » sur la figure 3, et l'enlève ainsi que tous les carrés situés en haut à droite de celui-ci.

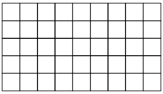


figure 1

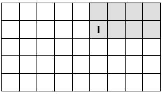



figure 2

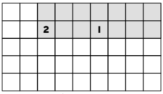



figure 3

Ensuite c'est au tour du premier joueur de choisir un carré, n'importe lequel de ceux qui n'ont pas été enlevés et de l'enlever ainsi que tous les carrés situés en haut à droite. Le jeu continue de cette manière jusqu'à ce qu'il s'arrête, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'un des joueurs enlève le carré inférieur gauche et, ce faisant, perde la partie.

**PROBLÈME 1.** Si la plaque est carrée, l'un des joueurs a-t-il les moyens de gagner à tout coup ?

**PROBLÈME 2.** Si la plaque de chocolat est de la forme $2 \times n$, l'un des joueurs peut-il gagner à tout coup ?

**Paul Halmos**
Né à Budapest en 1916. Il est professeur d'université aux États-Unis depuis 1938. Il a exercé une grande influence sur l'enseignement des mathématiques. Dans *Problèmes pour mathématiciens petits et grands* (Cassini, Paris, 2000), il présente la collection de problèmes qu'il a constituée tout au long de sa carrière.

## UN CONTE DE FÉES MATHÉMATIQUE

### Vagn L. Hansen, Danemark

Au pays des mathématiques, on annonça un jour un concours parmi tous les quadrilatères pour choisir celui ayant la plus grande surface. Pour que la compétition soit équitable, les juges décidèrent qu'on ne comparerait que des quadrilatères ayant un périmètre fixé une fois pour toutes . L'annonce (sur le Web local) précisait qu'on n'examinerait que des « quadrilatères isopérimétriques » pour trouver celui ayant la plus grande surface. Les savants reconnurent les mots grecs (les mathématiques doivent beaucoup à la Grèce) : *iso* pour égal, *peri* pour « autour », l'idée de périmètre, et *metron* la mesure. Ils surent aussi que le périmètre vaut la somme des longueurs des côtés.

L'annonce du concours était formulée comme un problème mathématique : *Parmi tous les quadrilatères de périmètre donné trouver celui de plus grande surface.*

Tous les quadrilatères se mirent sur leur trente-et-un, espérant gagner le concours. Certains avaient un angle entrant, d'autres étaient des parallélogrammes ou des rectangles, et la plupart avaient des côtés de longueurs distinctes. On remarquait aussi le carré parmi les prétendants. Le jour du concours un juge appela tous les quadrilatères de périmètre fixé. Le premier qui arriva (figure 1) avait un angle rentrant, il s'appelait M. Concave et quand il annonça que c'était lui qui avait la plus grande surface, le juge dit en souriant : «ça ne peut être le cas, regardez, je peux par réflexion vous transformer (et il dessina la figure 2) pour obtenir, en ôtant l'angle rentrant, un quadrilatère de même périmètre mais avec une plus grande surface». Et du coup, le juge demanda à tous les quadrilatères qui n'étaient pas convexes, autrement dit qui ne contenaient pas leurs diagonales, d'abandonner la compétition, puisqu'ils n'avaient aucune chance de l'emporter. Il ne restait déja plus dans la compétition que les quadrilatères convexes ayant tous le même périmètre *P*. Alors M. Inégal (figure 3) se présenta : il avait deux côtés qui se suivaient (adjacents) de longueur différente et il annonça qu'il avait la plus grande surface. Le juge jeta rapidement un coup d'œil, il le divisa le long d'une diagonale, et lui dit : « Non, M. Inégal, vous n'avez pas la plus grande surface car, en remplacant les deux côtés par des côtés égaux comme ceci (figure 4), je peux vous transformer en un quadrilatère de plus grande surface, tout en gardant le même périmètre ». M. Inégal voulut protester mais le juge lui fit remarquer qu'un triangle comme *ABC* dont les côtés ont une somme constante est de surface maximale quand il est isocèle.


figure 1

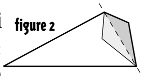


figure 2

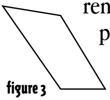


figure 3

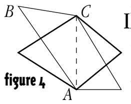


figure 4

**Vagn Lundsgaard Hansen** (V.L.Hansen@mat.dtu.dk)
Auteur de *Geometry in Nature* (A.K. Peters, 1993) et *Shadows of the Circle* (World Scientific, 1998). Le présent article est inspiré d'un article du même auteur : « I am the greatest » (*Mathematics in schoo*l, vol. 25, n°4, 1996, Grande-Bretagne).

**QUESTION 1.** Pouvez-vous le montrer ?

M. Inégal rentra chez lui réfléchir à la question mais finalement il fut convaincu. Après cet incident, le juge conclut qu'il suffisait dorénavant de considérer seulement les quadrilatères tels qu'une diagonale les divise en deux triangles isocèles.

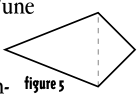


figure 5

Monsieur Cerfvolant se mit en avant : il répondait à la condition mais il avait deux côtés de longueur différente (figure 5) et il déclara : « Maintenant que tous les autres ont été éliminés, c'est certainement moi le gagnant ! ». Le juge regarda de près M. Cerfvolant et soudain s'exclama « Aha ! »… et le coupa par l'autre diagonale (figure 6).

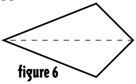


figure 6

**QUESTION 2.** Comprenez-vous la réflexion du juge ?

« Oui, dit le juge, vous devez avoir tous les côtés égaux (autrement dit être un losange). Cette fois-ci il ne restait plus dans la compétition que des losanges.

