

Les mathématiques grecques

david.aubin@upmc.fr

28/09/2011

maths grecques

1

Sommaire

- Le monde grec antique
- Les sources des mathématiques grecques: deux cultures mathématiques?
- Trois époques des mathématiques antiques
 - Les présocratiques (Thalès, Pythagore, les Eléates).
 - Les mathématiques platonicienne et euclidiennes.
 - Mathématiques et astronomie au début de l'ère chrétienne (Ptolémée).

28/09/2011

maths grecques

2

Le monde grec antique



28/09/2011

maths grecques

3

Alexandrie vers 300 av. J.-C.

- Fondée par Alexandre vers –331.
- Capitale de l'Égypte sous Ptolémée, après la mort d'Alexandre en –323.
- Ville grecque en Égypte
 - « Tout ce qui peut exister ou se produire sur terre, on le trouve en Égypte: fortune, sport, pouvoir, ciel bleu, gloire, spectacles, philosophes, or fin, jolis garçons, temples des Dieux adelphe, le roi qui est si bon, Musée, vin, toutes les bonnes choses dont on peut avoir envie, et des femmes, tant de femmes » (Hérodote, *Mémoires* 1, 26 sq. [3^e s. av. J.-C.]).
- Le Musée et la bibliothèque.
 - Situé en dehors, mais proche de la ville. Salle ouverte garnie de sièges; déambulatoire; une salle à manger et dépendances. Le directeur du Musée était un grand prêtre desservant les Muses ou Sérapis.
 - Athénée (né vers 170 ap. J.-C.): « Dans l'Égypte peuplée, on engraisse des scribes, grands amateurs de grimoires, qui se livrent à des querelles interminables dans les volières des Muses ».
- Euclide: *Les Éléments* (vers –300): un des plus anciens traités de maths qui nous soit parvenu: d'où vient-il?

28/09/2011

maths grecques

4

Les sources des mathématiques grecques

- Très peu de source papyriques:
 - Les maths grecques sont, en un sens, moins bien connues que les maths babyloniennes!
- 1. Les traités transmis jusqu'à nous.
- 2. Les « histoires » fragmentaires.
- 3. Autres écrits:
 - œuvre épistémologique (Platon et Aristote);
 - écrits antiphilosophiques (Sceptiques, Epicuriens, etc.);
 - témoignages variés.

28/09/2011

maths grecques

5

Traité mathématiques grecs transmis: les « grands » auteurs

- Euclide (–3^e s.): 8 traités.
 - *Éléments*; *Données*; *Division des figures*; *Phénomènes*; *Division du canon*; *Optique*; *Catoptrique*; *Fragments « mécaniques »*.
- Archimède (–3^e s.): 13 traités.
 - Dont *Sphère et cylindre*; *Mesure du cercle*; *Quadrature de la parabole*; *Spirales*; *Arénaire*; *Corps flottants*, etc.
- Apollonius (–3^e s.): 2 traités dont *Coniques*.
- Héron (+1^{er} s.): 10 traités (surtout mécanique).
- Ptolémée (+1^{er} s.): 9 traités.
 - Dont *Almageste*; *Tétrabiblos*; *Géographie*.
- Diophante (+3^e s.): 2 traités dont *Arithmétiques*.
- Pappus (+4^e s.): 1 traité et 2 commentaires (Euclide et Ptolémée).

28/09/2011

maths grecques

6

Traité mathématiques grecs transmis

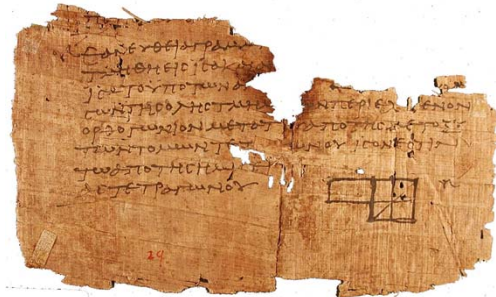
- La « petite » astronomie.
 - Autolycos; Euclide (*Phénomènes*); Aristarque (*Sur les grandeurs et les distances du soleil et de la lune*); Hypiclès; Théodose; Ménélaus.
- Traités introductifs néo-pythagoricien et néo-platoniciens
 - Nicomaque (*Arithmétique; Harmonie*); Théon de Smyrne; Porphyre; Jamblique; Théon d'Alexandrie; Proclus; Marinus; Dominos; Asclépios.
- Textes isolés:
 - Aratos (*Phénomène*); Philon; Dioclès; Hypiclès (*Livre XIV d'Euclide*); Hipparque; Geminus; Diophane; Sérénus; Cléomède; Jean Philopon; Anthémios; Eutocius.
- Anonymes:
 - Commentaire Almageste (+3^e s.); Intro Almageste (+6^e s.); Livre XV d'Euclide.

