-SUP- en poche

PHYSIQUE

L1 / L2

Outils mathématiques pour la physique

Loïc Villain

- 22 fiches
- Résumés de cours
- 102 exercices corrigés
- Conseils et astuces

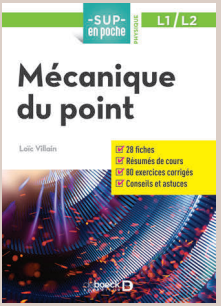
deboeck SUPÉRIEUR

Outils mathématiques pour la physique

deboeck SUPÉRIEUR

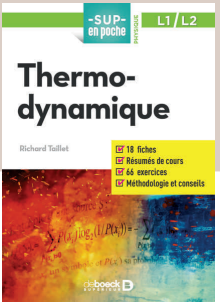
DANS LA MÊME COLLECTION

Sup en poche est une collection destinée aux étudiants du 1er cycle, essentiellement en Licence 1 et 2. Son objectif est de permettre à l'étudiant de réviser et s'entraîner en vue de réussir ses examens. Chaque ouvrage est composé de fiches proposant des cours résumés suivis d'exercices corrigés pas à pas.



Mécanique du point

L. Villain



Thermodynamique

R. Taillet

-SUP-
en poche

PHYSIQUE

L1 / L2

Outils mathématiques pour la physique

Loïc Villain

deboeck SUPÉRIEUR

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com

© De Boeck Supérieur s.a., 2018
Rue du Bosquet, 7 - B-1348 Louvain-la-Neuve

Tous droits réservés pour tous pays.
Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Dépôt légal :
Bibliothèque Nationale, Paris : avril 2018
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2018/13647/065

ISSN : 2566-2724
ISBN : 978-2-8073-0763-6

Sommaire

Introduction 1
1 Vecteurs du plan et de l'espace 5
2 Opérations sur les vecteurs du plan et de l'espace 14
3 Nombres complexes 27
4 Espaces vectoriels 35
5 Dépendance linéaire et base 44
6 Applications linéaires 53
7 Matrices 66
8 Produit matriciel 74
9 Principales applications des matrices 84
10 Déterminants 93
11 Diagonalisation 103
12 Produits scalaires et normes 117
13 Orthogonalité 127
14 Dérivation de fonctions d'une variable réelle 141
15 Intégration de fonctions d'une variable réelle 154
16 Développements limités et asymptotiques 173
17 Équations différentielles 184
18 Fonctions de plusieurs variables 197
19 Différentiation de fonctions de n variables 211
20 Formes différentielles 221
21 Intégrales multiples 229
22 Fonctions vectorielles 240

Introduction

Ce livre résume les principales notions d'algèbre et d'analyse utiles dans les cours introductifs à la physique, et plus particulièrement pour un public dont ce domaine est le véritable sujet d'étude. Il est composé de courtes fiches de rappels de cours, suivies d'exercices corrigés qui les mettent en œuvre et représentent le cœur de cet ouvrage.

Les mathématiques sont un outil fondamental en physique, dont ils sont en quelque sorte le « langage naturel ». Le physicien, et de manière plus générale le scientifique non-mathématicien, n'a toutefois pas toujours besoin d'une rigueur absolue. Ce livre ne prétend donc pas être adapté à des étudiants en mathématiques, si ce n'est pour leur présenter un point de vue « physique » sur les concepts qu'ils peuvent également rencontrer dans de véritables enseignements de mathématiques. Afin d'essayer de préciser l'intérêt, en physique, de certaines notions, des encadrés *À noter* ont été inclus. Ceux-ci font parfois référence à des domaines plus avancés, comme la mécanique quantique, l'un des objectifs de ce livre ayant été de tenter de mettre en avant certains résultats mathématiques considérés élémentaires et bien connus dans les cours de physique de divers niveaux.