Monsieur Losange se lève alors et annonce : « Il est facile de calculer ma surface ; comme les quatre côtés sont égaux, ma surface est le produit du côté par la hauteur. »

**QUESTION 3.** Pourquoi ?

« C'est exact, dit le juge, donc pouvez -vous me dire qui a gagné le concours ? ». M. Losange répondit : « Comme je dois avoir la hauteur la plus haute possible, il faut que j'ai des angles droits ». « Autrement dit, répliqua le juge, c'est le carré qui a gagné ! ». Et il annonca au haut-parleur le résultat du concours : *parmi les quadrilatères ayant un périmètre donné, c'est le carré qui a la plus grande surface.*

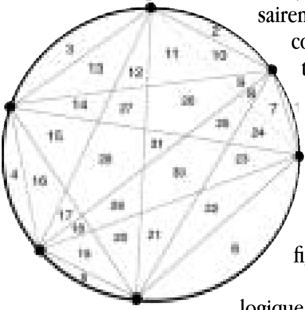
La compétition était terminée, les quadrilatères revinrent chez eux, déçus (sauf le carré). Le problème isopérimétrique pour les quadrilatères venait d'être réglé. Le carré était le gagnant, le fait (au pays des mathématiques on dit *un théorème*) était clairement établi, par les explications du juge (sa *démonstration*).

# POURSUITES

## Jean-Pierre Boudine, **France**

(2, 4, 8, 16…) Savez-vous poursuivre ? Voilà le genre de questions que l'on rencontre dans les tests d'intelligence, sérieux ou non. Cela énerve à juste titre les mathématiciens, car toute suite d'entiers peut être poursuivie d'un grand nombre de manières différentes. Par exemple 3, 5, 7 peut être suivi de 9, ou de 11, selon que l'on considère les nombres impairs (sauf 1) ou bien les nombres premiers impairs…

Plus surprenant, la suite (2, 4, 8, 16…) ne se continue pas nécessairement par 32. Mettez des points sur la circonférence d'un cercle, joignez-les de toutes les manières possibles et comptez le nombre maximal de régions créées. Avec 2 points vous avez 2 régions ; avec 3 points, 4 régions ; avec 4 points, 8 régions ; avec 5 points, 16 régions ; et avec 6 points ? Non pas 32, mais 31 régions au maximum : voyez ci-contre la figure correspondante.



Donc 2, 4, 8, 16, 31 est une suite logique. Saurez-vous trouver le prochain terme (nombre de régions avec 7 points) ?

Malgré tout, dans pas mal de cas, il est possible de « deviner », et cela peut conduire à des questions intéressantes. Un exemple bien classique est celui-ci :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots$$

Le terme suivant est (en tout cas, peut être) 21 ; cette suite se construit en ajoutant à chaque fois les deux derniers termes. C'est la suite de Fibonacci, aux innombrables propriétés. On peut démontrer (assez facilement avec un niveau bac) que le quotient de deux termes consécutifs (en prenant au numérateur le plus grand) est une quantité qui se rapproche de plus en plus du nombre d'or, dont les premières décimales sont : 1,618… Il est plus long et délicat de prouver que deux carrés seulement apparaissent dans cette suite, 1 et 144.

**Jean-Pierre Boudine** (Jean-Pierre.Boudine@wanadoo.fr)
Directeur de « Quadrature » (BP 183, 13 264 Marseille cedex 07), il est notamment l'auteur de *Homo Mathematicus* (Vuibert, 2000).

Voici trois thèmes de « poursuites », trois suites de nombres, voire de chiffres. Devinez le principe de leur construction.

**SUITE A.** 3, 6, 1, 8, 6, 8, 4, 8, 4, 8, 3, 2…

**SUITE B.** (0146483421), (1211301010), (3511000000), (6201010000)…

**SUITE C.** 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0…

## LA CHAÎNETTE DE GAUDÍ
### L'ARCHE LA MEILLEURE

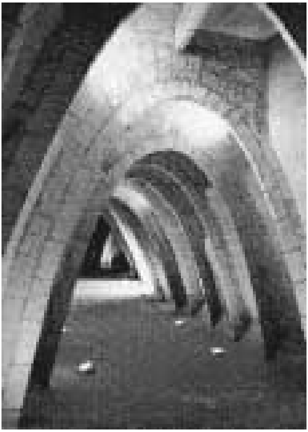
Claudi Alsina, **Espagne**

Antonio Gaudí (1852-1926) est le plus célèbre des architectes catalans. La Sagrada Famila, cathédrale en projet, sera certainement l'un des chefs d'œuvre de l'architecture européenne, mais ses constructions achevées attirent déja de très nombreux visiteurs. Nous voulons vous montrer ici, sur un exemple, que le génie de Gaudí, fondé sur sa connaissance de la géométrie, lui a permis de répondre à la question : quelle est la meilleure arche pour l'architecture ?

**Qu'est-ce qu'une chaînette ?** Une chaînette, c'est la courbe déterminée par une chaîne ou un câble fixé aux deux extrémités et qui pend librement. À l'époque de nos ancêtres, la vie n'était pas si tendue et les gens n'avaient pas de montres. Ils avaient des goussets attachés à leurs poches et la forme des chaînes était caractéristique : la chaînette. On peut encore voir ces formes avec les câbles électriques par exemple, les cordes où pend le linge à sécher (quand il n'y a pas de linge), les voiles de bateau, la forme de la ficelle qui relie la main au cerf-volant… Par définition la chaînette est la courbe solution du problème physique de la corde pendue en deux extrémités soumise à son propre poids. Sur un calculateur il suffit de tracer le graphe de la fonction $A\cosh(x/A)$, associée au cosinus hyperbolique. Remarquez qu'une courbe aussi naturelle que la chaînette exige déjà des exponentielles ! Vous pouvez voir des formes de chaînette en jouant avec des bulles de savon (voir figure 2 page 7).

**Claudi Alsina** (alsina@ea.upc.es), professeur à l'Université polytechnique de Catalogne (Barcelone), est un spécialiste de l'enseignement des mathématiques, aux plans espagnol (il a été responsable de l'Université à distance à Barcelone) et international (commission internationale sur l'enseignement des mathématiques CIEM, groupe ISTRON).

**Une chaînette n'est pas une parabole.** Les deux courbes se ressemblent. Si vous mettez du linge à sécher de manière uniforme sur la corde à sécher, la nouvelle forme sera polygonale et se rapprochera de la parabole. On peut voir ces formes sur les ponts soutenus par des grands câbles paraboliques suspendus à de hautes tours d'où l'on fait pendre des câbles verticaux pour supporter le tablier.