28/09/2011

maths grecques

7

Le plus vieux diagramme d'Euclide (II; 5), env. 75–125 (ap. J.-C.)



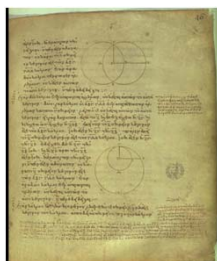
28/09/2011

maths grecques

8

Manuscrits complets des Éléments d'Euclide (9^e siècle)

Bodleian, Oxford



28/09/2011

maths grecques

9

Bibliothèque du Vatican



Eudème de Rhodes

- Disciple d'Aristote, 1^{re} génération.
- Auteur d'*Histoires de l'Arithmétique*, de la *Géométrie*, et de l'*Astrologie*, perdues.
- Des fragments (cf. in Proclus).

« Puisqu'il faut examiner les débuts des arts et des sciences pour la période présente, nous disons que la géométrie a été découverte pour la première fois chez les Égyptiens, comme cela a été rapporté par beaucoup, **prenant son origine dans la mesure des terrains**. Celle-ci en effet leur était nécessaire pour cause de l'élévation du Nil qui rendait invisibles les bornes des propriétés de chacun d'eux.

« Et il n'y a rien d'étonnant à ce que la découverte de cette science et des autres ait pris son origine dans les besoins, car tout ce qui est soumis à la génération s'élève **de l'inachèvement à la perfection**. Et donc, de la perception au raisonnement et de celui-ci à l'intelligence, la transition se produit raisonnablement... »

28/09/2011

maths grecques

10

Eudème (suite)

- « De même que c'est assurément chez les Phéniciens, à cause **du commerce maritime et des contrats**, que la connaissance précise des nombres a débuté [...]. »
- « Et Thalès, le premier, étant **allé en Égypte**, en rapportant cette étude en Hellade et, d'une part, lui-même trouva beaucoup de choses, d'autre part, il indique le point de départ de beaucoup d'autres à ses successeurs [...]. »
- « Après ceux-ci [Mamercos et Hippias d'Élis], Pythagore transforma l'étude de la géométrie en un **schéma d'éducation libérales**, en reprenant l'**examen des principes** de celle-ci et en explorant les théorèmes immatériellement et intellectuellement; et c'est lui qui découvrit l'**étude des irrationnelles et la construction des figures cosmiques**. »

28/09/2011

maths grecques

11

Les mathématiques grecques

- Une construction idéologique
 - Mathématiques pratiques chez les Barbares.
 - Liées à la naissance de la « philosophie » chez les Grecs.
 - Désintéressement; déduction; démonstration, etc.
- Trois écoles (plus une):
 - École de Milet (aujourd'hui en Turquie)
 - École de Crotone (aujourd'hui en Italie)
 - (l'École d'Élée [Italie]).
 - École d'Athènes (aujourd'hui en Grèce).

28/09/2011

maths grecques

12

Deux cultures mathématiques?

- Les traités = un « iceberg »?
- Mathématiques pratiques:
 - L'abaque occidental = les « calculateurs ».
 - Des professionnels (commerce, construction, etc.)
 - Archéologie, témoignages, dans les traités néo-pythagoriciens (Nicomaque, Jamblique)
 - Les « arpenteurs »: les « tireurs de corde »
 - Mesure d'aires et de volumes
 - Des papyrus, mais totalement absents les traités mathématiques.

28/09/2011

maths grecques

13

Le papyrus de Vienne

- « A propos des pierres et des choses nécessaire à la construction d'une maison, tu mesureras le volume selon les règles du géomètre comme suit: la pierre a 5 pieds partout. Fais 5×5 ! Cela fait 25. Il s'agit de l'aire de la surface. Multiplie ceci par 5 pour la hauteur. Cela fait 125. La pierre aura autant de pieds et est appelée cube. »