Afin que cet ouvrage garde une épaisseur raisonnable, des choix ont dû être faits dans les sujets abordés. Il a notamment été considéré que le lecteur maîtrise parfaitement le programme de mathématiques de Terminale scientifique, et si tel n'est pas le cas, il est encouragé à consulter le titre *Toutes les maths pour bien commencer sa licence* paru dans la même collection. Malgré cela, il a été jugé pertinent de revenir sur certains sujets étudiés au lycée, comme la dérivation d'une fonction d'une variable réelle ou les nombres complexes, de façon à les présenter avec une approche et des notations « physiciennes ». Inversement, ont été omis certains thèmes qui auraient mérité d'être passés en revue, comme l'analyse vectorielle, omniprésente dans de nombreuses branches de la physique, par exemple en électromagnétisme, et qui se trouve à la croisée de l'algèbre et de l'analyse.

Les fiches ont été conçues pour être auto-suffisantes, ou, quand tel n'est pas le cas, pour ne jamais faire appel à des notions qui n'ont pas déjà été l'objet d'une fiche antérieure. En particulier, il en est ainsi pour les exercices qui sont considérés ici comme des outils pédagogiques, et non seulement comme des tests pour voir si le cours a été compris. Certains d'entre eux sont des applications très directes du cours, alors que d'autres servent de prétexte pour introduire une technique ou un concept physique ou mathématique intéressants.

Chaque exercice est accompagné d'un corrigé détaillé, parfois de remarques méthodologiques, et toujours d'une indication de niveau (★★★, ★★★, ★★★). Celle-ci se réfère non pas à la difficulté conceptuelle, mais

au temps nécessaire pour faire l'exercice. Un niveau ★★★ peut ne pas être difficile, tout en requérant de s'y plonger pendant plusieurs dizaines de minutes. Dans tous les cas, la présence d'un corrigé détaillé ne doit pas être une tentation pour ne pas chercher à résoudre soi-même l'exercice. Le lire n'a d'intérêt pédagogique qu'après avoir effectivement pris le temps de réfléchir activement.

Partie 1

Algèbre linéaire

1 COURS Vecteurs du plan et de l'espace

[MOTS-CLÉS : vecteur, addition vectorielle, vecteur opposé, vecteur nul, base, composantes, repère, coordonnées, barycentre, droite vectorielle, plan vectoriel]

- **Définition :** Un **vecteur** du plan ou de l'espace est un couple ordonné de points ou, de manière équivalente, une flèche allant d'un point du couple à l'autre.
- Le vecteur associé à un couple ordonné de points P et Q est noté $\overrightarrow{PQ}$.
- Deux ensembles ordonnés de points sont équivalents au même vecteur si les points sont séparés par la même distance et situés sur des segments parallèles orientés dans le même sens. On décrit cette propriété en disant qu'un vecteur est spécifié de manière unique par une **norme** (la distance entre ses deux extrémités), une **direction** et un **sens**. La norme d'un vecteur $\vec{A}$ est notée A ou $\|\vec{A}\|$.
- Quand on le représente par une flèche, l'endroit où se trouve un vecteur n'a aucune importance. Pour comparer des vecteurs, on peut cependant faire en sorte qu'ils soient tous issus d'une même origine O. Avec cette convention, à chaque point M du plan ou de l'espace correspond un et un seul vecteur $\overrightarrow{OM}$.

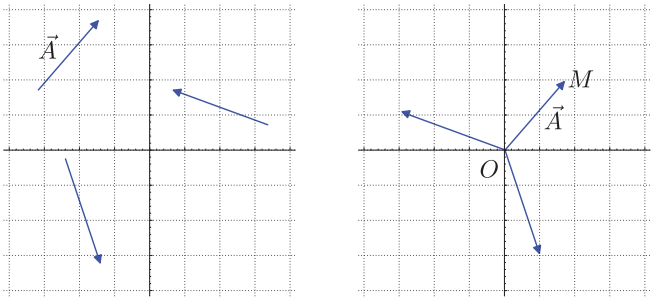


Figure 1.1 À gauche, trois vecteurs du plan. À droite, ces mêmes vecteurs avec une origine O commune. Dans ce second cas, on peut associer un unique point à chaque vecteur. Par exemple, M est le seul point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{A}$.