**Quelle est la meilleure arche ?** Les hommes ont construit des arches depuis des siècles, la forme de cercle a eu du succès pour les portes, les fenêtres… mais les arches doivent être soutenues par des colonnes, des murs et des contreforts. L'idee géniale de Gaudí, c'est que la meilleure arche serait celle qui se soutiendrait elle-même et qu'une telle arche doit être l'image d'une chaînette dans un miroir. Pas de piliers, pas de contreforts, l'arche repose directement sur le sol. Un toit parabolique est idéal pour soutenir une charge uniformément distribuée de neige, une arche en chaînette est idéale pour se soutenir elle-même. Gaudí construisit des arches circulaires et paraboliques, mais il utilisa la chaînette dans ses réalisations les plus célèbres (la Pedrera, le palais Güell, le park Güell…). La reproduction ci-dessus montre des chaînettes renversées. On sait comment Gaudí les a construites : il fit pendre des chaînes sur des grandes plaques de bois, dessiner les formes de chaînettes et couper le bois selon ces formes. Il dit un jour : « *Mes idées structurelles et esthétiques ont leur propre logique. La forme logique naît des besoins. J'ai longuement réfléchi aux raisons pour lesquelles ces idées n'ont pas été appliquées plus tôt et je les remets en cause. Mais comme je suis profondément convaincu de leur perfection, j'ai le devoir de les appliquer* ».

**La morale de cette histoire.** De tout cela nous pouvons tirer des conclusions. La première est qu'on peut apprendre beaucoup de la nature en y observant des faits géométriques qui puissent être utilisés au service de la création. La deuxième conséquence c'est qu'il y a toujours place pour l'innovation, indépendamment des méthodes traditionnelles. Et quand on est convaincu de quelque chose, il faut appliquer ses idées. Visitez les bâtiments de Gaudí, mais tirez aussi profit de ses idées.

# LA GRENOUILLE SAUTEUSE

Miguel de Guzman, **Espagne**

Connaissez-vous le jeu de la grenouille sauteuse ?

Pour y jouer, il faut prendre un grand papier quadrillé sur lequel on trace une ligne horizontale à cinq carrés de distance de la limite supérieure (figure 1).

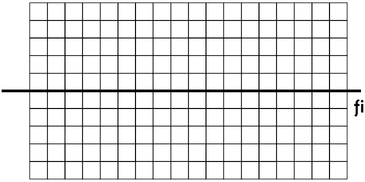


figure 1

Le jeu est le suivant : choisissez un certain nombre de cases en dessous de la ligne horizontale, où vous placez des pions ; ensuite commencez à bouger et à ôter des pions selon les règles suivantes :

– on peut seulement déplacer des pions horizontalement (vers la gauche ou vers la droite) ou verticalement (vers le haut) en sautant par dessus une case occupée dont on ôte ensuite le pion (par exemple, de la figure 2 on passe à la figure 3 ou 4 ; de la figure 5 à la figure 6) ;

figure 2

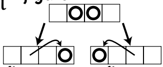
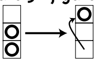


figure 3 figure 4

– le but du jeu est de placer des pions le plus haut possible au-dessus de la ligne horizontale, et d'y arriver avec le moins de pions possibles.

figure 5 figure 6



Essayez d'abord, faites des expériences avec quelques pions, puis essayez de prendre le moins de pions possibles pour arriver le plus haut possible, avant de lire la suite…

**Conseils pour jouer.** Regardez ce que vous pouvez faire avec un pion : rien, on ne peut pas sauter la ligne. Par contre avec deux pions on peut arriver à la première au-dessus (figure 7). Maintenant le travail commence :

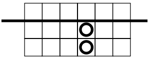


figure 7

**QUESTION.** Comment arriver à la deuxième ligne ? Quel est le nombre minimum de pions pour y arriver ? Et à la troisième ?

**Miguel de Guzman** (mdeguzman@bitmailer.net)
Professeur de mathématiques à l'Université Complutense de Madrid, il a été président de la Commission internationale sur l'enseignement mathématique (CIEM) de 1991 à 1998. Il est l'auteur de nombreux articles et livres à tous les niveaux de mathématiques.
Site Web : http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm

# FIGURES DE NOMBRES

John Mason, **Grande-Bretagne**

Cet amusement mathématique présente des problèmes d'arithmétique et d'algèbre sous forme géométrique.

**Unique règle du jeu :** le nombre dans le carré est la somme des deux nombres dans les cercles de chaque côté (figure 1).

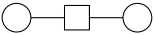


figure 1

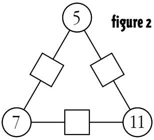



figure 2

**QUESTION 1.** Complétez la figure 2.

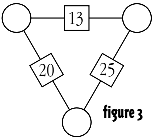



figure 3

**QUESTION 2.** Complétez inversement la figure 3. C'est plus difficile ! On peut tâtonner, mettre un nombre dans un cercle puis essayer de compléter. Après plusieurs essais, pouvez-vous trouver une solution ? Et une méthode valable pour tous les triangles ?

**QUESTION 3.** Essayez alors de compléter les figures 4 et 5. C'est impossible avec des nombres entiers (pour la figure 4, il faut des nombres négatifs ; pour la figure 5 des fractions).

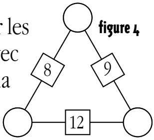



figure 4

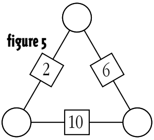



figure 5

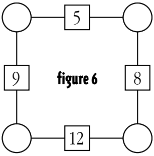



figure 6

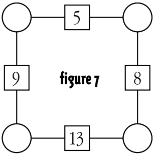



figure 7

**QUESTION 4.** Plus compliqué : réfléchissez aux figures 6 et 7. Peut-on les compléter ? Dans un cas il y a beaucoup de solutions, dans l'autre aucune !

