

# Présentation

## de la partie « Mathématiques »

L'objectif de cette partie « Mathématiques » est de vous préparer aux épreuves de mathématiques des concours de catégorie C organisés par la fonction publique d'État, la fonction publique territoriale et la fonction publique hospitalière.

Actuellement, 175 concours sont proposés pour la catégorie C dont ceux d'agent d'administration, adjoint technique, agent de maîtrise, agent de maintien de la sécurité, surveillant de prison, etc.

Le concours sollicitant le plus de connaissances complexes en mathématiques est le concours d'*adjoint administratif*. C'est pour cette raison que le contenu mathématique de ce livre s'appuie sur le programme de ce concours.

L'épreuve de mathématiques aux concours C est très ouverte en termes de connaissances sollicitées. En effet, elle fait appel à un ensemble de savoirs censés être acquis pendant la scolarité en primaire et pendant le premier cycle du secondaire, ce qui requiert des candidats un retour sur des apprentissages antérieurs. Le concours est toujours difficile à obtenir, aussi bien dans son contenu que du fait du nombre très important de candidats qui s'y présentent. Il convient donc de ne rien négliger dans la préparation.

Afin de vous aider à préparer au mieux et à réussir votre concours, nous avons construit un ensemble composé d'une partie « Cours » puis d'une partie « Exercices », elle-même décomposée en trois ensembles spécifiques au type de concours préparé.

En effet, trois types d'épreuves de mathématiques sont présents dans les différents concours – problèmes de mathématiques, QCM et/ou tableaux numériques – mais on y évalue trois compétences qui sont toujours les mêmes : la maîtrise du calcul, la compréhension du texte et la logique d'action.

Les QCM sont axés spécifiquement sur les savoirs, le raisonnement et la logique, le tableau numérique sur les qualités de soin, d'ordre, de méthode et la maîtrise du sens de mots, enfin le problème de mathématiques révèle la qualité de la rédaction et les connaissances.

Ces épreuves font appel toutes les trois à une grande variété de connaissances dans le champ des mathématiques, connaissances qu'il vous faudra exploiter dans un temps limité (en général une heure).

Dans la partie « Cours » de l'ouvrage, vous trouverez, outre le cours proprement dit, des illustrations du propos à l'aide de nombreux exemples. Dans les parties « Exercices » composées pour chacun des types d'épreuves vous sont proposés des conseils méthodologiques et des batteries d'exercices de niveaux différents avec leurs corrigés.

Nous souhaitons que cet ouvrage soit un outil de formation directement utile à la préparation du concours, qui oriente le lecteur vers les domaines où il se sent un peu en retrait, en termes de connaissances. Chaque candidat au concours doit en effet maîtriser les fondamentaux des mathématiques, mais également les points particuliers du cours qui sont des critères de sélection lors de l'épreuve.

Maîtriser spontanément le **raisonnement arithmétique** demande un entraînement à des aptitudes calculatoires. Les parties « Nombres » et « Fractions » précisent les notions les plus souvent sollicitées dans les problèmes, les QCM et le tableau numérique.

Utiliser l'**outil algébrique** conduit régulièrement à convertir du registre de l'écrit au registre de la formulation. Mise en équation, résolution, calculs sont régulièrement sollicités dans les problèmes et les QCM, et la partie « Algèbre » propose un retour aux sources pour le candidat.

Mener à bien un calcul dans une situation de **proportionnalité** exige un ensemble riche de procédures. Les calculs de pourcentages, d'échelle, de vitesse, de quatrième proportionnelle sont présents partout dans les problèmes, les QCM et le tableau numérique. La partie « Proportionnalité » tente de présenter l'ensemble des connaissances qui peuvent être sollicitées. Le chapitre « pourcentage » inclus dans la partie proportionnalité est incontournable, en particulier pour les candidats ayant à réaliser un tableau numérique, dont tous les sujets demandent une très bonne maîtrise des différents calculs sur les pourcentages. Le nombre de pages que nous lui consacrons est fonction de son importance dans les différents sujets.

Convertir des **unités de grandeur** suppose que les correspondances sont connues. Les textes demandent souvent que ces conversions soient un préalable à la tâche à accomplir. Toutes les questions font appel conjointement au cours (conversion d'unités) et au calcul (application d'une formule ou calcul d'une mesure). La partie « Grandeurs » présente l'ensemble des outils permettant d'y répondre.

Lire, interpréter et tracer des **graphiques** exige du temps, de la réflexion et du soin. La partie « Graphique » permet d'identifier les différents graphiques proposés dans les épreuves et d'en connaître le rôle.