28/09/2011

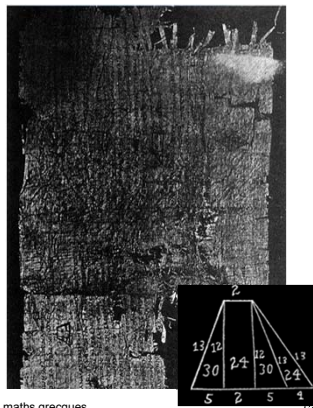
maths grecques

14

Calcul de l'aire d'un trapèze (Papyrus d'Ayer à Chicago)

« Soit donné un trapèzoïde scalène tel que celui dessiné plus bas, selon les conditions du problème, le 13 au carré égale 169, et le 15 au carré égale 225. Retirer le 169; le reste est 56. Retirer le 2 du côté supérieur du 16 de la base; le reste est 14. Prendre $\frac{1}{14}$ de 56; c'est 4. Cela retiré du 14 laisse 10. La moitié de ceci laisse 5. La moitié de ceci égale 5. Ceci au carré égale 25. Retirer ceci du 169; le reste est 144, dont la racine est 12. Ceci par le 5 de la base égale 60, dont la moitié est 30; de tant d'acres est la surface de chacun des triangles rectangles. Et le 12 par le 2 du côté supérieur égale 24, de tant d'acres est le rectangle intérieur. Et le 12 multiplié par le 4 de la base égale 48; dont la moitié est 24; de tant d'acres est le triangle obtusangle. Suit la figure: »

Edgar J. Goodspeed, "The Ayer Papyrus," *The American Mathematical Monthly*, Vol. 10, No. 5 (May, 1903), pp.133-135.



28/09/2011

maths grecques

Platon, *Philèbe*

« Ne doit-on pas reconnaître qu'il y a une arithmétique pour le vulgaire et une autre propre aux philosophes ? [...] Car les uns font entrer dans le même calcul des unités numériques inégales, par exemple, deux armées, deux boeufs, les deux unités les plus petites et les deux unités les plus grandes de toutes, tandis que les autres refusent de les suivre, si l'on n'admet pas que, dans le nombre infini des unités, il n'y a aucune unité qui diffère d'aucune autre unité [...] L'art de calculer et de mesurer dans l'architecture et le commerce ne diffère-t-il pas de la géométrie et des calculs qu'élaborent les philosophes ? »

28/09/2011

maths grecques

16

Pratique vs. théorique

Énoncés algorithmiques = des « recettes ».	Énoncés démonstratifs = des « preuves » qui n'expliquent pas comment on la trouve.
Liés à des activités pratiques et commerciales.	Liés à la philosophie. Désintéressés: un outil de « distinction » sociale?
Hérités des traditions moyen-orientales (babyloniennes et égyptiennes).	Originaux à la « Grèce » antique: nés à Athènes, chez Thalès ou Pythagore?
Institutionnalisés: des traditions corporatives.	Peu ou pas institutionnalisés? Communication passant par l'écrit; enseignement classique basique.
Des figures géométriques utilisant les lettres; Un langage standardisé et impersonnel; Des mots et procédures communes.	

28/09/2011

maths grecques

17

La machine d'Anticythère

- Datée de – 150 à – 100 env.
- Découverte en 1900, aujourd'hui au Musée archéologique d'Athènes.
- Une machine sophistiquée pour calculer le mouvement des planètes de manière analogique.
 - Plus de 30 roues dentées en bronze.
 - Un modèle des cycles solaires et lunaires selon Hipparque?
- <http://www.antikythera-mechanism.gr/>



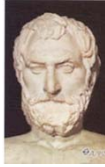
28/09/2011

maths grecques

18

Présocratiques – 1 L'école de Milet

- **Thalès** (v. –625 à v. –547)
 - Éclipse de Soleil de mai 585.
 - 5 théorèmes de géométrie.
 - La hauteur de la pyramide.
 - « Tout est eau. »
- **Anaximandre** (v. –610 à v. –545)
 - Astronomie:
 - la sphère, le gnomon.



28/09/2011

maths gre

19

Les 5 théorèmes de Thalès

- 1) Un cercle est bissecté par tout diamètre.
- 2) Les angles sur la base d'un triangle isocèle sont égaux.
- 3) Les angles entre deux droites qui se coupent sont égaux.
- 4) Deux triangles sont semblables s'ils ont deux angles et un côté égaux.
- 5) Un angle dans un demi cercle est droit.

28/09/2011

maths grecques

20

Présocratiques – 2 L'école de Crotone

- **Pythagore** (v. –560 à v. –480).