En fait, cette récréation, c'est le début de l'algèbre linéaire…

**John Mason, Open University** (j.h.mason@open.ac.uk)
Cette institution est une université d'enseignement à distance : la seule condition pour y étudier est d'avoir plus de 21 ans. Les relations avec les professeurs sont de plus en plus informatisées. Cette université a été à la pointe de la rénovation de l'enseignement, en particulier des mathématiques.

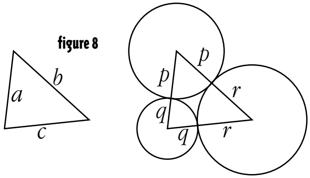


figure 8

**QUESTION 5.** Dans la figure 8, étant donné un triangle de côtés $a$, $b$ et $c$, pour quelles valeurs de $p$, $q$ et $r$ peut-on trouver des cercles tangents comme indiqués sur la figure (centrés aux sommets).

## DU RIFIFI CHEZ LES POISSONS ROUGES

Jean-Michel Kantor, France

**Incompatibilités d'humeur.** Le marchand de poissons rouges a un problème : il a fait venir des poissons très rares d'Asie du Sud-Est, mais certains ne peuvent pas vivre dans le même aquarium, certaines espèces attaquant d'autres espèces. Il y a huit espèces différentes que nous appellerons A, B, C…, H. Les incompatibilités d'humeur sont indiquées par une croix dans le tableau 1.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | X | X | X | | | X | X |
| B | X | | | | X | X | X | |
| C | X | | | X | | X | X | X |
| D | X | | X | | X | | | X |
| E | | X | | X | | X | X | |
| F | | X | X | | X | | | |
| G | X | X | X | | X | | | |
| H | X | | X | X | | | | |

tableau 1

*Combien faut-il d'aquariums au minimum ?*

Pour se représenter le problème, symbolisons chaque sorte de poisson par un point (un sommet) et relions entre eux par un trait (une « arête »… de poisson !) deux espèces de poissons chaque fois qu'elles ne se supportent pas.

figure 2

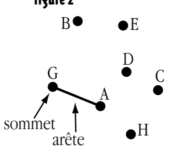
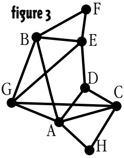



figure 3



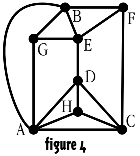



figure 4

On obtient les diagrammes 3 ou 4.

Il faut remarquer que la disposition des points n'a aucune importance ; ce qui importe, c'est la structure des diagrammes obtenus. Par

**Jean-Michel Kantor** (kantor@math.jussieu.fr)
Mathématicien, il s'intéresse depuis longtemps à la popularisation des mathématiques (il est notamment le concepteur de la section mathématique de la Cité des Sciences de La Villette, et collabore régulièrement à la revue *Cosinus,* mensuel scientifique pour les jeunes à partir du collège).

exemple les diagrammes 3 et 4 (ce sont des *graphes*) ne se ressemblent pas, mais les raisonnements avec chacun d'eux seront les mêmes et donneront le même résultat. On peut remplacer le tableau 1 par les graphes 3 ou 4.

**EXERCICE 1.** Raisonnez à partir des figures 3 ou 4 pour chercher à répartir les poissons dans des aquariums et donnez le nombre minimum d'aquariums nécessaires.

**EXERCICE 2.** On pourrait tracer au contraire une arête entre deux sommets si les populations correspondantes peuvent vivre en bonne harmonie. Faites un graphe selon cette règle et déduisez de la même manière le nombre d'aquariums nécessaires.

**EXERCICE 3.** Quelle méthode vous paraît la plus efficace ? Montrez que si on colorie les sommets d'un graphe en mettant une couleur différente à des sommets joints par une arête, le nombre d'aquariums est égal au nombre minimal de couleurs nécessaires pour le graphe introduit.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | X | | X | X | X | | X |
| B | X | | | | X | X | | |
| C | | | | | | X | X | X |
| D | X | | | | | | | X |
| E | X | X | | | | X | | |
| F | X | X | X | | X | | X | |
| G | | | X | | | X | | |
| H | X | | X | X | | | | |

**tableau 5**

**Applications : emplois du temps, problèmes d'organisation.** Supposez qu'on remplace le problème des aquariums par le problème suivant : dans votre classe de lycée (ou de collège), il y a 8 matières (de A à H) et 8 élèves qui suivent certaines d'entre elles (1 à 8). Une croix dans le tableau indique que l'élève correspondant suit le cours correspondant (figure 5). Si l'on veut que les élèves puissent suivre le cours de leur choix, on est à nouveau devant un problème de coloriage d'un graphe.

**EXERCICE 4.** Expliquez pourquoi.

**Des graphes pour l'organisation.** Les graphes ne sont pas seulement utiles pour ranger des poissons sauvages, il y a de très nombreuses situations où la représentation avec des graphes permet de raisonner, de chercher la solution d'un problème.

En général la meilleure représentation n'est pas fixée, il faut la trouver soi-même.

Historiquement les premiers graphes sont apparus chez Euler, à propos des ponts de Kœnigsberg. D'ailleurs on appelle graphe eulérien un graphe où l'on peut parcourir tous les sommets en passant une fois et une seule par chaque arête. Pour qu'un graphe soit eulérien, il faut et il suffit que le degré de tous les sommets (sauf au maximum pour deux d'entre eux) soit pair.

**Des graphes pour la mémoire.** Dans certains problèmes et certaines applications, il vaut mieux avoir des graphes orientés (chaque arête porte une flèche indiquant le sens de parcours).

Voici un exemple : on considère deux symboles 0 et 1 et des suites de longueur 1, 2, 3… formées de ces symboles ; par exemple : 0, 0, 11, 010, 1101, 11101 sont successivement une suite de longueur 1 suivie d'une suite de longueur 1, etc., et à la fin une suite de longueur 5 (11101).

Nous appellerons roue de mémoire de longueur 2 par définition une roue où :

— on peut trouver toutes les suites de 2 de ces symboles formés de 0 ou de 1 en parcourant la roue dans le sens des aiguilles d'une montre ;

— chacune des suites différentes n'apparaît qu'une fois. C'est appelé ainsi parce qu'en la regardant vous pouvez voir toutes les suites de symboles.