Dans les épreuves des concours, les questions de **raisonnement numérique** évaluent l'aptitude du candidat à effectuer des calculs élémentaires, à lire et interpréter des informations sur un graphique, à lire et interpréter les données figurant dans un tableau et, enfin, à appliquer les principes d'algèbre simple.

Pour toutes ces raisons, les quatre parties consacrées aux nombres, aux fractions, à la proportionnalité et à l'algèbre sont à connaître. Chacun des différents concours fait appel ponctuellement ou largement aux notions présentées.

Utiliser les propriétés des **figures** de base et les **théorèmes** fondamentaux de la **géométrie** est une compétence peu sollicitée mais présente. La géométrie occupe une place peu importante dans les concours, elle est donc très sélective. Deux types de questions peuvent être rencontrés : les questions de cours (définition et propriétés des figures simples) et les exercices de calcul de longueur. La partie « Géométrie » vous donne les outils utiles aux questions posées dans les problèmes et dans les QCM.

L'ensemble des parties évoquées précédemment concerne les notions mathématiques présentes dans les différents types de concours. Toutefois, il reste une partie présente spécifiquement ou ponctuellement dans un certain nombre de concours : la logique.

Raisonnement logiquement, compléter des séries de nombres ou de signes composent les items du concours. Un entraînement à répondre à des items de logique est indispensable pour réussir, en particulier aux concours qui ont une épreuve spécifique. La partie « logique » propose une prise de connaissances des différents types d'items proposés.

## 1. Le programme de mathématiques aux concours de catégorie C

### En arithmétique

Notions sommaires sur les systèmes de numération : système décimal, système binaire.

Les quatre opérations : addition, soustraction, multiplication, division.

Règles de divisibilité. Nombres premiers. Multiples et diviseurs. Puissances. Égalités. Inégalités.

Fraction. Valeur décimale d'une fraction. Opérations sur les fractions.

Règle de trois.

Rapports et proportions.

### En mesures

Mesures de longueur, poids, capacité, surface, volume.

Mesures du temps.

Mesures des angles et des arcs. Longueur de la circonférence. Latitude et longitude.

Surfaces : carré, rectangle, parallélogramme, triangle, trapèze, cercle.

Volumes : parallélépipède rectangle, cube, cylindre.

Densité : poids volumique.

Prix : prix d'achat, de vente, de revient, bénéfice et perte.

Moyennes.

Partages égaux et partages inégaux ; partages proportionnels.

Pourcentages, indices, taux, intérêts simples, escompte.

Échelle d'une carte, d'un plan.

### En algèbre

Nombres relatifs (positifs, négatifs, nuls). Opérations sur les nombres relatifs. Comparaison des nombres relatifs.

Inégalités.

Expressions algébriques. Calcul algébrique.

Équation du premier degré à une inconnue.

Repérage d'un point dans un plan par des coordonnées rectangulaires.

## 2. Les types d'épreuve de mathématiques aux concours C

Certains concours de catégorie C comportent une épreuve de pré-admissibilité suivie d'une épreuve d'admissibilité avant l'épreuve finale d'admission.

### EXEMPLE

Le concours externe d'agent d'administration des Finances publiques :

- Une épreuve de **pré-admissibilité**

*Questionnaire à choix multiples destiné à vérifier les connaissances de base en matière d'orthographe, de vocabulaire et de grammaire, de connaissances générales et de calcul, ainsi que les capacités de raisonnement du candidat (durée : 1 heure 30 ; coefficient 1, note inférieure à 5 sur 20 éliminatoire).*

- Une épreuve d'**admissibilité**

*Résolution de cas pratiques permettant de vérifier l'aptitude du candidat à présenter les éléments d'un dossier et pouvant comporter la réponse à des questions sur ce dossier, la rédaction d'un document, la mise au point d'un tableau de chiffres (durée 3 heures, coefficient 2).*

D'autres concours C ne comportent que l'épreuve écrite d'admissibilité avant l'épreuve d'admission.

### EXEMPLES

- Le concours interne d'adjoint administratif de 1<sup>ère</sup> classe de la direction générale des Finances publiques :

*Épreuve écrite consistant en la rédaction d'une lettre administrative courante ou en l'élaboration d'un tableau. Un dossier de documents de cinq pages au maximum comportant notamment les indications nécessaires à la rédaction de la lettre ou à la confection du tableau est fourni aux candidats (durée : 1 heure 30 ; coefficient 3).*

- Les concours externes d'adjoint administratif de 1<sup>ère</sup> classe de l'administration de l'État (Éducation nationale, Affaires étrangères, etc.) comprennent deux épreuves écrites d'admissibilité, une de compréhension de texte et une autre de français et mathématiques.