À noter

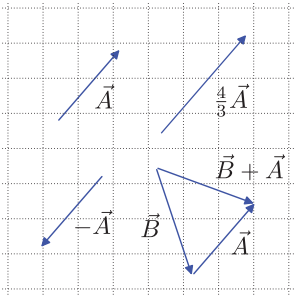
En physique, il arrive qu'un vecteur ait une origine naturelle. Il en est par exemple ainsi du vecteur associé à une force, que l'on représente au point d'application de cette dernière, ou encore du vecteur vitesse d'un point matériel, indiqué à l'endroit où celui-ci se trouve.

- **Propriété :** Le résultat de la multiplication d'un vecteur $\vec{A}$ par un nombre réel λ est un vecteur noté $\lambda\vec{A}$, de même direction que $\vec{A}$ et de norme $|\lambda|A$. Il est de même sens que $\vec{A}$ lorsque λ est positif, et de sens opposé dans le cas contraire. Si $\lambda = 0$, le résultat est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$ et de norme nulle.
- **Propriété :** Le résultat de la somme de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur noté $\vec{A} + \vec{B}$ que l'on peut obtenir en mettant bout à bout les deux vecteurs initiaux (voir figure ci-dessous).

À noter

En physique, les seules sommes vectorielles qui ont un sens sont celles entre vecteurs de même dimension physique. On ne peut par exemple pas ajouter vectoriellement une force et un champ électrique, même si mathématiquement ils ont la même nature.

- **Propriété :** Tout vecteur $\vec{A}$ possède un **opposé**, noté $-\vec{A}$, tel que $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$. Si P et Q sont deux points tels que $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$, alors $-\vec{A} = \overrightarrow{QP}$.



- **Définition :** Une **combinaison linéaire** de vecteurs $\vec{v}_i$, $i \in [1, \ldots, n]$, est une somme pondérée,

$$\vec{A} = \sum_i A_i \, \vec{v}_i \, ,$$

où les A_i sont des coefficients réels.
- **Définition :** Un ensemble de vecteurs sont **linéairement indépendants** s'il n'est pas possible d'écrire chacun d'entre eux comme une combinaison linéaire des autres. On dit aussi que cet ensemble est **libre**, et dans le cas contraire qu'il est **lié**.
- **Définition :** Une **base vectorielle** du plan ou de l'espace est une famille libre de vecteurs telle que tout autre vecteur du plan ou de l'espace s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Dans le plan, une base est constituée de 2 vecteurs. Dans l'espace, elle en contient 3. Ces nombres définissent respectivement la **dimension** du plan et celle de l'espace.

- **Définition :** Les **composantes** d'un vecteur dans une base donnée sont les uniques coefficients réels qui permettent de l'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de la base. La base étant précisée, on peut les noter indifféremment

$$(A_1, A_2), \quad \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

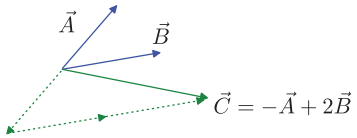


Figure 1.2 Les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ n'étant pas colinéaires, ils forment une base du plan. Dans celle-ci, le vecteur $\vec{C}$ a pour composantes $(-1, 2)$.

Méthodologie

Comme l'illustre la figure précédente, on obtient la composante selon $\vec{A}$ du vecteur $\vec{C}$ en projetant ce dernier sur la droite définie par $\vec{A}$ parallèlement aux autres vecteurs de la base (ici, $\vec{B}$). La projection n'est orthogonale que si la base l'est également (voir la fiche 2).