Exemple : la figure 6 est une roue de mémoire de longueur 2, les suites 00, 01, 10, 11 y apparaissent toutes, et une seule fois.

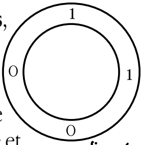


**figure 6**

**EXERCICE 5.** (1) Faites la liste de toutes les suites de longueur 3. Combien y en a-t-il ? (2) Essayez de construire une roue de mémoire de longueur 3 en partant de 011 par exemple et en tâtonnant pour ajouter les symboles nécessaires.

**EXERCICE 6.** On définit un graphe orienté ayant pour sommets les 4 suites de longueur 2 (00, 11, 01, 10) et où les arêtes sont orientées : il y a une arête de 00 à 01 parce qu'en ôtant le premier 0 à gauche et en rajoutant 1 à droite, on passe de 00 à 01. Par contre on ne peut pas passer ainsi de 01 à 00.

(1) Dessiner le graphe ainsi défini (ne pas oublier les boucles).

(2) Montrer que chaque arête définit par recollement une suite de longueur 3 : par exemple en recollant bout à bout 00 et 01, on obtient 001.

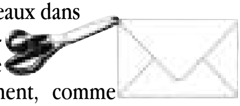
(3) Montrer que si on peut trouver un chemin partant d'un sommet et passant exactement une fois sur chaque arête orientée dans la bonne direction, on aurait ainsi fabriqué une liste des suites de longueur 3.

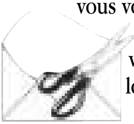
## L'ENVELOPPE PAVEUSE

### Les malices du Kangourou, **France**

**1.** Prenez une enveloppe pour envoyer le courrier.

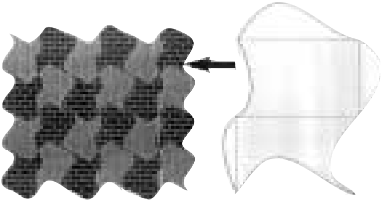
**2.** Glissez la pointe des ciseaux dans un coin et commencez à découper l'enveloppe. Vous pouvez faire ce découpage absolument n'importe comment, comme vous voulez.

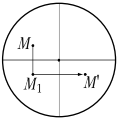




**3.** Si vous découpez en allant d'un coin à l'autre, vous pourrez étaler un côté de l'enveloppe dans le prolongement de l'autre.

**4.** En passant par les quatre coins vous pouvez ainsi étaler sur une table une forme bizarre avec laquelle, miracle, vous pouvez paver le sol de votre salle de bain !






La raison pour laquelle ça marche est mathématique. Chacun des quatre plis de l'enveloppe réalise une symétrie axiale et deux symétries successives réalisent un demi-tour : un point $M$ du dessin passe en $M_1$, puis en $M'$, et il a alors pivoté d'un demi-tour autour d'un coin de l'enveloppe. Les 4 coins engendrent ainsi le réseau rectangulaire des centres de symétrie caractéristique de ce type de pavage.

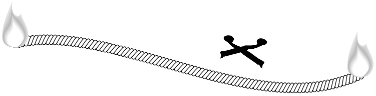
**Les Malices du Kangourou** (info@mathkang.org)
Le jeu-concours Kangourou des mathématiques est organisé chaque année en Europe (*Kangourou*, 12 rue de l'Épée de Bois, 75005 Paris).

# DEUX CHAPITRES DU CALENDRIER MATHÉMATIQUE

Rinus Roelofs & Zsofia Ruttkay, **Pays-Bas**

## Horloges à mèche

Vous disposez de deux mèches, d'une paire de ciseaux et d'allumettes. Une mèche brûle exactement en une heure quand on l'allume à un bout (n'importe lequel). Mais elle brûle irrégulièrement. Si vous la coupez en deux, même au milieu, un morceau brûlera en $x$ minutes et l'autre bien sûr en $60-x$ minutes, mais vous ne connaissez pas $x$ : il y a des bouts qui brûlent plus vite que d'autres, et d'une mèche à l'autre cela peut varier.



**QUESTION 1.** Vous voulez mesurer exactement 45 minutes avec ces deux mèches. Comment faire ? Réfléchissez par vous-même avant de regarder la solution.

Maintenant on a deux mèches, l'une qui dure 20 minutes et l'autre 80 minutes.

**QUESTION 2.** Comment mesurer successivement les durées qui vous sont proposées chaque jour de la semaine ? Lundi : 90 minutes. Mardi : 50 minutes. Mercredi : 1 heure. Jeudi : 70 minutes. Vendredi : 45 minutes. Samedi : 30 minutes.Dimanche : 35 minutes.

Faites la liste de toutes les durées qui peuvent être mesurées avec deux mèches de 20 et 80 minutes.

**Rinus Roelofs & Zsofia Ruttkay** (rinusroelofs@hetnet.nel)
La Calendrier mathématique est publié depuis 1988 par R. Roelofs (artiste) et Z. Ruttkay (professeur) avec l'aide de la fondation « Joie des mathématiques ».

## Questions de temps

Il y a beaucoup de récréations mathématiques utilisant les vitesses. Dans certains cas la solution est compliquée, mais quelquefois elle peut être rapide si on prend les choses dans le bon sens. En voici un exemple très ancien.

Un nageur plonge d'un pont dans une rivière et nage contre le courant. Après un kilomètre il voit un bouchon qui flotte. Il continue de nager un quart d'heure, fait demi-tour et arrive au pont exactement en même temps que le bouchon.

**QUESTION 1.** Trouvez la vitesse du courant.

Voici d'autres questions qui demandent aussi du flair mathématique.

