
Formulaire - Mathématiques

Version 1.0

11 janvier 2025

Mathématiques - Seconde - Première - Terminale - Voie Générale

1	Calculs de dérivées	2
1.1	Fonctions de référence	2
1.2	Opérations sur les fonctions dérivables	3
1.3	Dérivées de fonctions composées	3
2	Calculs de primitives	4
2.1	Fonctions de référence	4
2.2	Primitives et opérations sur les fonctions	4
2.3	Primitives de fonctions composées	5
2.4	Primitives et fonctions affines	5
3	Trigonométrie	6
3.1	Cercle trigonométrique	6
3.2	Formules trigonométriques	6
4	Exponentielle et logarithme népérien	8
4.1	Fonction exponentielle	8
4.2	Fonction logarithme népérien	8
5	Limites de suites	9
5.1	Suites arithmétiques et géométriques	9
5.2	Suites numériques usuelles	9
6	Limites de fonctions	10
6.1	Fonctions exponentielle et logarithme népérien	10
6.2	Fonctions usuelles	10
7	Nombres complexes	11
7.1	Nombres complexes conjugués	11
7.2	Forme trigonométrique et forme exponentielle	11
7.3	Racines n-ièmes d'un complexe	12

Chapitre 1

Calculs de dérivées

1.1 Fonctions de référence

- Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et f' sa dérivée définie sur l'ensemble $D_{f'}$.
- k, m, p sont des constantes réelles, α est un réel strictement positif, n est un entier relatif non nul.

Fonction f	Domaine de définition D_f	Domaine de dérivabilité $D_{f'}$	Fonction dérivée f'
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$\mathbb{R}$ si $n > 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$]0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x $	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ +1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \alpha^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ln(\alpha) \times \alpha^x$
$f(x) = \ln(x)$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$f'(x) = \tan(x)^2 + 1$

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

- Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Fonction f	Remarque	Fonction dérivée f'
$f = u + v$		$f' = u' + v'$
$f = k \times u$	k est une constante réelle	$f' = k \times u'$
$f = u \times v$		$f' = u'v + uv'$
$f = \frac{1}{u}$	u ne s'annule par sur I	$f' = -\frac{u'}{u^2}$
$f = \frac{u}{v}$	v ne s'annule par sur I	$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$f = v \circ u$		$f' = u' \times (v' \circ u)$

1.3 Dérivées de fonctions composées

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .
- Soit m et p deux constantes réelles.

Fonction f	Remarque	Fonction dérivée f'
$f(x) = e^{u(x)}$		$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = u(x)^n$	• $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq 0$ • $u(x) \neq 0$ si $n < 0$	$f'(x) = n \times u'(x) \times u(x)^{n-1}$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = \cos[u(x)]$		$f'(x) = -u'(x) \times \sin[u(x)]$
$f(x) = \sin[u(x)]$		$f'(x) = u'(x) \times \cos[u(x)]$
$f(x) = u(mx + p)$		$f'(x) = m \times u'(mx + p)$

Calculs de primitives

2.1 Fonctions de référence

- f désigne une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
- F désigne une primitive de la fonction f définie sur un intervalle d'intégration I .
- a est une constante réelle, n est un entier relatif différent de 0 et de -1 , α est un réel strictement positif.

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$	• $\mathbb{R}$ si $n > 0$ • $\mathbb{R}^*$ si $n < -1$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \alpha^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{\alpha^x}{\ln(\alpha)}$

2.2 Primitives et opérations sur les fonctions

- Soit f et g deux fonctions admettant respectivement F et G comme primitives sur un intervalle I .
- Soit k une constante réelle, alors : $\left\{ \begin{array}{l} \bullet F + G \text{ est une primitive de } f + g \text{ sur l'intervalle } I \\ \bullet k \times F \text{ est une primitive de } k \times f \text{ sur l'intervalle } I \end{array} \right.$

2.3 Primitives de fonctions composées

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- n est un entier relatif avec $n \neq -1$.

Fonction f	Remarque	Primitive F
$f = u' u^n$	si $n < -1$, alors : $u(x) \neq 0$ pour tout x de I	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = \frac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I	$F = -\frac{1}{u}$
$f = \frac{u'}{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$ ou $u(x) < 0$ pour tout $x \in I$	$F = \ln(u)$
$f = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I	$F = \sqrt{u}$
$f = u' e^u$		$F = e^u$
$f = (v' \circ u) \times u'$	v est une fonction dérivable sur J et $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$	$F = v \circ u$

2.4 Primitives et fonctions affines

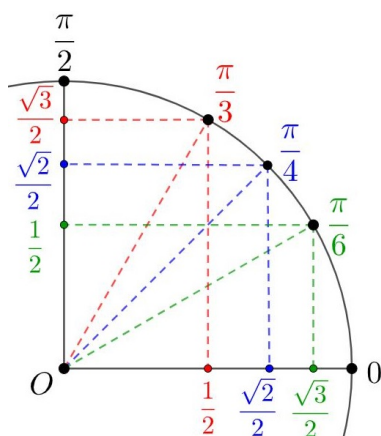
- Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$:

Fonction f	Remarque	Primitive F
$f(x) = \frac{1}{ax+b}$	si $ax+b \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$
$f(x) = e^{ax+b}$		$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b}$
$f(x) = \cos(ax+b)$		$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)$		$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$

Chapitre 3

Trigonométrie

3.1 Cercle trigonométrique



Angle α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle α (degré)	0	30	45	60	90
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3.2 Formules trigonométriques

Théorème 3.2.1 (Équations dans $\mathbb{R}$)

Soit α un réel, on a les équivalences suivantes :

$$\bullet \cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \bullet \sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Théorème 3.2.2

- Pour tout réel α et tout entier relatif k , on a : $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$, $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$
- Pour tout réel α , on a : $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$, $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$, $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$

Théorème 3.2.3 (Autres propriétés)

Soit α un réel, on a :

$$\begin{array}{l} \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \\ \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \end{array}$$

Théorème 3.2.4 (Passage d'un cosinus à un sinus)

Soit α un réel, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

Théorème 3.2.5 (Formules d'addition)

Soit a et b deux réels, on a :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Théorème 3.2.6 (Formules de duplication)

Soit α un réel on a :

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = 2\cos(\alpha)^2 - 1 = 1 - 2\sin(\alpha)^2 \quad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha)^2 = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin(\alpha)^2 = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

Chapitre 4

Exponentielle et logarithme népérien

4.1 Fonction exponentielle

Théorème 4.1.1 (Relations algébriques)

- Soit x et y deux réels et n un entier relatif :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{nx} = (e^x)^n$$

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e$$

Théorème 4.1.2

- Soit x et y deux réels :

- $e^x > 0$ pour tout réel x .
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$, en particulier : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
- $e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y$, en particulier : $e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$.
- $e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$, en particulier : $e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

4.2 Fonction logarithme népérien

Théorème 4.2.1 (Relations algébriques)

- Soit x et y deux réels strictement positifs et n un entier relatif : $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$:

$$e^{\ln(x)} = x$$

$$\ln(e^x) = x$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^n) = n \times \ln(x)$$

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$$

Théorème 4.2.2

- Soit x et y deux réels strictement positifs :

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) \leq \ln(y) \Leftrightarrow 0 < x \leq y$ • $\ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1]$ • $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$

Chapitre 5

Limites de suites

5.1 Suites arithmétiques et géométriques

Théorème 5.1.1 (Suites arithmétiques)

- Soit (u_n) une suite arithmétique, soit n et k deux entiers naturels :

$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{n+k} = \frac{(n+1)(u_k + u_{k+n})}{2}$$

Théorème 5.1.2 (Suite géométrique de la forme (q^n))

- Soit q un réel :
 - si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.
 - si $-1 < q < 1$ alors la suite (q^n) converge vers 0.
 - si $q = 1$ alors la suite (q^n) converge vers 1.
 - si $q > 1$ alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

Théorème 5.1.3 (Suites géométriques)

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et soit n et k deux entiers naturels :

$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{n+k} = u_k \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

5.2 Suites numériques usuelles

Théorème 5.2.1

- Soit k un entier naturel non nul :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$$

Chapitre 6

Limites de fonctions

6.1 Fonctions exponentielle et logarithme népérien

Théorème 6.1.1 (Fonction exponentielle)

- Soit n un entier naturel :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Théorème 6.1.2 (Fonction logarithme népérien)

- Soit n un entier naturel :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

6.2 Fonctions usuelles

Théorème 6.2.1

- Soit n un entier naturel non nul et soit a un réel :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

- Si n est pair, alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$

- Si n est impair, alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$

Chapitre 7

Nombres complexes

7.1 Nombres complexes conjugués

Définition 7.1.1

- Soit $z = x + iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- Les nombres complexes $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$ sont dits conjugués.

Théorème 7.1.1

- Soit z et z' deux nombres complexes avec $z = x + iy$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{l} \boxed{\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}} \quad \boxed{\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}} \quad \boxed{\text{si } z' \neq 0 : \left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}} \quad \boxed{Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}} \quad \boxed{Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}} \\ \boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \boxed{|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0} \quad \boxed{|z + z'| \leq |z| + |z'|} \quad \boxed{|zz'| = |z| \times |z'|} \\ \boxed{\text{si } z' \neq 0 \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}} \end{array}$$

7.2 Forme trigonométrique et forme exponentielle

Théorème 7.2.1

- Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \neq 0$, on pose $\theta = \arg(z)$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:
- On a : $\boxed{\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$, $\boxed{\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$, $\boxed{z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}}$.
- Soit $z' \in \mathbb{C}$: $\boxed{\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]}$, $\boxed{\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]}$
- $\boxed{e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}}$, $\boxed{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}}$.

Théorème 7.2.2

- **Formule de Moivre :** $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
- **Formules d'Euler :** $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

7.3 Racines n-ièmes d'un complexe

Théorème 7.3.1

- Soit $A = re^{i\alpha}$ avec $A \neq 0$.
- Les n racines n -ièmes de A sont les : $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

Théorème 7.3.2 (Racines n-ièmes de l'unité)

- Les n racines n -ièmes de l'unité sont les : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.