*Épreuve n° 2 : une épreuve écrite consistant en courts exercices destinés à évaluer les capacités du candidat en français (vocabulaire, orthographe, grammaire) et mathématiques (durée : 1 heure 30 ; coefficient 3).*

Dans tous les cas, sauf précision donnée lors du concours, l'usage d'une calculatrice est autorisé exclusivement pour l'épreuve écrite d'admissibilité.

# Partie I

# **Le cours de Maths**

1. Arithmétique
2. Algèbre
3. De la géométrie au numérique
4. Des grandeurs aux calculs
5. Du graphique au calcul
6. De la logique à l'activité mathématique

# Chapitre 1

## Arithmétique

### 1. Les nombres

Les épreuves de mathématiques aux concours de catégorie C requièrent des connaissances précises en matière de calcul numérique. C'est principalement dans l'épreuve de QCM que celles-ci sont sollicitées.

Elles portent essentiellement sur des nombres particuliers : les multiples, les diviseurs, les puissances, les fractions et les racines carrées. Quand on ne manipule que des nombres entiers (naturels), on est dans le domaine de l'arithmétique.

Mais le modèle de raisonnement sur ces nombres entiers peut être prolongé aux nombres décimaux. Ce qui peut s'avérer très utile, en particulier dans les petits problèmes.

#### 1. Multiples, diviseurs, nombres premiers

##### A. Diviseurs et multiples

Si  $a$  est un entier naturel\* qui s'écrit sous la forme d'un produit de deux entiers naturels non nuls :  
 $a = b \times c$

On peut dire que :

- $a$  est un multiple de  $b$  et  $a$  est un multiple de  $c$
- $a$  est divisible par  $b$  et  $a$  est divisible par  $c$
- $b$  et  $c$  sont des diviseurs de  $a$ .

##### EXEMPLES

34 est divisible par 2 et par 17 car  $34 = 17 \times 2$

34 est multiple de 2 et de 17 car  $34 = 17 \times 2$

7 est un diviseur de 56 car  $56 = 7 \times 8$

##### B. Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par :

2 si le dernier chiffre est 0, 2, 4, 6, ou 8.

3 si la somme des chiffres est un multiple de 3.

5 si le dernier chiffre est 0 ou 5.

9 si la somme des chiffres est un multiple de 9.

10 si le dernier chiffre est 0.

##### EXEMPLES

60 est divisible par 2, par 3, par 5 et par 10.

72 est divisible par 2, par 3 et par 9.

### C. Nombres premiers

- Un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

#### EXEMPLE

17 (on ne peut le diviser par aucun des nombres inférieurs à 17).

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. (Il est utile de connaître au moins les 8 premiers.)

- Pour prouver qu'un nombre entier est premier, il suffit de vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier plus petit que lui (le dernier nombre à vérifier doit être inférieur ou égal à sa racine carrée).

#### EXEMPLES

221 est-il premier ?

$15 \times 15 = 225$ , on vérifie s'il est divisible par les nombres premiers de la liste jusqu'à 13 : 2 non, 3 non, 5 non, 7 non, 11 non, 13 oui car  $221 = 13 \times 17$ . 221 n'est pas premier.

127 est-il premier ?

$12 \times 12 = 144$ , on vérifie s'il est divisible par les nombres premiers de la liste jusqu'à 13 : 2 non, 3 non, 5 non, 7 non, 11 non, 13 non. 127 est premier.

- Deux entiers naturels sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.

#### EXEMPLES

21 et 25 ne sont pas premiers mais sont premiers entre eux. Leur seul diviseur commun est 1.

35 et 50 ne sont pas premiers entre eux car ils sont divisibles par 5.

**Remarque : on dira qu'une fraction est irréductible si le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.**

- Décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

#### EXEMPLES

$$2016 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

$$273 = 3 \times 7 \times 13$$

### D. Plus petit multiple commun (PPCM)

Le PPCM de deux entiers est le plus petit entier naturel qui soit multiple simultanément de ces deux entiers.

#### EXEMPLE 1

15 et 24

Nous allons calculer le PPCM de 15 et de 24 de deux manières différentes.

##### Méthode n° 1

Nous écrivons simultanément les multiples des deux nombres et on repère le premier qui leur soit commun après 0.

Les multiples de 15 sont : 0 ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ; 120 ; ...

Les multiples de 24 sont : 0 ; 24 ; 48 ; 72 ; 96 ; 120 ; ...

Le PPCM de 15 et de 24 est donc 120.