Détail de l'École d'Athènes de Raphaël



Manuscrit médiéval

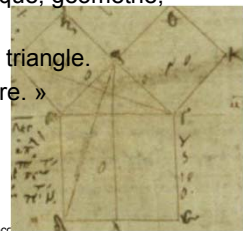
28/09/2011

maths grecques

21

Les pythagoriciens

- Les nombres comme base de la philosophie.
- Les rapports harmonieux.
- La quadrivium: arithmétique, géométrie, astronomie, musique.
- Somme des angles d'un triangle.
- « Théorème de Pythagore. »
- L'irrationnel.
- Les 5 solides réguliers.



28/09/2011

maths grecques

22

La Musique comme mathématique



L'Unisson est entre 1, & 1.
L'Octave est entre 2, & 1.
La quinte entre 3, & 2.
La quarte entre 4, & 3.
La tierce majeure entre 5, & 4.
La tierce mineure entre 6, & 5.

— Marin Mersenne, *La Vérité des sciences* (1625).

- Leçon de musique : professeur (droite, inscription : ΣΜΙΚΥΔΟΣ) et son élève (gauche, ΕΥΔΥΜΙΔΕΣ). Entre les deux, un jeune homme (ΤΑΛΕΜΠΟΜΕΝΟΣ) déclame des vers. Hydrie attique à figures rouges, v. 510 av. J.-C. Provenance : Vulci.

- Le problème de la gamme.
- Gamme « pythagoricienne » : 12 quintes $\approx$ 7 octaves. $0,007707... \approx 0,0078125$.

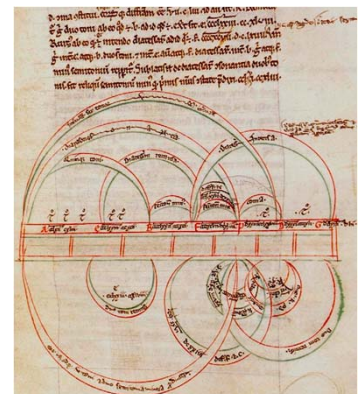
28/09/2011

maths grecques

23

Boèce, *Traité de musique* (6^e siècle)

Copie manuscrite du 12^e siècle. Bodleian Library, Oxford.



28/09/2011

maths grecques

24

Présocratiques – 3

L'école d'Elée

- **Parménide** (v. -544 à 450) • Monisme.
 - Tout est un.
 - Négation du non-être.
 - Négation du mouvement.
- **Zénon** (v. -490 à -425).
 - « S'il est, chaque un doit avoir une certaine grandeur et une certaine épaisseur et doit être à une certaine distance de l'autre, et la même chose peut être dite de ce qui est devant lui ; car celui-ci aussi aura une grandeur, et quelque chose sera devant lui. C'est la même chose de dire cela une fois et de le dire toujours ; car aucune partie de lui ne sera la dernière et il n'est chose qui ne puisse être comparée à une autre.
 - Donc, si les choses sont une pluralité, elles doivent être à la fois grandes et petites, petites au point de ne pas avoir de grandeur du tout ; et grandes au point d'être infinies. »
 - Simplicius, *Sur la physique*.
- **Les paradoxes de Zénon.**
 - Chez Aristote, *La Physique*, IV.
 - La dichotomie
 - L'Achille
 - La flèche
 - Le stade.

28/09/2011

maths grecques

25

Éviter l'infini?

Paradoxe d'Achille (et la tortue), selon Aristote, *Physique*:

« le plus lent à la course ne sera jamais rattrapé par le plus rapide; car celui qui poursuit doit toujours commencer par atteindre le point d'où est parti le fuyard, de sorte que le plus lent a toujours quelque avance. »

« le raisonnement de Zénon suppose à tort que les infinis ne peuvent être parcourus ou touchés chacun successivement en un temps fini. En effet la longueur et le temps, et en général tout continu, sont dits infinis en deux acceptions, soit en division, soit aux extrémités. »

1. « nul continu n'est sans partie. »
2. « L'infini se trouve donc être le contraire de ce qu'on dit: en effet, non pas ce en dehors de quoi il n'y a rien, mais ce en dehors de quoi il y a toujours quelque chose, voilà l'infini. »

28/09/2011

maths grecques

26

Platon et Euclide

1 – À Athènes

- **Anaxagore** (-499 à -428)
 - La philosophie à Athènes.
 - Explication des éclipses
 - Quadrature du cercle.
- **Socrate** (-470 à -399).
- **Platon** (-427 à -347).
 - Le *Timée*.
 - L'Académie.
 - « Que nul n'y entre s'il n'est géomètre » (*αγεωμετρητος*).