**Lundi.** Un escargot est dans un puit de 6 mètres ; le jour il monte de 3 mètres, la nuit il glisse vers le bas de 2.

**QUESTION 2.** Combien de temps mettra-t-il à atteindre le sommet?

**Mardi.** En une heure Jean parcourt la distance de A à B, éloignés de 10 kilomètres (à vitesse variable).

**QUESTION 3.** Est-il vrai qu'il y a forcément 5 kilomètres successifs qu'il parcourt en moins d'une demi-heure?

**Mercredi.** Il revient de B à A en une heure.

**QUESTION 4.** Est-il vrai qu'il y a nécessairement 4 kilomètres qu'il parcourt en moins de 24 minutes ?

**Jeudi.** Un piéton et un cycliste veulent aller de C à D (60 kilomètres) aussi vite que possible. Le cycliste fait du 20 à l'heure, le piéton 10.

**QUESTION 5.** Où le cycliste doit-il poser sa bicyclette pour qu'ils arrivent ensemble?

**Vendredi.** En D les deux sportifs rencontrent un autre cycliste (qui fait aussi du 20 à l'heure). Ils décident de retourner aussi vite que possible en C.

**QUESTION 6.** Où doivent-ils poser leurs bicyclettes pour arriver ensemble tous les trois?

**Samedi.** Anne et Marc s'entraînent dans un stade. Anne fait les 400 mètres en 70 secondes. Marc en 1 minute.

**QUESTION 7.** S'ils commencent en même temps au même endroit, après combien de tours Marc va-t-il la rattraper ?

**Dimanche.** Alex et Bill sont à 2 kilomètres de distance. Ils s'approchent l'un de l'autre à 3 kilomètres-heure. Leur chien court de l'un à l'autre à la vitesse de 10 kilomètres-heure, jusqu'à ce qu'ils se rejoignent.

**QUESTION 8.** Quelle distance le chien a-t-il parcourue ?

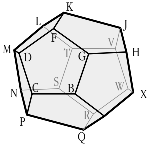
## Le voyage autour du monde

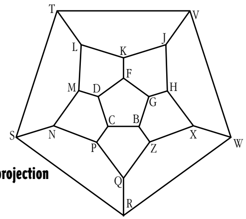
### William R. Hamilton (p.c.c. Jean-Michel Kantor), **Irlande**

Moi, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), je n'ai presque jamais quitté ma bonne ville de Dublin (ni malheureusement ses pubs si sympathiques), mais je vous propose une promenade autour du monde que j'ai inventée en 1857.

Bien sûr ce n'est pas aussi sérieux que mes travaux de physique et de mathématiques, et surtout que ma découverte la plus célèbre, celle dont je suis le plus fier (les quaternions, en 1846), mais ça n'est pas sans rapport… D'ailleurs, je n'ai pas honte, puisque même Édouard Lucas a trouvé mon jeu suffisamment amusant pour me l'emprunter et en faire des variantes. Jeunes d'aujourd'hui, méditez plutôt sur mon jeu que sur ma vie dissolue !

Voici de quoi il s'agit : on pourrait aussi appeler ce jeu le jeu icosien, car il utilise les 20 sommets (en grec *icosi*) du dodécaèdre et de leur projection : on leur donne des noms de consonnes B, C…, Z qui représentent 20 capitales.




**Le dodécaèdre**
**et sa représentation schématique en projection**

On vous donne le début d'un voyage en 20 étapes. Par exemple :

**VOYAGE 1.** B C D F…

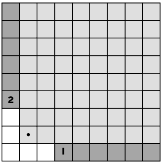
Il s'agit de parcourir les arêtes en passant une fois et une seule par chacune des vingt capitales (cela s'appellera, après ma mort, pardonnez-moi, un voyage *hamiltonien*). Faites de même pour :

**VOYAGE 2.** B C P N M…

**VOYAGE 3.** L T S R Q…

**VOYAGE 4.** J V T S R…

# SOLUTIONS




**LA PLAQUE DE CHOCOLAT • PROBLÈME 1.** Si le premier joueur choisit le carré marqué d'un point, alors il reste une figure en forme de L. À partir de là, quoi que joue le second joueur (par exemple la case 1), le premier joueur joue pour dessiner un L à côtés égaux (case 2). Il est clair que le second joueur est condamné.

**UN CONTE DE FÉES MATHÉMATIQUE • QUESTION 1.** Le sommet se déplace sur une ellipse et la hauteur est maximum pour un triangle isocèle. **• QUESTION 2.** Le même raisonnement s'applique pour l'une quelconque des diagonales. **• QUESTION 3.** Voir la figure.

**POURSUITES • LA SUITE A.** On la construit en posant tout d'abord ses deux premiers éléments, 3 et 6. Vous voyez que les deux suivants sont 1 et 8. Pourquoi ? Parce que 3 fois 6 font 18… Bref, quand on décompose 18 en 1 et 8, on considère les chiffres, mais quand on fait le produit, il s'agit de nombres… On ne multiplie pas des chiffres.

On a donc 3, 6, 1, 8 ; et on se déplace d'un cran vers la droite en effectuant maintenant le produit suivant, soit 6 fois 1, cela vaut 6 et on écrit ce 6 à droite : 3, 6, 1, 8, 6. Le produit suivant est 1 fois 8, donc 8. On a : 3, 6, 1, 8, 6, 8. Le produit à effectuer est maintenant 8 fois 6, nous écrivons donc : 3, 6, 1, 8, 6, 8, 4, 8.

C'est le mathématicien Steinhaus qui a suggéré l'étude de cette suite, dont on peut montrer de manière élémentaire différentes propriétés. (1) On ne rencontrera jamais deux nombres impairs consécutifs. (2) On ne rencontrera jamais ni 5, ni 7, ni 9, ni 0.

Mais, pouvez-vous me dire, pourquoi avoir commencé avec ces deux chiffres, 3 et 6 ? Rien ne vous empêche d'essayer avec deux autres nombres…

**LA SUITE B.** Elle peut passer pour une suite de numéros de téléphone !

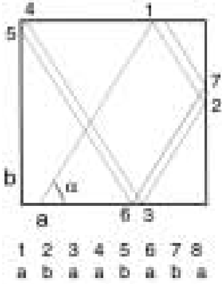
Le premier étant : $N =$ (0146483421), on écrit le second de la manière suivante : combien y a-t-il de chiffres 0 dans l'écriture de $N$ ? Il y en a 1. Combien y a-t-il de chiffres 1 ? Il y en a 2. Combien de chiffres 2 ? Il y en a 1. Combien de chiffres 3 ? Il y en a 1. Combien de chiffres 4 ? Il y en a 2, combien de chiffres 5 ? Il y en a 0. Combien de chiffres 6 ? Il y en a 1. Combien de chiffres 7 ? Il y en a 0. Combien de chiffres 8 ? Il y en a 1. Combien de chiffres 9 ? Il y en a 0.

Et ce sont ces chiffres-là, c'est-à-dire le nombre d'apparitions des chiffres du numéro $N$ (comptés dans l'ordre croissant de 0 à 9) qui vont constituer le terme suivant de la suite, (1211301010). Et on continue : des chiffres 0, il y en a maintenant 3, des chiffres 1, il y en a 5, *etc*. Nous arrivons donc à (3511000000) puis à (6201010000). Continuons. On arrive à (6210001000) et ça ne bouge plus. Si l'on dit que chaque numéro *décrit* le précédent, ce nombre 6210001000 se décrit lui-même… Mais, question : aurait-on abouti à ce numéro avec un autre point de départ, par exemple 3546550101 ? Il ne vous reste qu'à essayer… et à découvrir que la situation est un peu plus compliquée… En fait, on peut aboutir soit à un numéro qui se décrit lui-même, et c'est nécessairement celui-là, soit à un couple de numéros dont l'un décrit l'autre. De tels couples, il en existe plusieurs. Saurez-vous les trouver tous ?

**LA SUITE C.** Elle est constituée des chiffres 0 et 1. On la construit par étapes, comme ceci : 1 sera remplacé par 10 et 0 par 1. Voici les six premières étapes :

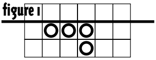
1, 10, 101, 10110, 10110101, 1011010110110…

À la place du premier « 1 », j'ai écrit « 10 ». Ensuite, à la place du « 1 » de la deuxième étape, j'ai écrit « 10 » mais à la place du « 0 », j'ai écrit « 1 ». Et ainsi de suite. Ce que l'on obtient n'est pas une suite de nombres, mais une suite de chiffres mis en chaîne, on dit : un « mot ». Il y a un rapport avec la suite de Fibonacci : chaque ligne peut s'obtenir en recopiant la ligne précédente et en mettant à sa droite la ligne encore précédente, donc en « concaténant » les deux lignes précédentes. On peut montrer que cette suite n'est pas périodique, mais (et là nous touchons à un sujet qui intéresse les mathématiciens, mais aussi les physiciens, les statisticiens, les météorologues) il n'y a pas beaucoup de *désordre* dans ce mot. Par rapport à une suite quelconque de 0 et 1, comme celle que l'on obtiendrait par exemple en tirant à pile ou face, beaucoup de séquences partielles ne peuvent pas y apparaître. Elle est donc plus « conditionnée ».




Vous pouvez l'obtenir d'une autre manière. Prenez un billard carré. Nommez « a » deux côtés parallèles et « b » les deux autres. Lancez une boule de billard depuis un bord, sur un autre bord et notez la suite des « a » (=1) et « b » (=0) obtenus selon les rebonds (en supposant que la boule ne s'arrête pas, vous écrivez le mot aussi long que vous voulez). Il ne dépend que d'une chose, l'angle, par rapport au bord, du premier mouvement, celui que vous avez impulsé. Le mot de Fibonnaci correspond au choix de l'angle « $\alpha$ » dont la tangente vaut... le nombre d'or !

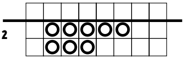
figure 1



**LA GRENOUILLE SAUTEUSE · RÉPONSE.** On s'aperçoit vite que, pour arriver à la deuxième ligne, il suffit de mettre quatre pions dans la situation de la figure 1. Démontrez ensuite qu'avec trois pions seulement vous n'y arriverez pas. Donc le cas de la deuxième ligne est résolu.

À vous de chercher pour les lignes du dessus. Montrez par exemple que l'on peut aboutir à la troisième ligne avec huit pion (figures 2 ou 3), mais pas avec sept.

figure 2



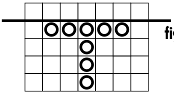
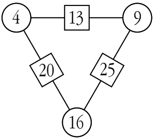


figure 3

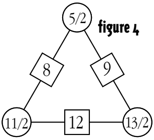
En fait (voir sur le site Web de M. de Guzman), on peut démontrer mathématiquement qu'aucune grenouille ne saute plus haut que la cinquième ligne !

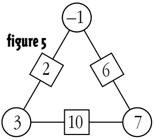
**FIGURES DE NOMBRES · QUESTION 1.** Addition élémentaire.

**QUESTION 2.**



**QUESTION 3.**

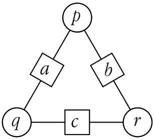



On remarque que le nombre du sommet est (1/2)(8+9−12). Il s'agit d'équations linéaires simples.

**QUESTION 4.** Il y a beaucoup de solutions ! Donnez une valeur quelconque à l'un des cercles, les autres s'en déduisent. La figure 7 est sans solutions.

**QUESTION 5.** La condition sur $p$, $q$, $r$ est qu'ils soient positifs et que ce soient les trois solutions du problème suivant :




et on remarque qu'on a :

$$a+b-c=p+q+r-q-r=p.$$

Il faut donc que :

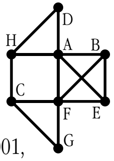
$$a+b\geq c,\quad a+c\geq b,\quad b+c\geq a,$$

mais cela signifie exactement que $a$, $b$, $c$ sont les longueurs des côtés d'un triangle.

**DU RIFIFI CHEZ LES POISSONS ROUGES • EXERCICE 1.** On prend un poisson A que l'on met dans un aquarium, et on regarde successivement où l'on peut placer les autres. 4 aquariums suffisent, mais pas 3.

**EXERCICE 3.** C'est équivalent. Chaque couleur représente un aquarium.

**EXERCICE 4.** On peut construire par exemple un graphe où les sommets sont les matières, et deux sommets sont reliés s'il y a un élève qui suit les deux matières (figure ci-contre).