## Méthode n° 2

Nous utilisons les décompositions en facteurs premiers de 15 et 24.

$$15 = 3 \times 5$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \text{ soit } (2^3 \times 3)$$

Dans la décomposition du plus petit multiple commun apparaîtront tous les facteurs qui figurent dans l'un au moins de ces produits ; s'ils ont des exposants, on leur attribue le plus grand exposant présent.

Le PPCM de 15 et de 24 est donc  $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$  soit  $(2^3 \times 3 \times 5)$

## EXEMPLE 2

56 et 60

On décompose chaque nombre en produit de nombres premiers.

$$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \text{ } (2^3 \times 7)$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \text{ } (2^2 \times 3 \times 5)$$

Le PPCM de 56 et de 60 est donc  $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$   $(2^3 \times 3 \times 5 \times 7)$

## E. Plus grand diviseur commun (PGCD)

Le PGCD de deux entiers est le plus grand nombre entier qui peut diviser les deux nombres en même temps.

## EXEMPLE 1

15 et 24. Nous allons calculer le PGCD de 15 et de 24 de trois manières différentes.

### Méthode n° 1

Nous écrivons simultanément les diviseurs des deux nombres et on repère le plus grand qui soit commun.

Les diviseurs de 15 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15.

Les diviseurs de 24 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24.

Le PGCD de 15 et de 24 est donc 3.

### Méthode n° 2

Nous utilisons l'**algorithme d'Euclide** qui consiste à effectuer une suite de divisions euclidiennes\* :

- on effectue la division euclidienne de 24 (le plus grand) par 15 (le plus petit) et on note  $r$  le reste ;
- ensuite, on divise 15 par le reste  $r$  ;
- et on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'une division donne un reste égal à 0.

Dans cette méthode, le PGCD est le dernier reste non nul.

|    |  |    |  |    |  |   |  |          |  |   |  |   |  |   |
|----|--|----|--|----|--|---|--|----------|--|---|--|---|--|---|
| 24 |  | 15 |  | 15 |  | 9 |  | 9        |  | 6 |  | 6 |  | 3 |
| 9  |  | 1  |  | 6  |  | 1 |  | <u>3</u> |  | 1 |  | 0 |  | 2 |

Le PGCD de 15 et de 24 est donc 3.

### Méthode n° 3

Nous utilisons les décompositions en facteurs premiers de 15 et 24.

$$15 = 3 \times 5$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \text{ } (2^3 \times 3)$$

Le PGCD de 15 et de 24 est composé des facteurs communs dans la décomposition, donc ici 3.

## EXEMPLE 2

56 et 60

On décompose chaque nombre en produit de nombres premiers.

$$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \quad (2^3 \times 7)$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \quad (2^2 \times 3 \times 5)$$

Le PGCD de 56 et de 60 est donc  $2 \times 2 = 4 \quad (2^2)$

## 2. Puissance entière d'un nombre et écriture

### A. Définition

Il est commode d'écrire plus simplement une suite de produits d'un même nombre.

### EXEMPLE

$4 \times 4$  s'écrit  $4^2$  et se lit «4 au carré» ou «4 à la puissance 2».

$4 \times 4 \times 4$  s'écrit  $4^3$  et se lit «4 au cube» ou «4 à la puissance 3».

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$  s'écrit  $4^6$  et se lit «4 à la puissance 6».

**$4^p$  est le produit de  $p$  facteurs 4.**

### B. Propriétés

Elles ne concernent que les produits et les quotients.

$$(a^n)^p = a^{n \times p}$$

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

$$a^0 = 1; a^1 = a$$

$$\frac{1}{a} = a^{-1}; \frac{1}{a^p} = a^{-p} \text{ avec } a \neq 0$$

### Exemples

$$(4^2)^3 = 4^6$$

$$4^2 \times 4^3 = 4^5$$

$$(4 \times 5)^3 = 4^3 \times 5^3$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3}$$

$$\frac{4^5}{4^2} = 4^3$$

$$\frac{1}{4^6} = 4^{-6}$$

### C. Calculs

Si on veut écrire un produit (ou un quotient) sous la forme d'un produit de facteurs premiers, on décompose les nombres, puis on utilise les propriétés.

### EXEMPLE 1

Le produit  $42 \times 36 \times 400$ .

$$42 \times 36 \times 400 = (6 \times 7) \times (4 \times 9) \times (4 \times 4 \times 25)$$

$$42 \times 36 \times 400 = (2 \times 3 \times 7) \times (2 \times 2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5)$$

$$42 \times 36 \times 400 = 2^7 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$$