Attention

Les composantes sont des nombres réels, qui peuvent aussi bien être positifs que négatifs. Il ne faut donc pas confondre le vecteur $\vec{A}$ (une flèche), sa norme A ou $\|\vec{A}\|$ (un réel positif ou nul) et ses composantes, notées par exemple A_x, A_i, etc. On ne peut pas additionner un vecteur (une flèche) et une composante de vecteur (un nombre) : ce sont des objets de natures mathématiques différentes.

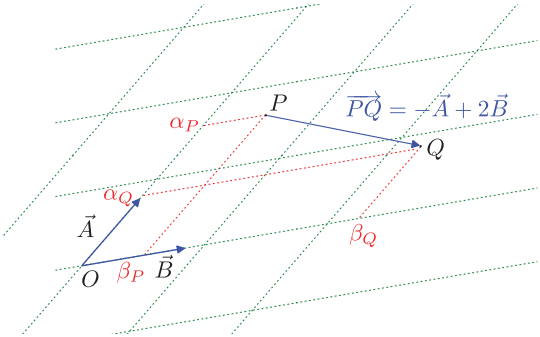
- **Propriété :** Dans une base donnée, un vecteur qui s'écrit comme la combinaison linéaire d'autres vecteurs a pour composantes les mêmes combinaisons des composantes de ces vecteurs.
- **Définition :** Un **repère (fixe)** du plan (resp. de l'espace) est l'ensemble constitué d'une origine O quelconque et d'une base vectorielle. Les **coordonnées** d'un point P dans ce repère sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans la base associée.

Remarque : On adopte parfois la convention inverse qui consiste à définir d'abord les coordonnées des points, à l'aide de droites ou de plans parallèles sur lesquels les coordonnées gardent des valeurs constantes, les vecteurs du repère (fixe) s'en déduisant ensuite comme étant ceux qui indiquent les directions le long desquelles on se déplace lorsqu'une seule coordonnée varie.

- **Propriété :** Dans la base associée à un repère fixe, les composantes du vecteur $\overrightarrow{PQ}$, où P et Q sont des points quelconques, sont égales aux différences des coordonnées de ces points. Par exemple, si $(\vec{A}, \vec{B})$ est une base du plan, on a

$$\overrightarrow{PQ} = (\alpha_Q - \alpha_P)\,\vec{A} + (\beta_Q - \beta_P)\,\vec{B}\,,$$

où les couples (α_P, β_P) et (α_Q, β_Q) sont les coordonnées respectives des points P et Q dans le repère fixe auquel la base est associée.



- **Définition :** Le **barycentre** de n points A_i, $i \in [1, \ldots, n]$, pondérés par des **poids** (coefficients réels) m_i de somme non-nulle, est le point G tel que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}\,.$$

On parle d'**isobarycentre** quand tous les coefficients m_i sont égaux.

- **Propriété :** Le barycentre est une sorte de « moyenne vectorielle ». En effet, si l'on se donne une origine O, il vérifie

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OA_i}\,,$$

où M est la somme des poids supposée non-nulle.

Exercice 1 Fonctions sur $\mathbb{R}^2$ ★★★

On considère des fonctions qui, à un vecteur $\boldsymbol{v} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, associent un vecteur de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont des applications linéaires.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto (2\,y, -x + y)$;
2. $f_2 : (x, y) \mapsto (y + x, 3\,y^2, 5\,y)$;
3. $f_3 : (x, y) \mapsto (-5\,y + 2\,x, 3\,y, x + y)$;
4. $f_4 : (x, y) \mapsto (2\,y + 2\,x, x + y)$;
5. $f_5 : (x, y) \mapsto (y, 1)$;
6. $f_6 : (x, y) \mapsto (x + 2\,y, 3\,y - x, 4\,x - y)$.

Exercice 2 Injection, surjection et bijection ★★★

Parmi les applications linéaires de l'exercice précédent, déterminer celles qui sont injectives, surjectives ou bijectives.