28/09/2011

math

Platon (428-348 av. J.-C.)

« **Platon** pose alors ce problème aux mathématiciens: Quels sont les mouvements circulaires uniformes et parfaitement réguliers qu'il convient de prendre pour hypothèses, afin que l'on puisse **sauver les apparences** que les astres errants présentent? »

-- Simplicius, *Commentaire à la Physique d'Aristote*.

- **Le *Timée***
 - *origine de l'univers, de l'homme et de la société*
 - *explication scientifique: une méthode, un outil*
- **Notion de « paradigme »**

28/09/2011

maths grecques

28

Platon, le *Timée*

Le Cercle:

Quant à sa figure, il lui a donné celle qui lui convient le mieux et qui a de l'affinité avec lui. Or, au Vivant qui doit envelopper en lui-même tous les vivants, la figure qui convient est celle qui comprend en elle-même toutes les figures possibles. C'est pourquoi le Dieu a tourné le Monde en forme sphérique et circulaire, les distances étant partout égales, depuis le centre jusqu'aux extrémités. C'est là de toutes les figures la plus parfaite et la plus complètement semblable à elle-même. En effet, le Dieu pensait que le semblable est mille fois plus beau que le dissemblable (...).

Je veux dire, afin que le Monde fût aussi semblable que possible au Vivant parfait et intelligible et pour imiter la substance éternelle.

28/09/2011

maths grecques

29

Les élèves de Platon

- **Aristote** (-384 à 322).
- **Théète** (-417 à -369).
 - Théorie des irrationnels.
- **Eudoxe** (-408 à -355).
 - Sphères concentriques en cosmologie.
 - Théorie des proportions.
 - Méthode d'exhaustion.

28/09/2011

maths grecques

30

Euclide (vers –325 à v. –265)

- Presque rien n'est connu à son propos:
 - la meilleure source = les *Eléments*.
- Un peu plus jeune que les élèves de Platon.
 - Aurait été en contact avec l'Académie et la géométrie d'Eudoxe.
- Deux anecdotes le mentionnant:
 - Archimède : épisode célèbre dans lequel Ptolémée lui demande s'il n'existe pas une façon plus rapide d'étudier la géométrie que les *Eléments*, et on lui répond qu'il n'y a pas de « voie royale » pour la géométrie.
 - Stobée (V^e s.) rapporte qu'un étudiant ayant commencé à apprendre la géométrie avec Euclide lorsqu'il a appris son premier théorème demande : « Qu'est-ce que ça va me rapporter d'apprendre cela ? » Euclide demande alors à son esclave de lui donner une obole « puisque ce qu'il apprend doit lui rapporter quelque chose ».

28/09/2011

maths grecques

31

Euclide (2)

- Autre livres d'Euclide :
 - *Données* (94 propositions): les propriétés d'une figure pouvant être déduites d'autres propriétés données.
 - *Sur les divisions*: comment diviser une figure en deux parties d'aires égales.
 - *Optique*: premier ouvrage grec sur la perspective.
 - *Les Phénomènes*, introduction élémentaire à l'astronomie mathématique.
- Livres d'Euclide qui ont été perdus:
 - *Lieux de Surface* (deux livres), *Porismes* (3 livres), *Coniques* (4 livres), *Livre des « Fallacies »* et *Eléments de Musique*.

28/09/2011

maths grecques

32

Euclide, *Les Eléments* (1)

- Compilation d'anciens résultats dont peut-être aucun n'est original. L'organisation, elle, l'est sans aucun doute. ≠ l'ensemble des connaissances de l'époque!
- Les 13 « livres » des *Eléments*.
 - I à VI: les « livres plans » = géométrie plane
 - sf Livre V: les rapports et proportions.
 - VII à IX: les « nombres »
 - définitions regroupées au début du livre VII.
 - X: le plus long et le plus difficile sur l'incommensurabilité.
 - les irrationnels de Theaetatus, la théorie des proportions d'Eudoxe.
 - XI à XIII: livres « sur les solides ».
 - définitions au début du livre XI.
 - les cinq solides platoniciens (cf. *Le Timée*)

28/09/2011

maths grecques

33

Les cinq solides platoniciens

tétraèdre	4 triangles	
cube	6 carrés	
octaèdre	8 triangles	
dodécaèdre	12 pentagones	
icosaèdre	20 triangles	

28/09/2011

maths grecques

34