
QUESTIONS
ET CORRIGÉS DÉTAILLÉS
DU CONCOURS DE MATHS
POUR L'ENTRÉE EN ÉCOLE DE
MÉDECINE / DENTISTERIE

Belgique – Septembre 2024

Corrections rédigées par Laurent HARDY ©

Diffusion libre / merci de citer la source en échange de la gratuité et du travail effectué !

Question 1

Étant donné la fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \ln(x^2 + 3)$$

On considère la fonction g définie par

$$g(x) = f(x - 1)$$

Sur quelles parties de la droite réelle la fonction g est-elle strictement décroissante ?

- A. $] -\infty; -3[$
- B. $] -\infty; 1[$
- C. $] -3; 1[$
- D. $]1; +\infty[$

[Correction détaillée](#)

Question 2

Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est équivalente à $\cos^4(x) - \sin^4(x)$ pour tout x réel ?

- A. $\cos(2x)$
- B. $\cos^2(x)$
- C. $\cos^2(2x)$
- D. $2 \cos^2(x)$

[Correction détaillée](#)

Question 3

Étant donné un paramètre β réel, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \beta x + \beta y = 1 \\ 1 + \beta y = 1 \end{cases}$$

Où x et y sont les inconnues.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

- A. Le système admet plusieurs solutions quel que soit β
- B. Le système admet une solution unique quel que soit β
- C. Le système n'admet pas de solutions quel que soit β
- D. Le système n'admet pas de solution pour certaine(s) valeur(s) de β uniquement

Correction détaillée

Question 4

On considère l'expression $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

Parmi les quatre expressions suivantes, quelle est celle qui est équivalente à celle donnée ci-dessus ?

- A. 1
- B. $\frac{2|a|}{\sqrt{a^2-b^2}}$
- C. $\frac{2|b|}{\sqrt{a^2-b^2}}$
- D. $\sqrt{2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$

Correction détaillée

Question 5

Que vaut l'expression

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{x^3+27} \right)^{\frac{1}{3}}$$

- A. $-3^{\frac{1}{3}}$
- B. $1/3$
- C. $\sqrt[3]{3}$
- D. 3

Correction détaillée

Question 6

Un triangle rectangle définit une aire de $200\sqrt{3} \text{ cm}^2$ et un de ses angles a une amplitude de 30° .

Quelle est la longueur (en cm) de son hypoténuse.

- A. 40
- B. 50
- C. $50\sqrt{2}$
- D. $100\sqrt{3}$

[Correction détaillée](#)**Question 7**

Étant donné un nombre réel x , on considère les deux séries statistiques suivantes :

Série 1 : $x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2$

Série 2 : $x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4$

Parmi les propositions suivantes concernant les deux séries, laquelle est vraie ?

- A. Il est impossible de comparer les écarts-type des deux séries sans connaître x
- B. L'écart-type de la série 1 est identique à celui de la série 2.
- C. L'écart-type de la série 1 est plus grand que celui de la série 2.
- D. L'écart-type de la série 1 est plus petit que celui de la série 2.

[Correction détaillée](#)

Question 8

Que vaut

$$\int e^{-2\ln(x)} \ln(x) dx$$

à une constante additive près ?

- A. $\frac{1}{x^2}$
- B. $(\ln(x))^2$
- C. $-\frac{\ln(x^2)}{2x^2} - \frac{1}{2x^2}$
- D. $-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$

[Correction détaillée](#)

Question 9

On considère le cosinus et le sinus d'un angle $\alpha \in]\frac{3\pi}{2} ; \frac{7\pi}{4}[$ en radian

Laquelle des combinaisons d'inégalités suivantes est correcte ?

- A. $\cos(\alpha) < 0$ et $|\sin(\alpha)| < |\cos(\alpha)|$
- B. $\cos(\alpha) < 0$ et $|\sin(\alpha)| > |\cos(\alpha)|$
- C. $\sin(\alpha) < 0$ et $|\sin(\alpha)| < |\cos(\alpha)|$
- D. $\sin(\alpha) < 0$ et $|\sin(\alpha)| > |\cos(\alpha)|$

[Correction détaillée](#)

Question 10

Dans un plan muni d'un repère cartésien Oxy on considère la droite d passant par le point $(1; 5)$ et parallèle à la droite passant par les points $(0; 240)$ et $(120; 0)$.

Quelle est l'abscisse de l'intersection entre la droite d et l'axe Ox ?

- A. $14/4$
- B. $9/2$
- C. $22/4$
- D. $13/2$

[Correction détaillée](#)

CORRECTIONS DÉTAILLÉES

Correction Question 1

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \ln(x^2 + 3)$$

et la fonction g définie par

$$g(x) = f(x - 1)$$

On cherche sur quelles parties de la droite réelle la fonction g est-elle strictement décroissante ?

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(x^2 + 3) &\Rightarrow g(x) = f(x - 1) = \ln((x - 1)^2 + 3) = \ln(x^2 - 2x + 1 + 3) \\ &\Rightarrow g(x) = \ln(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

« $g(x)$ strictement décroissante » veut dire « dérivée première ($g'(x)$) strictement négative ».

On calcule la dérivée première : $g'(x) = (\ln(x^2 - 2x + 4))' = \frac{2x-2}{x^2-2x+4}$

Avant de procéder à l'étude de signe, on détermine si le dénominateur a des racines :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$$

- Le trinôme du dénominateur n'a pas de racine. De plus, le coefficient du second degré vaut 1, donc positif, donc le trinôme est toujours positif et la parabole qui le représente est convexe !

On fait l'étude de signe :

	< 1	1	> 1
$2x - 2$	-	0	+
$x^2 - 2x + 4$	+	+	+
$g'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+4}$	-	0	+

La dérivée première est donc strictement négative sur $] - \infty; 1[$, donc $g(x)$ strictement décroissante sur $] - \infty; 1[$

La bonne réponse est donc la réponse B

[Retour énoncé](#)

Correction Question 2

$\cos^4(x) - \sin^4(x)$ est une différence de deux carrés.

On rappelle : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; donc $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$.

Ici : $\cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x))(\cos^2(x) - \sin^2(x))$

Or, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Donc, $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Et $\cos^2(x) - \sin^2(x)$ fait partie des formules à connaître sur le bout des doigts pour le concours afin de ne pas perdre de temps à la retrouver : **$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$**

La bonne réponse est donc la réponse A

[Retour énoncé](#)

Correction Question 3

Chaque équation d'un système de deux équations à deux inconnues, représente une droite. Un système représente donc 2 droites. Dans le meilleur des cas, deux droites se coupent en UN point et bien sûr pas deux. Donc un tel système ne peut JAMAIS mener à plusieurs solutions, cela n'a aucun sens. Il se pourrait alors que 2 droites soient confondues et on aurait alors une infinité de solution, mais cela ne serait potentiellement vrai que pour une valeur spécifique de β , et sûrement pas "quelle que soit la valeur de β " → On élimine la réponse A automatiquement.

$$\begin{cases} \beta x + \beta y = 1 & (1) \\ 1 + \beta y = 1 & (2) \end{cases}$$

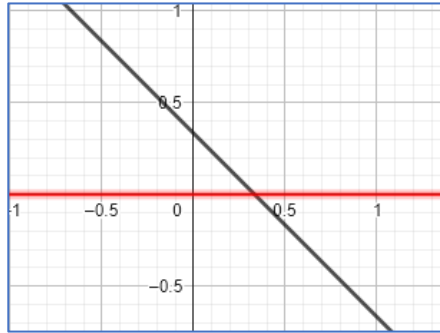
Dans l'équation (2), on est parfaitement autorisé à soustraire 1 de chaque côté :

- $1 + \beta y = 1 \Leftrightarrow \beta y = 0$. On peut diviser par β **SAUF si $\beta = 0$! (interdit de diviser par 0 !)**
- Si $\beta \neq 0$ alors $y = 0$
- $\beta x + \beta y = 1 \Leftrightarrow \beta x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\beta}$

Il y a donc toujours une solution SAUF pour $\beta = 0$. Dit autrement, le système n'admet pas de solution pour une certaine valeur de β (0 en l'occurrence)

La bonne réponse est donc la réponse D

Visuellement, voici par exemple la solution pour $\beta = 3$:



[Retour énoncé](#)

Correction Question 4

Je ne le répéterai jamais assez : dans ce genre d'exercice, l'erreur proviendra généralement d'une erreur de recopiage suite à la lourdeur d'écriture. Mon conseil est de simplifier l'écriture d'entrée de jeu en posant des expressions pour alléger l'écriture et seulement à la fin, vous redonnez leur valeur à ces expressions.

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

Posons : $\alpha = a + b$ et $\beta = a - b$

L'expression se simplifie donc :

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Comme toujours pour ce genre de question, on utilise l'identité triviale : $|x| = \sqrt{x^2}$

Adapté ici, cela donne :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \alpha}}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha\beta} + 2\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta}{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta}} = \frac{|\alpha + \beta|}{\sqrt{\alpha\beta}} \end{aligned}$$

Et seulement à présent, on réattribue les valeurs de α et β !

$$|\alpha + \beta| = |a + b + a - b| = |2a|$$

Et

$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Au final :

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{|2a|}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

La bonne réponse est donc la réponse B

Une lectrice attentive m'a fait remarquer qu'on peut aussi résoudre cette question plus simplement par la méthode des binômes conjugués :

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)}} + \sqrt{\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a+b)}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2}} + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2}} \dots$$

Que je vous laisse finie et on arrive bien sûr à la même réponse !

[Retour énoncé](#)

Correction Question 5

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{x^3+27} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Remplaçant x par -3 mène directement à une indétermination de type $\frac{0}{0}$

La racine cubique n'a pour l'instant aucune importance, on cherche d'abord à calculer

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^3+27}$$

Méthode 1 : La règle de l'Hospital

On dérive numérateur et dénominateur et on recalcule la limite

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^3+27} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{27}$$

Et donc :

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{x^3+27} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

Méthode 2 : Vous connaissez les identités remarquables sur le bout des doigts ...

En effet, le dénominateur est une somme de 2 cubes : $x^3 + 27 = (x)^3 + (3)^3$

Et peut-être vous souvenez-vous que $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$?

Si vous n'êtes pas convaincu, il suffit de faire une simple distribution sur l'expression de droite et vous retomber sur $a^3 + b^3$

Cela nous aide car dans notre cas :

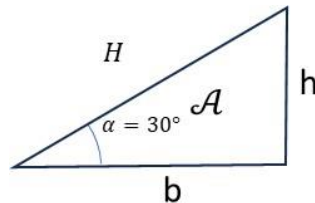
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{x^3+27} \right)^{\frac{1}{3}} &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{(x+3)(x^2-3x+9)} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x^2-3x+9} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{9+9+9} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La bonne réponse est donc la réponse B

[Retour énoncé](#)

Correction Question 6

Le triangle étant rectangle (90°), et un angle ayant 30° d'amplitude, on a la situation suivante :



On sait de plus que la surface d'un triangle est donnée par : $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$

Appliquant la loi des sinus / cosinus dans un triangle rectangle, on a :

- $b = H \cos(30^\circ)$ or $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} H$
- $h = H \sin(30^\circ)$ or $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{1}{2} H$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} H \times \frac{1}{2} H}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} H^2 = 200\sqrt{3} \Rightarrow H^2 = 1600 \Rightarrow H = 40$$

La bonne réponse est donc la réponse A

[Retour énoncé](#)

Correction Question 7

Rappelons la formule de l'écart-type :

Contrairement à son apparence, elle est très facile à retenir lorsqu'on comprend ce qu'elle fait !

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}\right)}$$

- On dispose de n données : $x_1, \dots, x_n$
- On calcule leur moyenne μ
- Pour chaque donnée, on calcule l'**écart** entre la donnée et la moyenne générale. Comme on peut avoir des résultats négatifs ou positifs, selon que la donnée est au-dessus ou en-dessous de la moyenne, on élève au carré pour n'avoir que des écarts positifs.
- On effectue ensuite la **moyenne** de ces **écarts**², c'est-à-dire qu'on effectue leur somme et qu'on divise par le nombre de données
- On passe le tout à la racine carrée pour «éliminer» le passage au carré juste avant.

Observez bien les 2 séries !

Série 1 : $x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2$

Série 2 : $x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4$

Chacune contient 5 données. Il est aussi clair que les moyennes de chaque série sont différentes. La moyenne de la première série vaut x ($= \frac{x-2+x-1+x+x+1+x+2}{5}$) alors que la moyenne de la 2^{ème} série vaut $x + 2$ (même calcul à adapter).

Mais ! la série 2 n'est qu'une simple translation de 2 unités par rapport à la série 1 ! La **dispersion des données autour de leur moyenne** reste exactement la même. Autrement dit, le calcul des $(x_i - \mu)$ de la série 1 seront les mêmes que pour la série 2 !

Et les écart-type sont donc les mêmes !

La bonne réponse est donc la réponse B

[Retour énoncé](#)

Correction Question 8

$$\int e^{-2 \ln(x)} \ln(x) dx$$

La vraie ‘difficulté’ de cette question était de penser à simplifier tout de suite l’expression $e^{-2 \ln(x)}$ pour ne pas compliquer inutilement le calcul ...

En effet : $e^{\ln(x)} = x$ et donc $e^{-2 \ln(x)} = (e^{\ln(x)})^{-2} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

L’intégrale à calculer devient alors :

$$\int \frac{1}{x^2} \ln(x) dx$$

Qu’on résout facilement par parties

(rappel : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv = \int (u'v) dx + \int (uv') dx$)

Prenons par exemple :

- $u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$
- $v'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{x}$

Appliquons : $\int (uv') dx = uv - \int (u'v) dx$

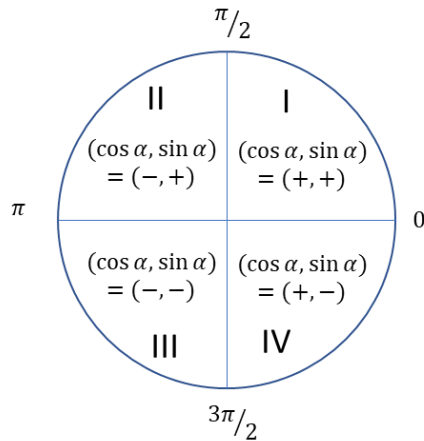
$$\int \frac{1}{x^2} \ln(x) dx = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$$

La bonne réponse est donc la réponse D

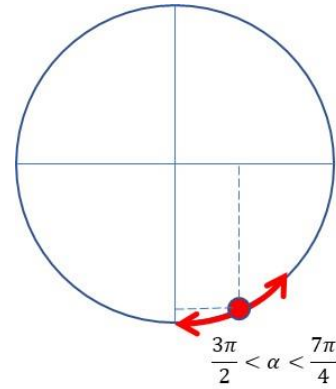
[Retour énoncé](#)

Correction Question 9

La première figure capitale à maîtriser sur le bout des doigts est :



Ce qui vous permet de situer l'angle α



On voit immédiatement que le cosinus de l'angle α ne peut être que positif $\rightarrow$ les réponses A et B sont éliminées.

On voit également **EN VALEUR ABSOLUE** (càd sans tenir compte du signe) que le **$\sin \alpha$ sera toujours $> \cos(\alpha)$** .

Mathématiquement, on a dans cette zone : $-1 < \sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $0 < \cos(\alpha) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc en valeur absolue : $\frac{\sqrt{2}}{2} < |\sin(\alpha)| < 1$ et $0 < |\cos(\alpha)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mettant tout ensemble, on a : $0 < |\cos(\alpha)| < \frac{\sqrt{2}}{2} < |\sin(\alpha)| < 1$ et

La bonne réponse est donc la réponse D

[Retour énoncé](#)

Correction Question 10

Cherchons tout d'abord la pente, càd le coefficient directeur de la droite passant par : $(0; 240)$ et $(120; 0)$.

Il est donné par : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 240}{120 - 0} = -\frac{240}{120} = -2$

Cherchons à présent l'équation de la droite passant par $(1; 5)$ et ayant la même pente (puisque'elle est parallèle à la première).

L'équation d'une droite est $y = ax + b$ où a n'est rien d'autre que le coefficient directeur !

Donc, l'équation de la droite recherchée est : $y = -2x + b$

Sachant que quand $x = 1, y = 5$ on a : $5 = -2(1) + b \Leftrightarrow 5 = -2 + b \Leftrightarrow b = 7$

La droite recherchée est donc : $y = -2x + 7$.

Enfin, la droite Ox a pour équation $y = 0$.

Notre question revient finalement à calculer le point d'intersection entre :

$$y = -2x + 7 \text{ et } y = 0$$

Portant $y = 0$ dans $y = -2x + 7$, il vient : $-2x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \text{ ou } \frac{14}{4} \dots$

La bonne réponse est donc la réponse A

[Retour énoncé](#)

_____**FIN**_____