Exercice 3 Noyaux ★★★

Déterminer les noyaux des applications linéaires de l'exercice 1.

Exercice 4 Action sur une base ★★★

On considère une application linéaire f de E vers F, où E et F sont des espaces vectoriels réels quelconques. Montrer que l'action de f sur un vecteur de E est entièrement caractérisée par la connaissance de son action sur les vecteurs d'une base de E.

Exercice 5 Quelques propriétés des projecteurs ★★★

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E, ainsi que f et g les projecteurs associés.

1. Justifier que le noyau de f est G, et inversement ;
2. En déduire que $f \circ g = g \circ f = 0_E$, où 0_E est l'application nulle qui associe le vecteur nul à tout vecteur de E : $\forall \boldsymbol{v} \in E, 0_E(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$;
3. Soit s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. Montrer que s est **involutive**, c'est-à-dire que $s \circ s = \mathrm{id}_E$, où id_E est l'application identité sur E.

Exercice 6 Dérivation et polynômes ★★★

Soient $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3, ainsi que f_1 et f_2 les fonctions de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui, à un polynôme $P[X]$ quelconque, associent $f_1(P) = P'$ et $f_2(P) = X \times P'$, où P' est le polynôme dérivé de $P[X]$ par rapport à X.

Montrer que f_1 et f_2 sont des applications linéaires. Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice 7 Parties réelle et imaginaire de complexes ★★★

Soient z et z' deux nombres complexes quelconques.

1. Quelle est la condition que doivent vérifier les coefficients λ et μ intervenant dans une combinaison linéaire de z et z' du type $\lambda z + \mu z'$, pour que les applications Re et Im qui, à un nombre complexe, associent respectivement sa partie réelle et sa partie imaginaire, soient des applications linéaires ?

En supposant cette condition vérifiée,

2. indiquer si ces applications sont injectives ou surjectives ;

3. montrer que l'on peut considérer Re comme un projecteur sur un sous-espace de l'espace vectoriel des nombres complexes, mais que ce n'est pas le cas de Im. Proposer ensuite une modification minimale de l'application Im qui en fasse un projecteur ;

4. vérifier que l'opération de conjugaison complexe est une symétrie.

10 CORRIGÉS

Exercice 1 Comatrice et inverse ★★★

Par définition, la comatrice de A est la matrice dont les éléments sont les cofacteurs C_{ij}, lesquels sont les mineurs Δ_{ij}, pondérés par (-1) à la puissance « numéro de ligne + numéro de colonne », soit $C_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$. Le mineur Δ_{ij} est quant à lui le sous-déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j. Pour une matrice 2×2, chaque mineur se résume donc à un nombre directement lisible dans la matrice.
Ainsi,

$$\Delta_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{pmatrix} = d \ , \ \Delta_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{pmatrix} = c \ , \ \Delta_{21} = \begin{pmatrix} \cancel{a} & b \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{pmatrix} = b$$

$$\text{et } \Delta_{22} = \begin{pmatrix} a & \cancel{b} \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{pmatrix} = a.$$

On en déduit la comatrice,

$$\text{com}\, A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

D'après le rappel de cours, l'inverse de A vérifie

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t(\text{com}\, A)\,,$$

et n'est donc défini que si le déterminant de A est non nul, c'est-à-dire si $ad - bc \neq 0$.
Dans le cas présent, tout ceci implique

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Vérification : On valide facilement ce résultat en le multipliant par A.

Remarque : Cette méthode de détermination de l'inverse d'une matrice 2×2, bien que systématique, n'est en général pas la plus simple. Elle devient plus intéressante pour des matrices d'ordres plus élevés.

Exercice 2 Déterminant et produit vectoriel ★★★

L'application de la formule qui définit le déterminant d'une matrice indique que, pour une matrice 3×3, il est égal à la somme des déterminants des sous-matrices 2×2 que l'on peut construire à l'aide des deuxième et troisième colonnes, en les pondérant avec le coefficient correspondant de la première colonne.