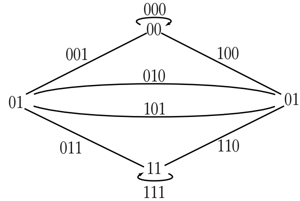

**EXERCICE 5.** (1) Pour trouver toutes les suites de longueur 3, on peut commencer par celles qui commencent par 0 : 000, 010, 001, 011 ; et pareil avec 1, au total $2^3=8$ suites de longueur 3.

(2) D'ailleurs, en général, il y a $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ suites de longueur $n$, car chaque suite est déterminée par $n$ choix entre 0 et 1. Plutôt que de vous montrer comment on peut tâtonner pour fabriquer une roue de longueur 3, je vous donne la réponse sous forme d'un mot sanscrit (la langue ancienne de l'Inde) qui permettait aux poètes de se rappeler tous les rythmes possibles avec 3 syllabes, courtes ou longues :

yamàtàràjabhànasalagàm $\longrightarrow$ 0111010001

Si vous remplacez les syllabes courtes par 0 et les syllabes longues par 1, vous obtenez 0111010001. On peut trouver dans cette suite toutes les suites de trois nombres 0 ou 1. Commencez par 011 et bougez vers la droite… d'ailleurs on remarque que les deux symboles au début et à la fin sont les mêmes : 01. On peut donc les confondre et obtenir la roue de la mémoire.

**EXERCICE 6.** On vérifie qu'en chaque sommet aboutissent deux arêtes orientées et repartent deux arêtes orientées. On peut donc appliquer le résultat des graphes eulériens : supposons par exemple qu'on parte du sommet 01. D'après la figure, on voit qu'on peut suivre le chemin formé des arcs 011, 111, 110, 101, 010, 100, 000 et 001, et on retombe sur 011. On a ainsi fait la liste des toutes les suites de longueur 3 (comme dans le mot sanscrit).




**HORLOGES À MÈCHE · QUESTION 1.** On allume en même temps une mèche à un bout et l'autre aux deux bouts ; quand la seconde est totalement brûlée, c'est qu'il s'est écoulé trente minutes (pourquoi?) et on allume l'autre bout de la première mèche : quand c'est fini, exactement 45 minutes se sont écoulées.

**QUESTION 2.** Lundi : $90 = 80 + 20/2$. Mardi : $50 = 80/2 + 20/2$. Mercredi : $60 = 80/2 + 20$. Jeudi : $70 = 80 - 20/2$ (c'est-à-dire : allumez un bout de la mèche de 80 minutes et allumez les deux bouts de la mèche de 20 minutes ; considérez uniquement l'intervalle durant lequel la grande mèche brûle après l'extinction de la petite). Vendredi : allumez un bout de la grande mèche et les deux bouts de la petite mèche ; à l'extinction de la petite mèche, la grande mèche aura encore 70 minutes ; allumez alors l'autre bout de la grande mèche. Samedi : $30=(80-20)/2$. Dimanche : pour les 35 minutes, principe similaire au vendredi, mais ne considérez que la durée durant la combustion de la grande mèche après l'extinction de la petite.

Autres durées mesurables : 10, 20, 30, 40, 50 ,60, 70, 80, 90, 100.

**QUESTIONS DE TEMPS • QUESTION 1.** Imaginez qu'il n'y ait pas de courant. Le nageur nage d'abord 15 minutes en s'éloignant du bouchon, puis se retourne donc retrouve le bouchon au bout d'un quart d'heure. En une demi-heure le bouchon a parcouru 1 kilomètre, donc la vitesse est de 2 km/h.

**QUESTION 2.** Après 4 jours l'escargot est arrivé au sommet (il fait les 3 derniers mètres en une seule fois).

**QUESTION 3.** La première moitié ou la seconde moitié (ou les deux moitiés) a été parcourue en une demi-heure.

**QUESTION 4.** Pas nécessairement ! Nous partageons le trajet en 5 portions de 4 km, numérotés 1, 2, 3, 4, 5. Supposons que Jean passe $x$ minutes sur les portions numérotées impaires, en roulant régulièrement, et $y$ minutes sur les portions numérotées paires. Il suffira de choisir $x$ et $y$ de telle façon que :

$$3x+2y<60 \quad \text{et} \quad x+y>24,$$

par exemple $x=8$ et $y=17$. Chaque portion de 8 km prendra 25 minutes.

**QUESTION 5.** Exactement à mi-chemin.

**QUESTION 6.** À un tiers et à deux tiers du parcours.

**QUESTION 7.** Après 7 tours.

**QUESTION 8.** 10 tiers de kilomètres ; calculer le temps qu'ils mettent à se rejoindre.

**LE VOYAGE AUTOUR DU MONDE • VOYAGE 1.** B C D F G H X W R S T V J K L M N P Q Z

**VOYAGE 2.** B C P N M D F K L T S R Q Z X W V J H G
B C P N M D F G H X W V J K L T S R Q Z

**VOYAGE 3.** L T S R Q Z X W V J H G B C P N M D F K
L T S R Q Z B C P N M D F G H X W V V J K
L T S R Q Z B G H X W V J K F D C P N M
L T S R Q P N M D C B Z X W V J H G F K

**VOYAGE 4.** J V T S R W X Z Q P N M L K F D C B G H
J V T S R W X H G F D C B Z Q P N M L K

Sur ce point, on pourra consulter les ouvrages suivants :

– Alain CONNES, André LICHNEROWICZ, Marcel-Paul SCHÜTZENBERGER, *Triangle de pensées*, O. Jacob, 1999 ;
– Norman BIGGS, *The Icosian Calculus of Today*, Proc. Roy. Irish Acad. 95A (1995) 23-24 ;
– André SAINTE-LAGÜE, *Avec des nombres et des lignes. Récréations mathématiques*, Vuibert, 1937, rééd. 2000.

**UNE RÉALISATION DES ÉDITIONS VUIBERT**
Éditions Vuibert, 20 rue Berbier du Mets, 75647 Paris cedex 13
Catalogue complet sur simple demande
**http://www.vuibert.fr**