Explicitement, si l'on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

la définition indique

$$\det(A) = a_{1,1} \times \begin{vmatrix} \cancel{a_{1,1}} & \cancel{a_{1,2}} & \cancel{a_{1,3}} \\ \cancel{a_{2,1}} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \cancel{a_{3,1}} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (-a_{2,1}) \times \begin{vmatrix} \cancel{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \cancel{a_{2,1}} & \cancel{a_{2,2}} & \cancel{a_{2,3}} \\ \cancel{a_{3,1}} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{3,1} \times \begin{vmatrix} \cancel{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \cancel{a_{2,1}} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \cancel{a_{3,1}} & \cancel{a_{3,2}} & \cancel{a_{3,3}} \end{vmatrix},$$

où en bleu sont visibles les sous-déterminants 2×2 à calculer, ce qui implique

$$\det(A) = a_{1,1}\,(a_{2,2}\,a_{3,3} - a_{3,2}\,a_{2,3}) - a_{2,1}\,(a_{1,2}\,a_{3,3} - a_{3,2}\,a_{1,3}) + a_{3,1}\,(a_{1,2}\,a_{2,3} - a_{2,2}\,a_{1,3}).$$

En appliquant ce résultat à la matrice $A = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & A_x & B_x \\ \vec{e}_y & A_y & B_y \\ \vec{e}_z & A_z & B_z \end{pmatrix}$, on obtient

$$|A| = \vec{e}_x\,(A_y\,B_z - A_z\,B_y) - \vec{e}_y\,(A_x\,B_z - A_z\,B_x) + \vec{e}_z\,(A_x\,B_y - A_y\,B_x),$$

ce qui est bien équivalent à l'expression rappelée dans la fiche 2.

Exercice 3 Exemple de calcul de déterminant 4×4 ★★☆

On considère la matrice A dont le déterminant est noté par convention $|A|$ ou

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -5 & 10 & -3 \\ -3 & 7 & 20 & 2 \\ 3 & 1 & 15 & 0 \end{vmatrix}.$$

Méthodologie

Tout au long de cet exercice, on utilise les diverses manipulations d'un déterminant, rappelées dans le résumé de cours, qu'il est possible de faire sans en changer la valeur ou en la modifiant simplement.

1. Lorsque l'on permute deux lignes ou colonnes, le déterminant change de signe. Ainsi, on a l'égalité

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -5 & 10 & -3 \\ -3 & 7 & 20 & 2 \\ 3 & 1 & 15 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 \\ -3 & -5 & 10 & 1 \\ 2 & 7 & 20 & -3 \\ 0 & 1 & 15 & 3 \end{vmatrix},$$

où l'on a mis en évidence en rouge les colonnes permutées.
L'intérêt de cette permutation est de faire apparaître un 0 dans la première colonne, ce qui va simplifier par la suite l'utilisation de l'expression générale itérative qui définit le déterminant.
2. On voit que tous les éléments de C_3 sont divisibles par 5. On peut donc factoriser pour écrire

$$|A| = -5 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix},$$

où en rouge est mise en évidence la colonne modifiée.
3. La ligne L_3 commence par un 2 alors que le premier élément de L_1 est 1. Ainsi, on peut obtenir un déterminant de même valeur, mais d'expression plus simple, en remplaçant L_3 par $L_3 - 2L_1$, ce qui donne

$$|A| = -5 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix},$$

où en rouge est mise en évidence la ligne modifiée.
4. La simplification analogue pour L_2 est $L_2 \to L_2 + 3L_1$, ce qui donne

$$|A| = -5 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 3 & 6 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix},$$

avec toujours en rouge la ligne modifiée.
5. La première colonne ayant pour seul élément non nul celui de la première ligne, on a

$$|A| = -5 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 3 & 6 & -11 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Il s'agit du résultat de l'utilisation de l'expression générale dans laquelle les $a_{i,1}$ sont tous nuls sauf $a_{1,1}$ qui vaut 1.

6. On constate à présent que les colonnes C_1 et C_2 du nouveau déterminant ont des premiers éléments opposés. La substitution $C_1 \to C_1 + C_2$ permet par conséquent d'obtenir une expression plus simple équivalente,

$$|A| = -5 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 13 \\ 9 & 6 & -11 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix},$$

où est visible en rouge la colonne modifiée.

7. Dans l'expression à laquelle nous avons abouti dans la question précédente, on ne distingue aucune manipulation qui simplifierait la première colonne ou la première ligne sans trop compliquer le reste du déterminant. Il est donc temps de procéder au développement, ce qui se fera plus simplement suivant la première ligne que la première colonne, puisque l'un des éléments de la première ligne est -1. On en déduit

$$\begin{aligned} |A| &= -5 \times \left(-(-1) \begin{vmatrix} 9 & -11 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 13 \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &= -5\,[1 \times (27 + 44) + 13 \times (27 - 24)] = -5 \times 110 = -550\,. \end{aligned}$$

Exercice 4 Déterminant de matrices de passage ★★★

Les matrices de passage de l'exercice 4 de la fiche 9 s'écrivent

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On constate que chacune d'entre elles possède une première colonne dont seul le premier élément est non-nul. En développant suivant la première colonne, on a par conséquent

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix},$$

et

$$|P'| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix},$$

où l'on a mis en évidence en bleu, dans les tableaux 4×4, les sous-déterminants 3×3 pertinents.
Ce faisant, on a réécrit les déterminants à l'aide d'expressions dont les premières colonnes n'ont également que leur premier élément non-nul. On peut donc réitérer le procédé pour obtenir,

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\,(= 1 \times 1 \times 2 \times 4),$$

et

$$|P'| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\left(= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right).$$

On remarque ainsi finalement que les deux matrices

- qui sont inverses l'une de l'autre (voir l'exercice 4 de la fiche 9), ont des déterminants inverses l'un de l'autre ;
- sont triangulaires, et ont des déterminants égaux aux produits de leurs éléments diagonaux.

Ces deux propriétés sont générales.

-SUP- en poche

PHYSIQUE

L1 / L2

Outils mathématiques pour la physique

Cet ouvrage propose une synthèse des principaux outils d'analyse et d'algèbre utiles en licence de physique, sous forme de fiches de cours suivies d'exercices corrigés en détail. Toutes les étapes des calculs et des raisonnements sont explicitées et des références entre exercices donnent une cohérence globale au livre. Divers outils méthodologiques sont également exposés et mis en œuvre pour aider à la résolution des exercices.

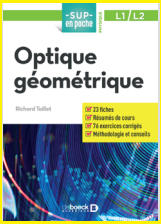
Chaque fiche contient :

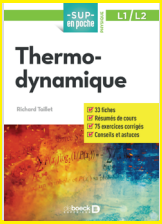
> **des rappels de cours :** définitions, théorèmes, formules importantes ;
> des **points de méthodologie** et des conseils ;
> des **exemples détaillés** pour illustrer les notions ou apprendre à résoudre les questions ;
> des **exercices et leurs corrigés** détaillés.

Loïc Villain

est enseignant-chercheur en physique à l'Université François-Rabelais de Tours où il effectue son activité de recherche en astrophysique relativiste au Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique. Il est impliqué dans de nombreuses activités de diffusion de la connaissance, au niveau universitaire et vers le grand public. Il a publié plusieurs ouvrages en physique chez De Boeck Supérieur.

DANS LA MÊME COLLECTION





ISBN : 978-2-8073-0763-6

9 782807 307636

Prix TTC : 16 €

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo®