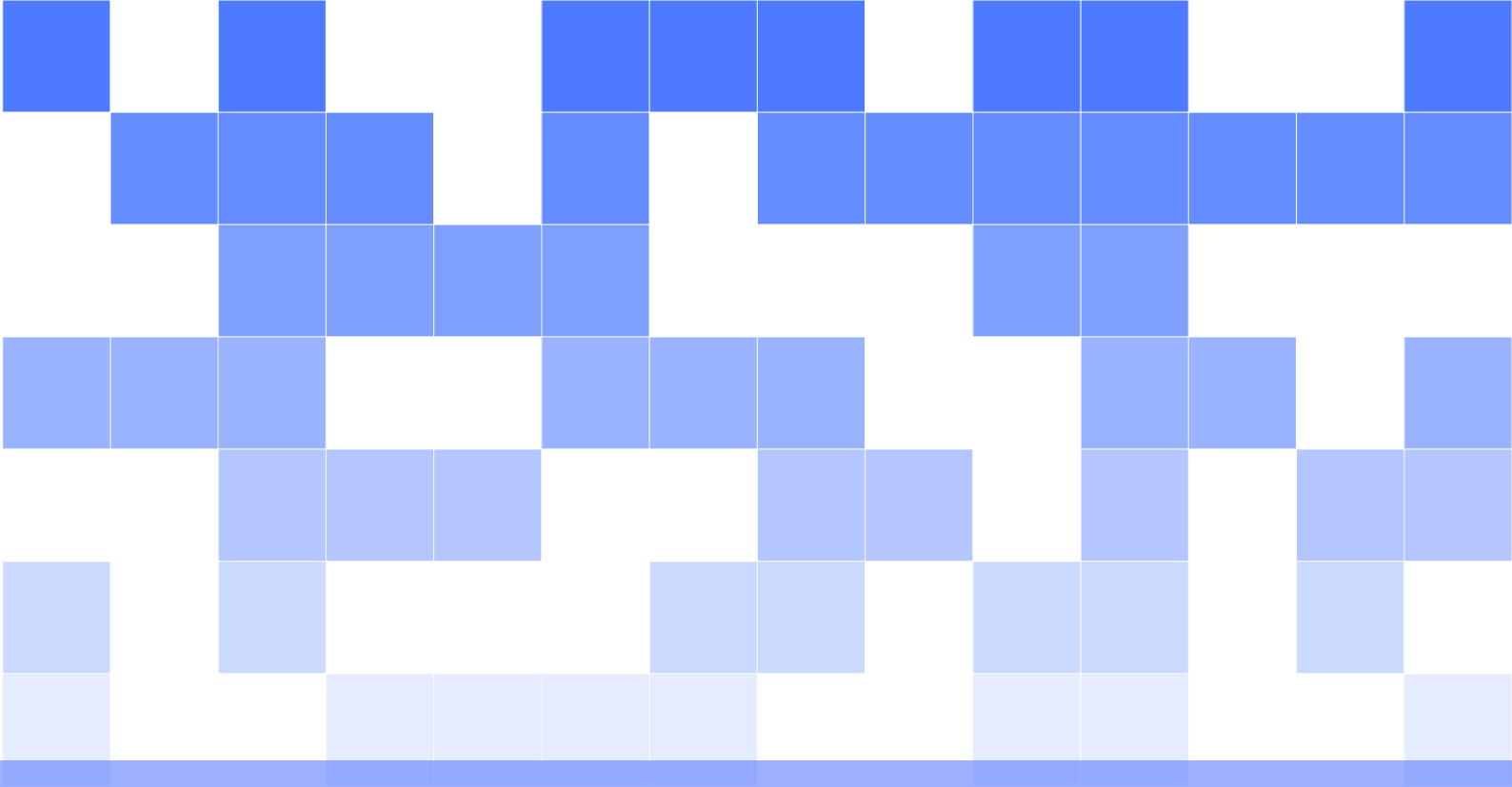




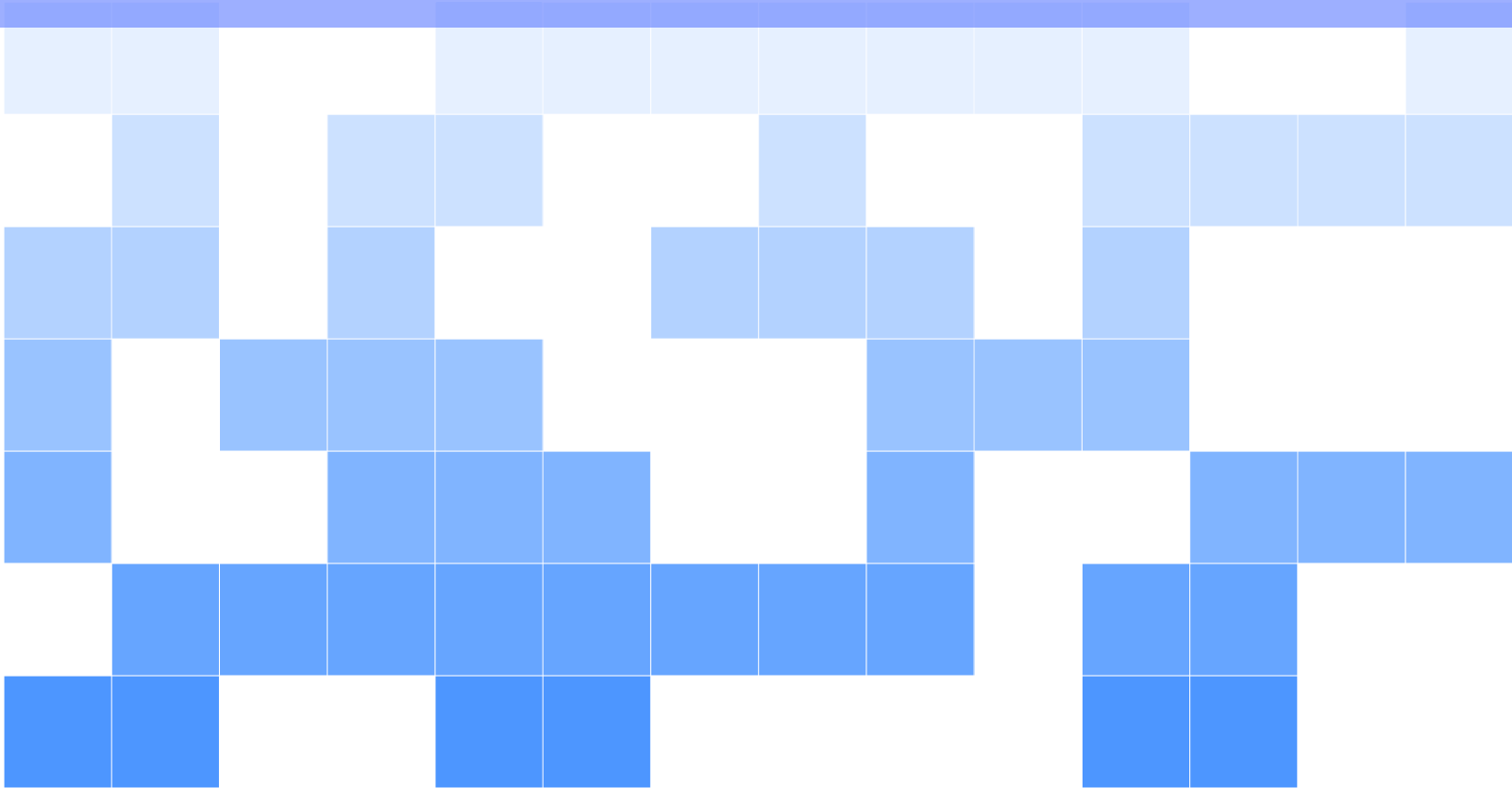
Licence de mathématiques

Programme des UEs

Année 2024-2025

UFR mathématiques de l'Université de Rennes

Version du 30 janvier 2025





UFR mathématiques



Table des matières

I

Structure de la L1 et L2

L1 - parcours classique	1
La majeure	
Les choix de mineures	
L1 - parcours CALM	2
La majeure	
Les mineures	
L2 - parcours classique	3
La majeure	
Les choix de mineures	

II

Structure de la L3

L3 - Trois parcours : MI, MF et CPES SEnS	5
La majeure du parcours Mathématiques et Interactions (MI)	
La majeure du parcours Mathématiques Fondamentales (MF)	
Les choix de mineures dans les parcours MI et MF	
Le parcours CPES SEnS	

III

Les U.E. de L1

Analyse 1 - AN1	8
Technique fondamentale de calcul en analyse	
Convexité	
Primitives et intégrales	
Suites réelles et complexes	
Algèbre et arithmétique 1 - AR1	11
Nombres complexes	
Sommes et produits	
Raisonnement et vocabulaire ensembliste	
Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs	
Introduction aux structures algébriques - ISA	14
Loi de composition interne	
Relation d'équivalence, relation d'ordre	
Les ensembles de nombres	
Modélisation mathématique - MOM	15
Trigonométrie	
Systèmes de coordonnées classiques et bases locales	
Calcul vectoriel pour la mécanique	
Principe fondamental	

Dérivation
Dérivation des fonctions $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

Enjeux et défis de la Transition écologique et sociale - TES	16
Langue vivante 1 - LV1	17
Projet personnel professionnel de l'étudiant - 3PE	18
Algèbre et géométrie 2 - AG2	19
Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot	
Calcul matriciel et systèmes linéaires	
Espaces vectoriels	
Espaces vectoriels de dimension finie	
Applications linéaires	
Matrices et applications linéaires	
Changements de bases et équivalence	
Analyse et probabilités 2 - AP2	23
Limites et continuité	
Dérivabilité	
Dénombrement	
Probabilités sur un univers fini	
Découverte des métiers 1 - DMM1	26
Langue vivante 1 - LV1	27
Outils informatiques - OI	28
Les UE spécifiques du parcours Défi	29
Compléments maths défi 1 - CMD1	
Compléments maths défi 2 - CMD2	

IV

Les mineures en L1

Initiation à la programmation impérative - IPI	31
Introduction à la programmation impérative	
Itératives	
Fonctions et paramètres	
Structures de données	
Physique 1 - PH1	32
Physique 1 - A (Optique)	
Physique 1 - B (Électricité)	
Initiation à la programmation fonctionnelle - IPF	34
Physique 2 - PH2	35
Physique 2-A	
Physique 2-B (oscillateur harmonique)	

V

Les U.E. de L2

Algèbre 3 - AL3	38
Structures algébriques usuelles	

Polynômes
Fractions rationnelles
Groupe symétrique

Analyse et probabilités 3 - AP3	41
Intégration	
Développements limités	
Intégration sur un intervalle quelconque	
Séries numériques	
Probabilités	
Introduction aux applications de l'arithmétique et de l'algèbre - I3A	45
Initiation à la cryptographie	
Initiation aux codes correcteurs d'erreurs	
Introduction aux graphes	
Découverte des métiers 2 - DMM2	46
Langue vivante 1 - LV1	47
Algèbre 4 - AG4	48
Espaces préhilbertiens réels	
Déterminants	
Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	
Analyse 4 - AN4	51
Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Suites et séries de fonctions	
Équations différentielles 1 - ED1	54
Généralités sur les équations différentielles	
Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Équations différentielles linéaires d'ordre un	
Exponentielle d'une matrice	
Systèmes différentiels linéaires d'ordre un	
Équations différentielles scalaire linéaires du second ordre à coefficients constants	
Introduction aux mathématiques de l'intelligence artificielle - IMIA	55
Langue vivante 1 - LV1	56
U.E. du parcours Défi	57
Compléments maths défi 3 - CMD3	
Compléments maths défi 4 - CMD4	

VI

Les mineures en L2

Algorithmique et complexité - ACO	59
Physique 3 - PH3	60
Physique 3-A (thermodynamique)	
Physique 3-B (électromagnétisme)	
Calculabilité - CAL	62
Calculabilité	
Sémantique	
Complexité	

Didactique des mathématiques 1 - DID1	63
Physique 4 - PH4	64
Physique 4-A (ondes)	
Physique 4-B (transport)	

VII Les U.E. du parcours Mathématiques et Interactions de L3

Calcul différentiel en dimension finie - CDF	67
Notions de topologie en dimension finie	
Fonctions différentiables	
Problèmes d'extrema	
Calcul matriciel - CMA	68
Groupes et actions de groupes - GRAC	69
Langue vivante 1 - LV1	70
Méthodes numériques en analyse - MNA	71
Résolution approchée d'équations non-linéaires	
Interpolation polynomiale	
Quadrature numérique	
Équations différentielles ordinaires	
Préparation au CAPES 1 - CAP1	72
Probabilités et statistique - PS	73
Généralités	
Variables à loi discrète	
Variables à loi continue	
Variables à loi discrète	
Analyse appliquée - AN	74
Équations différentielles en situation	
Calcul intégral	
Courbes et surfaces paramétrées - CSP	75
Courbes	
Surfaces	
Découverte des métiers des maths 3 - DMM3	76
Géométries - GEO	77
Langue vivante 1 - LV1	78
Introduction aux probabilités et statistiques pour la science des données - PSSD	79
Un peu de probabilité	
Modèles et estimation	
Un pas vers les méthodes statistiques	
Préparation au CAPES 2 - CAP2	80

VIII Les U.E. du parcours Mathématiques Fondamentales de L3

Algèbre linéaire et bilinéaire - ALBI	82
Algèbre linéaire	
Formes quadratiques	
Espaces euclidiens	
Calcul différentiel - CD	83
Espace vectoriels normés	
Applications linéaires continues	
Fonctions 1D (à valeurs dans un evn quelconque)	
Calcul différentiel	
Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites	
Extrema	
Intégrale de Lebesgue - INTL	84
Langue vivante 1 - LV1	85
Théorie des groupes - THGR	86
Topologie générale - TOPG	87
Anneaux et arithmétique - ANAR	88
Découverte des métiers des maths 3 - DMM3	89
Équations différentielles 2 - ED2	90
Théorèmes généraux	
Systèmes linéaires	
Propriétés qualitatives des systèmes autonomes	
Méthodes numériques	
Espaces vectoriels normés - EVN	91
Compléments de topologie et intégration	
Séries de Fourier	
Espace de Hilbert	
Théorème de Baire	
Transformée de Fourier des fonctions	
Topologie faible dans les espaces de Hilbert	
Langue vivante 1 - LV1	92
Probabilités - PRO	93

IX Les mineures en L3

Épistémologie et histoire des sciences - EHS	95
Fonctions holomorphes - HOLO	96
Mécanique des systèmes matériels et milieux déformables - SMMD	97
Systèmes matériels	
Milieux déformables	

Analyse numérique - ANU	98
Didactique des mathématiques 2 - DID2	99
Introduction à la didactique des mathématiques	
Analyse et apprentissage de la démonstration en mathématiques	
Mise en situation	
Mécanique des fluides - FLU	100
Modélisation d'un fluide	
Cinématique	
Dynamique	
Applications en ingénierie	
Introduction à la science des données - ISD	101
Réduction de dimension et visualisation de données de grande dimension	
Classification non supervisée	
Un premier pas vers les méthodes supervisées	

Structure de la L1 et L2

L'attention des étudiants et étudiantes est attirée sur le fait que le choix de mineures proposé dans la maquette de Licence 1 et 2 de Mathématiques aux deux semestres (notamment pour les UE de physique et d'informatique) doit se faire de manière cohérente sur les deux années de L1 et L2 afin de disposer des pré-requis nécessaires chaque semestre pour la mineure choisie. Le nombre de places dans certaines UE de mineure peut être limité. L'équipe pédagogique de la Licence 1 et 2 de Mathématiques pourra dans ce cas être amenée à établir la liste des étudiants et étudiantes autorisés-es à s'inscrire à certaines UE de mineure.



L1 - parcours classique

La majeure

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AN1	9	30	48	0	78	Analyse 1
AR1	9	30	48	0	78	Algèbre et arithmétique 1
ISA	2	3	12	0	15	Introduction aux structures algébriques
LV1	0	0	15	0	15	Langue vivante 1
MOM	3	15	15	0	30	Modélisation mathématique
TES	2	18	0	0	18	Enjeux et défis de la Transition écologique et sociale
S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AG2	9	30	48	0	78	Algèbre et géométrie 2
AP2	9	30	48	0	78	Analyse et probabilités 2
DMM1	1	2	0	0	2	Découverte métiers des maths 1
LV1	3	0	15	0	15	Langue vivante 1
OI	3	12	0	12	24	Outils informatiques

Les choix de mineures

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
IPI	5	9	15	18	42	Initiation à la programmation impérative
PH1	5	7.5	25.5	9	42	Physique 1
STC	5				42	Santé tronc commun
S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
IPF	5	12	12	18	42	Initiation à la programmation fonctionnelle
PH2	5	16.5	16.5	9	42	Physique 2
SSP	5				42	Santé spécialité

Le parcours Défi a deux U.E surnuméraires :

L1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CMD1	3	15	15	0	30	Compléments maths défi 1
CMD2	3	0	24	0	24	Compléments maths défi 2

La LV1 en Défi est obligatoirement l'anglais.

En prenant les mineures d'informatique (resp. de physique), possibilité d'aller en L2 info (resp. physique).

Les mineures « Santé tronc commun » et « Santé spécialité » sont issues de l'offre de formation des UFR santé (<https://acces-sante.univ-rennes.fr/les-licences-acces-sante>).



L1 - parcours CALM

La majeure

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AN1	9	30	48	0	78	Analyse 1
CALM1	1	0	42	0	42	Soutien en maths
LV1	0	0	15	0	15	Langue vivante 1
MOM	3	15	15	0	30	Modélisation mathématique
3PE	1	1	0	0	1	Projet personnel professionnel
S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AP2	9	30	48	0	78	Analyse et probabilités 2
CALM2	1	0	21	0	21	Soutien en maths
DMM1	1	2	0	0	2	Découverte métiers des maths 1
LV1	3	0	15	0	15	Langue vivante 1
S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AR1	9	30	48	0	78	Algèbre et arithmétique 1
CALM3	1	0	21	0	21	Soutien en maths
ISA	2	3	12	0	15	Introduction aux structures algébriques
TES	2	18	0	0	18	Enjeux et défis de la Transition écologique et sociale
S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AG2	9	30	48	0	78	Algèbre et géométrie 2
CALM4	1	0	21	0	21	Soutien en maths
OI	3	12	0	12	24	Outils informatiques

Les mineures

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PH1	5	7.5	25.5	9	42	Physique 1
S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PH2	5	16.5	16.5	9	42	Physique 2
S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
IPI	5	9	15	18	42	Initiation à la programmation impérative
S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
IPF	5	12	12	18	42	Initiation à la programmation fonctionnelle



L2 - parcours classique

La majeure

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AP3	10	36	48	0	84	Analyse et probabilités 3
AL3	10	36	48	0	84	Algèbre 3
DMM2	1	2	0	0	2	Découverte métiers des mathématiques 2
I3A	4	12	12	12	36	Introduction aux applications de l'arithmétique et de l'algèbre
LV1	0	0	15	0	15	Langue vivante 1
S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AN4	6	24	24	0	48	Analyse 4
AL4	6	24	24	0	48	Algèbre 4
ED1	6	18	30	0	48	Équations différentielles 1
IMIA	4	12	12	12	36	Introduction aux mathématiques de l'intelligence artificielle
LV1	3	0	15	0	15	Langue vivante 1

Les choix de mineures

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AED1	5	0	15	0	15	Assistant d'éducation - S3
ACO	5	10.5	15	16.5	42	Algorithmique et complexité
PPA1	5	0	42	0	42	Mise à niveau en maths Post-PASS 1
PH3	5	21	21	0	42	Physique 3
SCIPE3	5					Sciences et professorat des écoles 3
S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AED2	5	0	15	0	15	Assistant d'éducation - S4
DID1	5	18	18	6	42	Didactique des mathématiques 1
CAL	5	18	9	15	42	Calculabilité
PPA2	5	0	42	0	42	Mise à niveau en maths Post-PASS 2
PH4	5	21	21	0	42	Physique 4
SCIPE4	5					Sciences et professorat des écoles 4

Le parcours Défi a deux U.E surnuméraires :

L1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CMD3	3	0	24	0	24	Compléments maths défi 3
CMD4	3	0	24	0	24	Compléments maths défi 4

L'anglais est obligatoire pour suivre la mineure AED et pour le parcours Défi.

Les étudiants et étudiantes suivent une sensibilisation aux enjeux de la transition écologique et du développement durable dans l'enseignement supérieur durant l'année de L2.

Structure de la L3



L3 - Trois parcours : MI, MF et CPES SEnS

La majeure du parcours Mathématiques et Interactions (MI)

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CDF	5	21	21	0	42	Calcul différentiel en dimension finie
CMA	5	21	21	0	42	Calcul matriciel
GRAC	5	21	21	0	42	Groupes et actions de groupes
LV1	0	0	15	0	15	Langue vivante 1
PS	5	21	21	0	42	Probabilités et statistique
Une UE au choix parmi les deux suivantes :						
CAP1	5	21	21	0	42	Préparation au CAPES 1
MNA	5	21	15	6	42	Méthodes numériques en analyse
S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CSP	5	21	21	0	42	Courbes et surfaces paramétrées
DMM3	2					Découverte métiers des maths 3
GEO	5	21	21	0	42	Géométries
LV1	3	0	15	0	15	Langue vivante 1
Deux UE au choix parmi les trois suivantes :						
AN	5	21	21	0	42	Analyse appliquée
CAP2	5	21	21	0	42	Préparation au CAPES 2
PSSD	5	21	21	0	42	Introduction aux probabilités et statistiques pour la science des données

La majeure du parcours Mathématiques Fondamentales (MF)

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ALBI	5	21	21	0	42	Algèbre linéaire et bilinéaire
CD	5	21	21	0	42	Calcul différentiel en dimension finie
INTL	5	21	21	0	42	Intégrale de Lebesgue
LV1	0	0	15	0	15	Langue vivante 1
THGR	5	21	21	0	42	Théorie des groupes
TOPG	5	21	21	0	42	Topologie générale
S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ANAR	5	21	21	0	42	Anneaux et arithmétique
DMM3	2					Découverte métiers des maths 3
ED2	5	21	21	0	42	Équations différentielles 2
EVN	5	21	21	0	42	Espaces vectoriels normés
LV1	3	0	15	0	15	Langue vivante 1
PRO	5	21	21	0	42	Probabilités

Les choix de mineures dans les parcours MI et MF

Au choix parmi la liste ci-dessous, complétée lorsque que le parcours Mathématiques et Interactions est choisi, par l'UE ANAR du S6 du parcours Mathématiques Fondamentales.

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AED5	5	0	10	0	10	Assistant d'éducation - S5
EHS	5	21	21	0	42	Épistémologie et histoire des sciences
HOLO	5	21	21	0	42	Fonctions holomorphes
SCIP5	5					Sciences et professorat des écoles 5
SMDD	5	21	21	0	42	Mécanique des systèmes matériels et milieux déformables
S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ANU	5	18	15	9	42	Analyse numérique
DID2	5	18	18	6	42	Didactique des mathématiques 2
FLU	5	21	21	0	42	Mécanique des fluides
ISD	5	12	0	30	42	Introduction à la science des données
SCIP6	5					Sciences et professorat des écoles 6

Le parcours CPES SEnS

Ce parcours est suivi par celles et ceux qui ont fait les deux premières années de la CPES SEnS (<https://cpes-sens.univ-rennes.fr>). Il est décliné en deux sous-parcours MI et MF dérivant des parcours MI et MF classiques.

Chaque semestre est décomposé en deux blocs :

- Le bloc mathématiques (MI ou MF)
- Le bloc transversal commun à toutes les L3 impliquées dans la CPES SEnS

Semestre 5

Bloc mathématiques en fonction du sous-parcours choisi

MI (CDF, CMA, GRAC, MNA, PS)

MF (ALBI, CD, INTL, THGR, TOPG)

Bloc transversal

Anglais CPES 1 (2 ECTS)

SEnS 1 (3 ECTS)

Semestre 6

Bloc mathématiques en fonction du sous-parcours choisi

MI (AN, CSP, GEO, PS et au choix ANAR, ANU ou ISD)

MF (ANAR, ED2, EVN, PRO et au choix ANU ou ISD)

Bloc transversal

Anglais CPES 2 (2 ECTS)

SEnS 2 (3 ECTS)

Les U.E. de L1



Analyse 1 - AN1

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AN1	9	30	48	0	78	Analyse 1

Dans cette UE, il s'agit d'abord, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse, en particulier celles de majoration. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul différentiel ou intégral utilisées sont différées à une UE du second semestre. Cette appropriation en deux temps est destinée à faciliter les apprentissages. Les objectifs de formation sont les suivants :

- une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;
- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;
- le calcul de dérivées et de primitives ;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable.

Les étudiants et étudiantes doivent connaître les principales techniques de calcul et savoir les mettre en pratique sur des cas simples. Cette partie de l'UE reste essentiellement axée vers un aspect calculatoire et application de techniques ou méthodes. Les théorèmes, propriétés utilisés seront justifiés et démontrés dans l'UE Analyse-Probabilités 2 du second semestre.

L'objectif de la deuxième partie de l'UE, portant sur les suites réelles ou complexes, est par contre de fonder rigoureusement le cours d'analyse relatif aux propriétés des nombres réels. Il convient d'insister sur l'aspect fondateur de la propriété de la borne supérieure.

Technique fondamentale de calcul en analyse

Inégalités dans $\mathbb{R}$

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$. Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.

Valeur absolue. Inégalité triangulaire. Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $|x - a| \leq b$.

Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum. Les notions de sup et inf seront vues dans le cadre des suites, plus tard dans ce cours. Parties entières d'un nombre réel. Notation $[x]$.

Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition. Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles. Les étudiantes et étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles des fonctions obtenues par transformations simples, comme $x \mapsto f(x) + a$ ou $x \mapsto f(ax)$. Parité, imparité, périodicité. Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées. Traduction géométrique de ces propriétés. Une fonction f est bornée si, et seulement, si $|f|$ est majorée.

Étude de fonctions

Dérivée d'une fonction. Notation $f'(x)$, $\frac{d}{dx}f(x)$. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade.

Caractérisation des fonctions constantes, monotones, strictement monotones parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. Tableau de variation. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe. Asymptotes horizontales. Asymptotes verticales. Application : recherche d'extremum, démonstrations d'inégalités. Asymptotes obliques.

Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque. La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Dérivées d'ordre supérieur.

Convexité

Généralités

La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Interprétation géométrique.

Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I , on a l'inégalité $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$, quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments x_i de I .

Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.

Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables. Position d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances. Dérivée, variations et représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2. Relations $(xy)^a = x^a y^a$, $x^{a+b} = x^a x^b$, $(x^a)^b = x^{ab}$. Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Inégalités $e^x \geq 1+x$, $\ln(1+x) \leq x$. Fonctions circulaires réciproques. Notations Arcsin, Arccos, Arctan. Dérivée, variations et représentation graphique.

Fonctions hyperboliques. Notations cosh, sinh, tanh.

Seule relation de trigonométrie hyperbolique exigible : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

Primitives et intégrales

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs réelles. Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Résultat admis à ce stade.

Définition de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ par $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f . On rappelle, sans démonstration, que pour une fonction continue f , $f \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ a pour dérivée f . On pourra noter $\int^x f(t)dt$ une primitive générique de f .

Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales. Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$, de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Les étudiant-e-s doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées des fonctions composées.

Intégration par parties, changement de variables. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Suites réelles et complexes

Il convient de souligner l'intérêt des suites, tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).

Ensembles de nombres usuels

Entiers naturels, relatifs, décimaux, rationnels, réels, irrationnels. Les constructions de ces ensembles sont hors programme. Approximations décimales d'un réel. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Notation $\sup X$, $\inf X$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tous a, b de X tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.

Généralités sur les suites réelles

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.

Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite. Pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, notation $u_n \rightarrow \ell$, $\lim u_n = \ell$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Unicité de la limite. Suite convergente, divergente.

Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient. Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.

Passage à la limite d'une inégalité large.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration. Utilisation d'une majoration de la forme $|u_n - \ell| \leq v_n$ où (v_n) converge vers 0.

Suites monotones

Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.

Suites extraites

Suites extraites. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers ℓ , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ . La notion de valeur d'adhérence est hors programme. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Principe de démonstration par dichotomie.

Traduction séquentielle de certaines propriétés

Partie dense de $\mathbb{R}$. Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.

Caractérisation séquentielle de la densité. Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).

Suites particulières

Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético-géométrique. Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$, recherche d'une solution constante et détermination des solutions. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Les étudiants et étudiantes doivent savoir déterminer une expression du terme général de ces suites.

Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples.

Représentation géométrique. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.



Algèbre et arithmétique 1 - AR1

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AR1	9	30	48	0	78	Algèbre et arithmétique 1

Cette UE vise à aménager un passage progressif de la classe de terminale à l'enseignement supérieur en commençant par renforcer et approfondir les connaissances des bacheliers et bacheliers en ce qui concerne les bases du raisonnement et du vocabulaire mathématique.

Le chapitre « Raisonnement et vocabulaire ensembliste » regroupe des notions de logique et de raisonnement dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiantes et étudiants à la fin du premier semestre. Ce chapitre a vocation à être enseigné en début de semestre en parallèle du chapitre sur les nombres complexes.

Nombres complexes

L'objectif de ce chapitre, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et la notion d'équations algébriques ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

Remarque : les nombres complexes ne sont pas au programme de la spécialité mathématiques de terminale, seulement de l'option « Maths expertes » qui n'est pas un prérequis de la L1 maths.

Nombres complexes

La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible. Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes.

Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur. On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilités avec les opérations. Image du conjugué dans le plan complexe. Définition du module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique de $|z - z'|$, cercles et disques. Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Notation $\mathbb{U}$. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.

Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.

Les étudiant-e-s doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Linéarisation. Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$, $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Formule de Moivre. Les étudiant-e-s doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Formes trigonométriques

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.

Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$. Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines. Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

Racines n-ièmes

Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique. Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$. Module et arguments de e^z . Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $e^z = e^{z'}$ si, et seulement si, $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $e^z = a$.

Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$. Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Étude détaillée des similitudes directes. Utilisation des nombres complexes pour calculer la nature et les caractéristiques géométriques de la composée de deux similitudes. L'ensemble des similitudes directes est un ensemble formé de bijections du plan, stable par composition et passage à l'inverse. Utilisation sur des exemples des nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie plane Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations. Interprétation géométrique de la conjugaison. L'étude générale des similitudes indirectes est hors programme.

Sommes et produits

Somme et produit d'une famille de nombres réels. Notations $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$. Cas où I est vide. Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de groupements de termes. Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n x^k$. factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies. Exemples de sommes triangulaires. Rappel sur la factorielle, les coefficients binomiaux. Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$. Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiantes et étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme. On évitera, sauf à l'occasion de quelques exercices, la manipulation d'ensembles « de second niveau » (ensemble des parties d'un ensemble, ensemble des applications d'un ensemble dans un autre).

Les notions de relation d'ordre et d'équivalence ne sont pas au programme, mais on signalera à l'occasion des exemples rencontrés dans le cadre de ce cours l'existence de ces notions et le nom des différentes propriétés mises en jeu (réflexivité, symétrie, ...).

Rudiments de logique

Quantificateurs. L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclus.

Implication, contraposition, équivalence. Les étudiantes et étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.

Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse. Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante. Raisonnement par récurrence (simple, double, forte). On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Ensembles

Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie). Ensemble vide.

Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire. Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\bar{A}$ et ${}_{E}C_A$ pour le complémentaire.

Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Ensemble des parties d'un ensemble. Notation $\mathcal{P}(E)$. Recouvrement disjoint, partition.

Applications

Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application. Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F . Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E . Famille d'éléments d'un ensemble. Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. Notation $\mathcal{I}_A$. Restriction et prolongement. Notation $f|_A$.

Image directe d'un ensemble par une application. Notation $f(A)$.

Image réciproque. Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre. Composition.

Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.

Bijection, réciproque. Notation f^{-1} . Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences. L'approche préconisée reste élémentaire en ce qu'elle ne fait pas appel au langage des structures algébriques, en particulier la construction de $\mathbb{Z}$ est hors programme. Remarque : les étudiantes et étudiants ayant suivi l'option Maths expertes en terminale ont déjà eu un cours d'arithmétique.

Axiomes de Peano

Existence et définition de $\mathbb{N}$. Propriétés des opérations sur les entiers. Définition intuitive de $\mathbb{Z}$. Lien avec le principe de récurrence.

Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne. Caractérisation des couples d'entiers associés.

PGCD et algorithme d'Euclide

PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b . Notation $a \wedge b$.

Algorithme d'Euclide. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b . Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb . Extension au cas de deux entiers relatifs.

Relation de Bézout. L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout. On pourra introduire l'algorithme d'Euclide étendu. L'étude des idéaux de $\mathbb{Z}$ est hors programme.

PPCM. Notation $a \vee b$. Lien avec le PGCD.

Entiers premiers entre eux

Couple d'entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout. Forme irréductible d'un rationnel. Lemme de Gauss.

PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Nombres premiers

Nombres premiers. Crible d'Eratosthène. L'ensemble des nombres premiers est infini.

Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.

Pour p premier, valuation p -adique. Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p -adiques.

Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p -adiques.

Congruences

Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b [n]$.

Opérations sur les congruences : somme, produit. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme.

Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n . Petit théorème de Fermat.



Introduction aux structures algébriques - ISA

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ISA	2	3	12	0	15	Introduction aux structures algébriques

Loi de composition interne

Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable. Inversibilité et inverse de deux éléments inversibles. Notion de groupe, anneau, corps.

Relation d'équivalence, relation d'ordre

Relation binaire sur un ensemble. Relation d'équivalence, classes d'équivalence. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble. Relation d'ordre. Ordre total, partiel.

Les ensembles de nombres

Construction de $\mathbb{Z}$, construction de $\mathbb{Q}$. Construction de l'addition, la multiplication et la relation d'ordre usuelle dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. On pourra présenter brièvement une construction de $\mathbb{R}$.



Modélisation mathématique - MOM

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
MOM	3	15	15	0	30	Modélisation mathématique

Trigonométrie

Fonctions trigonométriques, graphes associés, dérivées.

Cercle trigonométrique, relations classiques $\cos(\pi - a)$, $\cos(\pi/2 + a)$ etc.

Formules d'addition $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, etc. sans insister sur une démonstration.

Construction de tan et de son graphe. Applications de ces relations à tan.

Systèmes de coordonnées classiques et bases locales

Coordonnées cartésiennes. Coordonnées polaires.

Définition d'une trajectoire, d'une courbe paramétrée du plan $(x(t), y(t))$.

Applications : description d'une même trajectoire dans deux systèmes de coordonnées différents.

Applications : liens avec le plan complexe.

Calcul vectoriel pour la mécanique

Bases orthonormées, composantes, notion de vecteur position et de vecteurs liés.

Produit scalaire : définition générale $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos(u, v)$ et par composante $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

Conséquence du produit scalaire : norme, définition de l'angle entre deux vecteurs du plan.

Utilisation du produit scalaire : projection de vecteurs, détermination des composantes $u_i = u \cdot e_i$, changement de bases.

Application : notions de vecteur-forces et équilibre d'un point, règle du parallélogramme, accélération tangentielle et normale.

Principe fondamental

Principe fondamental appliqué au point matériel.

Équation de l'oscillateur ($u'' + u = 0$ et $u'^2 + u^2 = \text{cste}$), conditions initiales, solutions générales (donnée sans démonstration).

Application à des cas simples pour diverses configurations (pendules, masses-ressorts).

Problèmes à trajectoires forcées et à trajectoires libres.

Dérivation des fonctions $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, et de vecteurs

Rappel pour les dérivées de fonctions $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$: dérivées, règles de dérivations usuelles : produit, fonctions composées.

Applications : pentes, tangente, approximation locale et accroissement $df = f' dx$.

Dérivées d'un vecteur position : vitesse et accélération.

Liens entre la vitesse et la trajectoire : « la vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire ».

Règle de la chaîne :

les fonctions considérées étant suffisamment régulières, $\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$.

Dérivation des fonctions $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Représentation graphique.

Dérivées partielles en un point. Vecteur Gradient.

Interprétation sur une carte d'altitude $h(x, y)$.

Application à l'énergie potentielle d'une force.

Introduction de la dérivée totale exacte.



Enjeux et défis de la Transition écologique et sociale

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
TES	2	18	0	0	18	Enjeux et défis de la Transition écologique et sociale

Prérequis -

Culture générale en sciences et outils scientifiques, curiosité sur les choses de la nature

Les enjeux actuels de la Transition écologique et sociale portent sur le changement climatique, la crise de la biodiversité, la gestion des ressources naturelles et leur exploitation dans les limites d'un développement durable et responsable.

La sensibilisation des scientifiques à ces enjeux passe par une connaissance minimale des systèmes naturels, tout au long de l'histoire de la terre. L'objectif du cours est donc d'inscrire les enjeux de la Transition écologique et sociale dans le système Terre, système complexe par essence. Les outils utilisés sont ceux de la géophysique, de la géochimie, de la géologie.

PLACE DANS LE PROGRAMME D'ÉTUDE

Sensibilisation des étudiants et étudiantes en mathématiques aux enjeux de la Transition écologique et sociale.



Langue vivante 1 - LV1

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
LV1	0	0	15	0	15	Langue vivante 1

Anglais, allemand ou espagnol.

L'enseignement des langues est organisé par le SCELVA. Il est annuel mais compte au deuxième semestre.

<https://langues.univ-rennes1.fr/lenseignement-des-langues-pour-lufr-mathematiques>



Projet personnel professionnel de l'étudiant - 3PE

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
3PE	1	1	0	0	1	Projet personnel professionnel

Il s'agit d'une UE en totale autonomie. Les étudiants et étudiantes devront faire les cours

- Poursuite d'études
- Je fais une candidature sélective
- Le CV

disponibles sur l'espace de cours de leur ENT.



Algèbre et géométrie 2 - AG2

S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AG2	9	30	48	0	78	Algèbre et géométrie 2

L'objectif de cette UE est d'introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire. Il importe de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie.

La première partie de cet enseignement présente une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire. Les objectifs sont les suivants :

- acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;
- reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;
- définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires.

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général.

Le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

Systèmes linéaires à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues. Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$. Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Opérations sur les matrices

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.

Produit matriciel : bilinéarité, associativité. Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A . Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$. Transposée d'une matrice. Notation A^T . Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes en termes de produit matriciel.

Systèmes linéaires

Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.

Systèmes compatibles. Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A . Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$ où X_0 est une solution particulière et Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé. On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

Anneau des matrices carrées

Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents. Matrice identité. Notation I_n . Matrice scalaire. Matrices symétriques, antisymétriques.

Formule du binôme. Application au calcul de puissances.

Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.

Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire. Notation $GL_n(\mathbb{K})$. Inverse d'une transposée. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité. Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire : l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire. Cas particulier des matrices diagonales.

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.

Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs. On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs. Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs. On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

Sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation. Sous-espace nul. Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.

Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Ensemble des solutions d'un système homogène. Sous-espace vectoriel engendré par une partie X . Notations $\text{Vect}(X)$, $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant X contient $\text{Vect}(X)$.

Familles de vecteurs

Familles (parties) génératrices.

Familles (parties) libres, liées. Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Base, coordonnées. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.

Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection. La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

Sous-espaces supplémentaires.

On incite les étudiants et étudiantes à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 ou 3.

Espaces vectoriels de dimension finie

Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E . Existence de bases en dimension finie.

Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice, on peut extraire une base.

Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.

Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie. Dimensions de $\mathbb{K}$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs. dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie. Rang d'une famille finie de vecteurs. Notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de sous-espaces ; formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Dimension commune des supplémentaires.

Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe d'un nombre fini de sous-espaces.

Applications linéaires

Généralités

Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphismes. Image et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité. L'ensemble $L(E, F)$ est un espace vectoriel. Bilinearité de la composition.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in L(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i), i \in I)$.

Image d'une base par un isomorphisme.

Application linéaire de rang fini, rang. Invariance par composition par un isomorphisme. Notation $\text{rg}(u)$. Le rang de $v \circ u$ est minoré par $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

Endomorphisme

Identité, homothéties. Notation Id_E .

Anneau $(L(E), +, \circ)$. Non commutativité si $\dim E \geq 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in L(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = Id$. Automorphismes. Groupe linéaire. Notation $GL(E)$.

Détermination d'une application linéaire

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une et une seule application $u \in L(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u . Classification, à isomorphisme près, des espaces de dimension finie par leur dimension.

Une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est bijective si, et seulement, si elle est injective, si, et seulement si, elle est surjective.

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite. Dimension de $L(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$ et si $u_i \in L(E_i, F)$ pour $i = 1$ ou 2 , alors il existe une et une seule application $u \in L(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour $i = 1$ ou 2 .

Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in L(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$.

Théorème du rang : $\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$.

Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire. Formes coordonnées relativement à une base.

Hyperplan défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan. En dimension n , les hyperplans sont exactement les espaces de dimension $n - 1$. Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.

Si E est un espace de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Systèmes d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, des droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base. exemple : matrice dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.

Isomorphisme d'espaces vectoriels de $L(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.

Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $L(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.

coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Cas particulier des endomorphismes.

Applications linéaires canoniquement associées à une matrice

Applications linéaires canoniquement associées à une matrice. On identifie ici $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.

Noyau, image et rang d'une matrice. Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.

Une matrice carrée est inversible si, et seulement, si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si, et seulement si, ses colonnes engendrent $\mathbb{K}^n$ ou si, et seulement si, son rang est n . Lien entre les diverses notions de rang. Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.

Systèmes linéaires

Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.

Le système $AX = B$ est compatible si, et seulement si, B appartient à l'image de A . Structure affine de l'espace des solutions.

Si A est carré et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution. Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Changements de bases et équivalence

Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre. La matrice de passage $P_e^{e'}$ de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e . Inversibilité et inverse de $P_e^{e'}$.

Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme. Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme est simple.

Matrices équivalentes et rang

Si $u \in L(E, F)$ est de rang r , il existe une base e de E et une base f de F telles que : $\text{Mat}_{e,f}(u) = J_r$. La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.

Matrices équivalentes. Une matrice est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à J_r . Classification des matrices équivalentes par le rang.

Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites. Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang. Application : calcul du rang.

Matrices semblables et trace

Matrices semblables. Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace, relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Notations $\text{tr}(A)$, $\text{Tr}(A)$.

Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$. Trace d'un projecteur.



Analyse et probabilités 2 - AP2

S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AP2	9	30	48	0	78	Analyse et probabilités 2

Dans cette U.E., on démontre les théorèmes de base relatifs aux fonctions réelles de variable réelle. Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles. On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a si a est réel, avec un intervalle $]A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A[$ si $a = -\infty$.

L'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ est l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence. Sur des exemples, on met en évidence divers comportements (convergence lente, géométrique, quadratique) en explicitant le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. On pourra, en particulier, présenter la méthode de Newton. De même l'étude de la dérivabilité donne un prétexte pour présenter la notion de discrétisation, à travers la méthode d'Euler.

Limites et continuité

Ce paragraphe consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà abordées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, l'enseignant-e a la liberté d'admettre certains résultats. Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).

Limite d'une fonction en un point

Étant donné un point a de $\mathbb{R}$ appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a . Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Unicité de la limite. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Si f est définie en a et possède une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si f possède une limite finie en a , f est bornée au voisinage de a .

Limite à droite, limite à gauche.

Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point. La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$. Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires. Principe de démonstration par dichotomie.

Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue. Une fonction continue sur un intervalle réel, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone. La démonstration n'est pas exigible.

Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle. La démonstration n'est pas exigible.

Dérivabilité

Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité en un point, nombre dérivé. Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Rappels sur les opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque. Tangente au graphe d'une réciproque.

Extremum local et point critique

Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur. Un point critique est un zéro de la dérivée.

Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle. Utilisation pour établir l'existence de zéros d'une fonction.

Égalité des accroissements finis. Interprétations géométrique et cinématique.

Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K , alors f est K -lipschitzienne. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f'(x) = \ell$, alors

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. Interprétation géométrique. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a .

Fonctions de classe C^k

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonctions de classe C^k .

Opérations sur les fonctions de classe C^k , C^∞ : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque. Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

Dénombrement

Ce chapitre est introduit essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique. Il permet de modéliser certaines situations combinatoires et offre un nouveau cadre à la représentation de certaines égalités. Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- parmi les propriétés du cardinal d'un ensemble fini, les plus intuitives sont admises sans démonstration ;
- l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas attendu du programme.

Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini. Notations $|A|$, $\text{Card}(A)$, $\#A$.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si, et seulement si, elle est injective, si, et seulement, si elle est surjective. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

Cardinal de la réunion de deux ensembles finis, du complémentaire, de la différence, du produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. La formule du crible est hors programme.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons

Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n .

Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n . Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Probabilités sur un univers fini

Ce chapitre a pour objectif de donner aux étudiantes et étudiants une bonne pratique des variables aléatoires dans le cadre fini. Pour enrichir la pratique de la modélisation probabiliste développée au lycée, on met en évidence qu'une situation probabiliste finie peut être décrite par un n -uplet de variables aléatoires, l'univers étant vu dans cette optique comme une source suffisante d'aléa. L'objectif de cette présentation est de pouvoir travailler le plus tôt possible avec des événements construits en termes de variables aléatoires. La construction d'un univers fini susceptible de porter n -uplet de variables aléatoires peut être présentée mais ne constitue pas un objectif du programme.

Les exemples et activités proposés sont de nature plus conceptuelle qu'au lycée. On pourra faire travailler les étudiants et étudiantes sur des marches aléatoires ou des chaînes de Markov en temps fini, sur des permutations aléatoires, des graphes aléatoires, des inégalités de concentration. . .

Univers, événements, variables aléatoires

Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités. On se limite au cas où cet univers est fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles). Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω et à valeurs dans un ensemble E .

Espaces probabilisés finis

Probabilité sur un univers fini. Espace probabilisé fini (Ω, P) . Notation $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leq x)$.

Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ indexée par E et de somme 1.

Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1.

Probabilité uniforme. Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, probabilité de l'événement contraire. Croissance. La formule du crible est hors programme.

Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.

Formule des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes. Par convention $P(A|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

Loi d'une variable aléatoire

Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble E . La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$. Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E . Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.

Variable binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A .

Événements indépendants

Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et de B s'écrit $P(A|B) = P(A)$.

Famille finie d'événements mutuellement indépendants.

L'indépendance deux à deux des événements $A_1, \dots, A_n$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n \geq 3$.

Si A et B sont indépendants, A et $\bar{B}$ le sont aussi. Extension au cas de n événements.

Espérance et variance

Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Espérance $E(X) = \sum_{x \in X} xP(X = x)$ d'une variable aléatoire X . L'espérance est un indicateur de position.

Formule $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(|\omega|)$. Variable aléatoire centrée. Linéarité, positivité, inégalité triangulaire.

Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.

Formule de transfert : si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)f(x)$.

Variance, écart type et covariance

Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle. La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion.

Variable aléatoire réduite. Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Relation $V(aX + b) = a^2V(X)$.

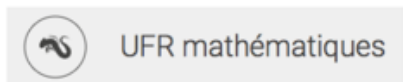
Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale.

Variance d'une somme.

Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov. Application à l'obtention d'inégalités de concentration. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.



Découverte des métiers 1 - DMM1

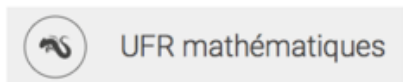
S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
DMM1	1	2	0	0	2	Découverte métiers des maths 1

Travail par groupe.

Un groupe doit choisir un thème, au moins deux livres et justifier ces choix.

Travail final : un rapport écrit par groupe sur le thème choisi exploitant, de manière structurée, des données et des réflexions pertinentes tirées des livres choisis.

L'évaluation porte sur le rapport remis, mais aussi sur la gestion et l'organisation du travail de groupe ainsi que la qualité des interactions, écrites et orales, avec l'enseignant ou l'enseignante.



Langue vivante 1 - LV1

S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
LV1	3	0	15	0	15	Langue vivante 1

Anglais, allemand ou espagnol.

L'enseignement des langues est organisé par le SCELVA. Il est annuel mais compte au deuxième semestre.

<https://langues.univ-rennes1.fr/lenseignement-des-langues-pour-lufr-mathematiques>



Outils informatiques - OI

S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
OI	3	12	0	12	24	Outils informatiques

Objectifs

Cet enseignement est une introduction à l'algorithmie, c'est-à-dire à l'étude de la structure logique générale de toute résolution de problèmes dans le contexte de la programmation informatique. Les objectifs sont :

- d'étudier la formalisation de problèmes simples ;
- d'étudier des démarches de résolution structurées sous forme d'algorithmes ;
- de discuter de l'efficacité d'algorithmes permettant de résoudre un même problème, notamment en terme de coût.

On insiste sur la conception d'un algorithme et la structuration de celui-ci.

Programme

- Formaliser un problème et rédiger les spécifications associées.
- Connaître les structures de contrôle (branchements conditionnels, boucles itératives).
- Connaître les structures de données statiques et dynamiques.
- Maîtriser l'approche descendante pour la résolution de problèmes complexes (à partir du problème initial, générer des sous-problèmes dont la résolution est plus facile à concevoir). Notions de fonction et de procédure.
- Avoir des notions sur l'évaluation des performances d'un algorithme (notion de complexité algorithmique).
- Traduire un algorithme simple en programme Python.

Compétences visées

- Être capable d'analyser un problème simple et de formaliser cette analyse à travers la conception d'un algorithme de résolution.
- Être capable de réaliser un programme en Python mettant en œuvre un algorithme et permettant la résolution effective du problème initial considéré sur ordinateur.
- Maîtriser la programmation dans le langage Python.
- Être capable d'analyser et corriger les erreurs de syntaxe d'un programme simple en langage Python.



Les UE spécifiques du parcours Défi

Compléments maths défi 1 - CMD1

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CMD1	3	15	15	0	30	Compléments maths défi 1

Cette U.E. se propose d'aborder les mathématiques de manière complémentaire à leur forme d'enseignement habituelle tout en s'initiant à la recherche mathématique. Elle se décompose en deux modules : Maths Générales (MG) et Modélisation (MOD).

Mathématiques Générales - MG - 15hCM

Cet enseignement aborde des aspects à la fois divers et fondamentaux des mathématiques. Il permet de découvrir différentes facettes des mathématiques qui justifient qu'on s'y intéresse. Le choix et le traitement des thèmes abordés, adaptés aux étudiants et étudiantes de L1, sont laissés à l'appréciation de l'enseignant-e.

Le cours pourra, par exemple, comprendre une initiation à l'« axiomatique moderne » à partir des axiomes de la Géométrie. Les notions de démonstration logique (sans formalisme), de modèle d'un système d'axiomes, des preuves d'indépendance et de non contradiction pourront aussi être abordées. La notion de proposition indécidable à partir de plusieurs exemples et les théorèmes d'incomplétude de Gödel (sans démonstration) pourront être introduits. On pourra ainsi présenter la notion de décidabilité, de machines de Turing, la « thèse de Turing », dont les enjeux pourront être expliqués.

Modélisation - MOD - 15h TD

Les étudiantes et étudiants s'initieront à la recherche via l'étude de quelques problèmes « concrets ». Voici quelques exemples qui pourront servir de support au cours. Cette liste n'est pas exhaustive et pourra être complétée.

- la suite de Fibonacci ;
- le dooble ;
- les carrés magiques ;
- la perspective cavalière et les anamorphoses en peinture ;
- les fractales ;
- les cellules de Voronoï ;
- la cryptographie ;
- les fractales ;
- la dissection géométrique.

Compléments maths Défi 2 - CMD2

S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CMD2	3	0	24	0	24	Compléments maths défi 2

Cette U.E. permet aux étudiantes et étudiants de se préparer aux oraux et écrits des concours (magistères de mathématiques, écoles d'ingénieurs, ...) et apporte quelques compléments en mathématiques.

Chaque étudiant-e est mis-e en situation de passage d'un oral de mathématiques. L'ensemble du groupe assiste à tous les oraux pour profiter des suggestions de l'enseignant-e.

Le programme est celui des enseignements de mathématiques de lycée et de première année de licence de mathématiques.

Les mineures en L1



Initiation à la programmation impérative - IPI

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
IPI	5	9	15	18	42	Initiation à la programmation impérative

Ce cours initie les étudiants et les étudiantes à la programmation impérative en abordant les structures de contrôle (conditionnelles, itératives), les fonctions et passages de paramètres, ainsi que les types primitifs et les types construits. Le cours se base sur le langage Python.

Introduction à la programmation impérative

Pseudo langage impératif pour les robots
Conditionnelle, variable et itérative

Itératives

Raisonnement par récurrence. Conditions de terminaison. Itératives à conditions simples et complexes. Autres formes conditionnelles.

Fonctions et paramètres

Structures de programme et fonctions. Représentation mémoire. Passage par valeur/passage par référence.

Structures de données

Types primitifs et types construits. Construction et manipulation de structures. Structures complexes.



Physique 1 - PH1

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PH1	5	7.5	25.5	9	42	Physique 1

Cette UE peut se partager en deux UE :

S1	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PH1A	3	0	18	6	24	Physique 1-A
PH1B	2	7.5	7.5	3	18	Physique 1-B

Physique 1 - A (Optique)

Objectifs d'apprentissage -

Cette UE vise à enseigner, les rudiments de l'optique géométrique qui sont essentiels pour la manipulation et la compréhension de beaucoup de systèmes scientifiques.

Prérequis -

Programme de physique et de mécanique de la spécialité physique-chimie de la terminale générale.

Travaux dirigés

Application des lois de Snell-Descartes.

Recherche des images, calcul de grandissements.

Tracé de rayons et passage aux interfaces planes. Cas de la réflexion totale. Dioptrique sphériques, tracé de rayons sur des lentilles. Associations de lentilles, avec tracé de rayons.

Calcul de fréquences et de longueurs d'ondes. Puissance lumineuse et nombre de photons.

Travaux pratiques

Lois de Snell-Descartes.

Lentilles et associations de lentilles.

Indice du prisme.

Compétences -

À l'issue des enseignements, les étudiantes et étudiants devraient être capable

- d'effectuer des tracés de rayon sur des problèmes simples d'optique simples ;
- de savoir associer des lentilles pour réaliser des instruments optiques simples ;
- de connaître les bases de l'optique géométrique.

Physique 1 - B (Électricité)

Objectifs d'apprentissage -

Cette UE vise à enseigner, les bases de l'électricité aussi bien en régime continu qu'en régime transitoire ou en régime sinusoïdal.

Prérequis -

Programme de physique et de mécanique de la spécialité physique-chimie de la terminale générale. Nombres complexes

Cours

Associations de dipôles.

Résolution des circuits en continu.

Régime sinusoïdal alternatif (diagramme de Fresnel, écriture complexe).

Travaux dirigés

Calcul d'associations de résistances.

Calculs de point de fonctionnement de circuits.

Calcul de courant et de tension en régime alternatif.

Travaux pratiques

Détermination de résistances puis de condensateur inconnu à l'aide du pont de Wheatstone.

Compétences -

À l'issue des enseignements, les étudiantes et étudiants devraient être capables de

- calculer le point de fonctionnement d'un circuit simple ;
- savoir résoudre des circuits avec différentes méthodes ;
- connaître les caractéristiques du courant continu ;
- savoir résoudre les circuits en courant alternatif.



Initiation à la programmation fonctionnelle - IPF

S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
IPF	5	12	12	18	42	Initiation à la programmation fonctionnelle

Prérequis -

Avoir suivi une UE de programmation impérative.

Le paradigme fonctionnel de programmation est en plein essor. Les grands représentants historiques de la programmation fonctionnelle (Lisp, Scheme, Haskell, OCaml, ...) ont démontré leur utilité, leur élégance et leur efficacité. Aussi, de nombreux langages haut-niveau modernes (PureScript, Scala, Clojure, Kotlin, Reason, TypeScript, JavaScript, F#, Rust, Elm, Julia, Racket, Lua, Go, Java, Python) l'intègrent et le promeuvent avec un réel succès (programmes élégants et succints, modularité, réutilisation de code, et sûreté de fonctionnement).

Ce cours initie les étudiants et les étudiantes à ce paradigme important, en approchant les concepts de manière pratique, et en en illustrant les avantages sur des exemples concrets. À l'issue de ce cours, les étudiantes et les étudiants auront acquis une première expérience en programmation et algorithmique fonctionnelles et connaîtront des techniques de programmation permettant d'améliorer la concision, la modularité et la robustesse de leurs développements. Leur expérience avec un environnement de développement intégré sera renforcée

L'U.E. comprend quatre grands thèmes :

1. Bases de la programmation fonctionnelle : fonctions, expressions, évaluation, immutabilité
2. Fonctions récursives sur les entiers naturels
3. Types algébriques : fonctions sur des structures récursives (listes, arbres binaires)
4. Ordre supérieur : abstraction, concision et réutilisation de code

Elle est constituée de cours, de TD et de TP. Le langage de programmation utilisé pour illustrer les concepts étudiés est Idris 2.



Physique 2 - PH2

S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PH2	5	16.5	16.5	9	42	Physique 2

Cette UE peut se partager en deux UE :

S2	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PH2A	3	10.5	10.5	6	27	Physique 2-A
PH2B	2	6	6	3	15	Physique 2-B

Physique 2-A

Cette UE est composée de deux modules :

Module	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
1	0	7.5	7.5	3	18	Mécanique
2	0	3	3	3	9	Champs E et B

Objectifs d'apprentissage -

Cette UE vise à introduire certaines notions complémentaires en mécanique pour aller jusqu'aux lois de Kepler. Elle cherche aussi à introduire les notions de champ et de potentiel.

Prérequis -

Programme de mécanique (UE MOM) du S1.

Cours

Mécanique

La quantité de mouvement et les collisions.

Le moment cinétique.

Les forces centrales : mouvement des planètes lois de Kepler.

Moment d'inertie, rotation des solides.

Champs électrique (E) et magnétique (B)

Électrostatique dans le vide, loi de Coulomb, potentiel, ligne de champ et de potentiel.

Notion de champ magnétique, loi de Biot et Savart.

Mouvement des particules dans des champs E et B .

Travaux dirigés

Collision élastique, collision inélastique.

Utilisation du théorème du moment cinétique.

Quelques exemples de forces centrales force de gravitation et force électrostatique.

Calcul de champ électrique dans des cas simples.

Travaux pratiques

Déviation d'électrons dans un champ E et dans un champ B .

Chocs sur la table à coussin d'air.

Compétences -

À l'issue des enseignements, les étudiants et étudiantes devraient être capables

- d'avoir des notions en ce qui concerne les champs électriques et magnétiques ;
- de calculer ces champs dans des cas simples ;
- de pouvoir appréhender la physique des chocs ;
- de connaître des résultats sur les forces centrales ;
- d'avoir des notions sur le moment cinétique et les moments d'inertie.

Physique 2-B (oscillateur harmonique)

Objectifs d'apprentissage -

Cette UE vise à familiariser l'étudiant et l'étudiante avec l'oscillateur harmonique à une dimension, dans le cadre des oscillations libres et des oscillations forcées via le phénomène de résonance.

Prérequis -

Programme de PH2A du S2. Module d'électricité PH1B du S1.

Cours

Oscillateur harmonique.

Rappels sur le régime sinusoïdal : diagramme de Fresnel. Écriture complexe.

Oscillations libres : établissement des équations. Résolution. Régime oscillant, critique et apériodique. Portrait de phase.

Oscillations entretenues : équations. RLC série. Problème mécanique.

Résonance : Résonance en courant. Résonance en position. Variation de phase. Acuité de la résonance. Aspect énergétique.

Antirésonance.

Travaux dirigés

Oscillateur harmonique amorti.

Calcul de réponse impulsionnelle de l'oscillateur suivant la valeur de l'amortissement.

Calcul de facteurs de qualité en résonance. Filtres en électricité et en mécanique. Circuit bouchon.

Travaux pratiques

Oscillateur électrique - Oscillations libres, oscillations forcées.

Oscillateur mécanique - Oscillations libres, résonance.

Compétences -

À l'issue des enseignements, les étudiants et étudiantes devraient être capables

- d'identifier un problème physique apparenté à l'oscillateur harmonique ;
- de résoudre les problèmes simples liés à l'oscillateur harmonique ;
- de connaître les différents régimes d'oscillation libre ;
- de connaître le facteur de qualité et l'acuité de la résonance.

Les U.E. de L2



Algèbre 3 - AL3

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AL3	10	36	48	0	84	Algèbre 3

Structures algébriques usuelles

Groupes et sous-groupes

Groupe. Produit fini de groupes. Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.

Sous-groupe. Caractérisation. Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$

Morphismes de groupes

Morphisme de groupes. Exemples : signature, déterminant.

Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme. Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme. Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.

Groupes monogènes et cycliques

Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Groupe monogène, groupe cyclique. Groupe des racines n -ièmes de l'unité.

Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Ordre d'un élément dans un groupe

Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément. Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x .

Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G , alors, pour n dans $\mathbb{Z}$, on a $x^n = e \iff d|n$.

L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe. La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.

Anneaux

Anneau. Produit fini d'anneaux. Les anneaux sont unitaires.

Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux.

Anneau intègre. Corps. Sous-corps. Les corps sont commutatifs.

Idéaux d'un anneau commutatif

Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre. Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.

Idéaux de $\mathbb{Z}$.

Polynômes

L'objectif est d'étudier les propriétés de base des polynômes et fractions rationnelles. Il s'agit d'objets particulièrement riches dont l'étude interagit avec beaucoup de thèmes. Par exemple,

- l'étude des équations algébriques enrichit le calcul algébrique et suggère des problèmes de localisation de racines, mettant en jeu des techniques analytiques dans le cas réel, plus géométrique dans le cas complexe ;
- l'interpolation de Lagrange permet de reconstituer un polynôme en fonction de ses valeurs en suffisamment de points et donne lieu à des problèmes issus de la théorie de l'approximation (majoration de l'erreur d'interpolation).

L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$, ce qui autorise un exposé allégé. D'autre part, le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Anneau des polynômes à une indéterminée

Anneau $\mathbb{K}[X]$. La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.

Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .

Degré d'une somme, d'un produit. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre. Composition.

Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés. Théorème de la division euclidienne. Algorithme de la division euclidienne.

Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Théorème de Horner. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.

Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formule de Viète). Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues ; les autres doivent être retrouvées rapidement.

Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.

Formule de Taylor polynomiale.

Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B . Algorithme d'Euclide. L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés ; un seul est unitaire. On le note $A \wedge B$.

Relation de Bézout. L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout. Algorithme d'Euclide étendu. L'étude des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.

PPCM. Notation $A \vee B$. Lien avec le PGCD.

Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. Adaptation des résultats présentés lors de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss. La démonstration est hors programme.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

Formule d'interpolation de Lagrange

Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un, et un seul, $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i : $P(x_i) = y_i$. Expression de P . Description des polynômes Q tels que pour tout i : $Q(x_i) = y_i$.

Fractions rationnelles

Fractions rationnelles

Corps $\mathbb{K}(X)$. La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors-programme.

Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. La démonstration est hors programme. On évitera toute technicité excessive. Application au calcul de primitives, de dérivées k -ièmes. Si λ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X-\lambda}$. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

Groupe symétrique

Généralités

Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Notation S_n .

Cycle, transposition. Notation $(a_1 a_2 \dots a_p)$.

Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité. La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants et les étudiantes doivent savoir décomposer une permutation. Commutativité de la décomposition.

Signature d'une permutation

Tout élément de S_n est un produit de transpositions.

Signature : il existe une et une seule application ε de S_n dans $\{-1, 1\}$ telle que $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ et $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ' . La démonstration n'est pas exigible.



Analyse et probabilités 3 - AP3

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AP3	10	36	48	0	84	Analyse et probabilités 3

Intégration

L'objectif est de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment et d'en établir les propriétés principales. Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues n'est pas un attendu du programme.

Le corps $\mathbb{K}$ est pris égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'enseignant-e peut soit se placer d'emblée dans le cadre des fonctions à valeurs complexes, soit traiter en premier lieu le cas réel avant de procéder à une brève extension.

Continuité uniforme

Continuité uniforme. Exemple des fonctions lipschitziennes.

Théorème de Heine. La démonstration n'est pas exigible.

Fonctions continues par morceaux

Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier.

Fonction continue par morceaux. Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$. Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité triangulaire intégrale : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Relation de Chasles. Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$. Propriétés correspondantes.

Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = 0$.

Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période. Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Sommes de Riemann

Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$ Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour f lipschitzienne.

Lien entre intégrale et primitive

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

Formules de Taylor globales

Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.

Développements limités

Les étudiants et étudiantes doivent connaître les développements limités usuels et savoir rapidement mener à bien des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Relations de comparaison : cas des fonctions

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point $a \in \mathbb{R}$. Lien entre ces relations.

Notations $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$.

La relation $f(x) = o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement.

Pour la relation $f(x) \sim g(x)$, on donne les deux formes $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ et $f(x) = g(x) + o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs.

Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \rightarrow 0$.

Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^b(x)$, x^α , e^{cx} en $+\infty$, de $\ln^b(x)$, x^α en 0. Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O . Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f , g et h vérifient $f \leq g \leq h$ et si $f(x) \sim h(x)$, alors $f(x) \sim g(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature. Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a .

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient. On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point d'une fonction de classe C^n . Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\arctan$, et de $\tan$ à l'ordre 3.

Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes. Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

Relations de comparaison : cas des suites

Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions. Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

Problèmes d'analyse asymptotique

Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales. La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$. La démonstration n'est pas exigible.

Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des réels ou des complexes.

L'objectif est de définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, la notion d'intégralité sur un intervalle non compact. La technicité n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs : par exemple intégrales eulériennes, transformées intégrales ou intégrales apparaissant dans les calculs de densités de lois de probabilités (loi de Cauchy, loi exponentielle).

Le programme ne contient aucune forme du théorème de Fubini, qui pourra être admis pour traiter un exercice ou un problème nécessitant son utilisation.

Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f$ cette limite. Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Linéarité de l'intégrale sur $[a, +\infty[$, positivité. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.

Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a, +\infty[$ si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Si f est positive sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement, si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$.

Pour f et g deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:

- si $0 \leq f \leq g$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ;
- si $f(x) = O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \sim g(x)$ en $+\infty$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f .

Intégration sur un intervalle quelconque

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$. Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».

Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a, b]$, de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ sur $[b, a[$.

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, linéarité et positivité de l'application $f \mapsto \int_I f$ sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge. Relation de Chasles. Inégalité triangulaire.

Si f est continue et intégrable sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle. Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe C^1 , les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. Les étudiant-e-s peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).

Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t) g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt$. L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature.

Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence. La fonction de référence est positive.

Séries numériques

Les objectifs majeurs en la matière portent sur les séries à termes positifs et la convergence absolue. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

Généralités

Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente. La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.

Lien suite-série. La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme. Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Séries à termes positifs ou nuls

Une série à termes positifs converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n , la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(u_n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Application à l'étude de sommes partielles. Séries de Riemann.

Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

La convergence absolue implique la convergence. Le critère de Cauchy est hors programme.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum (-1)^n u_n$ converge. Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.

Probabilités

Couples de variables aléatoires

Couple de variables aléatoires.

Loi conjointe, lois marginales. Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n -uplets de variables aléatoires. La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y) , les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y .

Covariance.

Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$. Extension aux n -uplets de variables aléatoires. Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi. Extension au cas de plus de deux coalitions.

Variables aléatoires discrètes

L'objectif est d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes en généralisant celle qui a été effectuée en première année et en fournissant des outils permettant d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un exposé à minima. En particulier :

- la notion de tribu n'appelle aucun développement théorique ;
- la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;
- les diverses notions de convergence des suites de variables aléatoires (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.

Les résultats vus en première année s'étendent de manière très naturelle au cas des variables aléatoires discrètes. Cette extension doit être effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour des activités pratiques. La notion de variable à densité est hors programme.

Espaces probabilisés

Tribu sur un ensemble Ω . On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Événements. Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω , une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application P définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait $P(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$. Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathcal{A} = P(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ s'identifie, via la formule $P(\{\omega\}) = p_\omega$, à une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.

Propriétés élémentaires des probabilités

Continuité croissante : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors : $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n)$.

Continuité décroissante : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors : $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\cap_{n=0}^{+\infty} A_n)$.

Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements, alors : $P(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable. Propriétés presque sûres. Tout développement sur ces notions est hors programme.

Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes. Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants. Notations $P_B(A)$, $P(A|B)$.

Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p . La variable aléatoire X suit la loi $G(p)$ si $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$. Notation $G(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p .

Caractérisation comme loi sans mémoire : $P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$.

Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ . Notation $P(\lambda)$.

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n , $X_n \sim B(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ , alors

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.



Introduction aux applications de l'arithmétique et de l'algèbre - I3A

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
I3A	4	12	12	12	36	Introduction aux applications de l'arithmétique et de l'algèbre

Objectifs d'apprentissage -

Les objectifs de cette U.E. sont :

- connaître la notion de coût d'un algorithme à travers les exemples de l'algorithme d'Euclide et de l'exponentiation binaire rapide ;
- s'initier à la cryptographie et au codage ;
- maîtriser l'algèbre linéaire de base sur des corps finis à travers l'exemple des codes correcteurs d'erreurs (essentiellement sur $\mathbb{F}_2$).

Initiation à la cryptographie

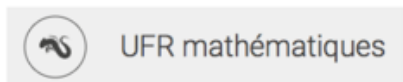
Test de Fermat.
Chiffrement RSA.

Initiation aux codes correcteurs d'erreurs

Codes correcteurs d'erreurs.
Décodage des codes binaires 1-correcteurs d'erreurs.
Code de Hamming.

Introduction aux graphes

Graphes, matrices d'adjacence.
Première notion de valeurs propres.



Découverte des métiers 2 - DMM2

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
DMM2	1	2	0	0	2	Découverte métiers des mathématiques 2

Deux possibilités sont proposées pour cette UE.

- Le traitement d'un sujet, mathématique ou non, élaboré par les étudiants et étudiantes à partir d'une sélection de publications de leur choix. Travail par groupes encadrés par un enseignant ou une enseignante. L'évaluation porte sur un écrit restituant le travail accompli, mais aussi sur la gestion et l'organisation du travail de groupe ainsi que la qualité des interactions, écrites et orales, avec l'enseignant ou l'enseignante.
- Un stage pouvant être fait entre la fin de la première année et le début de la deuxième. L'évaluation porte sur un rapport de stage ou/et une présentation orale.



Langue vivante 1 - LV1

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
LV1	0	0	15	0	15	Langue vivante 1

Anglais, allemand ou espagnol.

L'enseignement des langues est organisé par le SCELVA. Il est annuel mais compte au deuxième semestre.

<https://langues.univ-rennes1.fr/lenseignement-des-langues-pour-lufr-mathematiques>



Algèbre 4 - AG4

S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AL4	6	24	24	0	48	Algèbre 4

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

Produit scalaire

Produit scalaire. Notations $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$.

Espace préhilbertien, espace euclidien.

Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Expression $X^T Y$, $\text{tr}(A^T B)$. Produit scalaire $(f|g) = \int_a^b fg$ sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $C([a, b], \mathbb{R})$.

Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Exemples : sommes finies, intégrales.

Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Identité remarquable $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$. Formule de polarisation associée.

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. Notation $X^\perp$.

L'orthogonal d'une partie est un sous-espace. Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Bases orthonormées

Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie. En dimension finie : dimension de l'orthogonal, vecteur normal à un hyperplan.

Projection orthogonale sur F . Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F .

Distance d'un vecteur à F . Notation $d(x, F)$. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F . En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$; distance de x à $\text{Vect}(u)^\perp$.

Hyperplans affines d'un espace euclidien

Isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) : définition par la linéarité et la conservation des normes, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormale. Symétrie orthogonale, réflexion.

Groupe orthogonal. Notation $O(E)$.

Matrices orthogonales

Matrice orthogonale : définition ${}^tAA = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.

Groupe orthogonal. Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$.

Lien entre les notions de base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie. Matrice orthogonale positive, négative ; isométrie positive, négative.

Groupe spécial orthogonal. Notations $SO(E)$, $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$.

Isométries vectorielles en dimension 2

Description des matrices orthogonales et orthogonales positives de taille 2. Lien entre les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ et les nombres complexes de module 1.

Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. On introduira à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs. Classification des isométries d'un plan euclidien orienté.

Déterminants

Les objectifs sont les suivants :

- introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ; établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;
- indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.

Ici E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Formes n -linéaires alternées

Forme n -linéaire alternée. La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.

Antisymétrie, effet d'une permutation. Si f est une forme n -linéaire alternée et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Si e est une base, il existe une et une seule forme n -linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$. Notation $\det_e$. Toute forme n -linéaire alternée est un multiple de $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.

Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).

Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$.

La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si, et seulement si, $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Orientation d'un espace de dimension 3.

Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée. Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant d'un produit. Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant d'une transposée.

Calcul des déterminants

Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde.

Comatrice

Comatrice. Notation $\text{Com}(A)$.

Relation $A^t \text{Com}(A) = {}^t \text{Com}(A) A = \det(A) I_n$. Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues précédemment et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.

On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Généralités

Matrices semblables, interprétation géométrique. Les étudiants et étudiantes doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F .

Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Droite stable par un endomorphisme.

Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres. La notion de valeur spectrale est hors programme.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n .

Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v . Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée. Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.

Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire. Notations Ξ_u , Ξ_A . Les étudiants et étudiantes doivent connaître les valeurs des coefficients de degré 0 et $n - 1$.

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre. La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ .

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.

Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E . Cas des projecteurs, des symétries.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable. Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut, et il suffit, qu'elle soit semblable à une matrice diagonale. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes. Traduction matricielle.

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que Ξ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u , la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité. Traduction matricielle.

Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Interprétation géométrique.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ et à des cas particuliers simples pour $n = 3$.

Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement, si son polynôme caractéristique est scindé. Traduction matricielle. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.

Un endomorphisme est nilpotent si, et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E .

Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Lien avec les matrices symétriques réelles. La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E , alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u .



Analyse 4 - AN4

S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AN4	6	24	24	0	48	Analyse 4

Espaces vectoriels normés de dimension finie

On prolonge les notions de limites de suites et de fonctions étudiées en première année, et on introduit la topologie des espaces vectoriels normés. L'objectif est triple :

- introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie ;
- introduire la notion de compacité dans un espace vectoriel normé ;
- donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires, suites et séries de fonctions).

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures. Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme.

Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach sont hors programme. Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Normes et espaces vectoriels normés

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé. Vecteurs unitaires. Distance associée à une norme. Inégalité triangulaire. Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules. Parties, suites, fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.

Normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$, $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Suites extraites, valeurs d'adhérence. Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

Comparaison des normes

Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants et étudiantes.

Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Une boule ouverte est un ouvert. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie. Voisinage d'un point.

Fermé d'un espace normé. Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie.

Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés.

Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente. Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A . Caractérisation séquentielle des fermés de A . Voisinage relatif.

Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A . Caractérisation séquentielle. Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.

Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.

Continuité en un point. Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les applications continues. Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales. Composition de deux

applications continues. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes. Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E .

Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq C\|x\|$.

Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$. La notion de norme subordonnée est hors programme.

Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme. Une partie compacte est fermée et bornée.

Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Produit d'une famille finie de compacts.

Applications continues sur une partie compacte

Image d'une partie compacte par une application continue. Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.

Théorème de Heine.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes sur un espace de dimension finie. Démonstration non exigible.

Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si, et seulement, si elle a une unique valeur d'adhérence.

Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue. Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies. Exemple : déterminant.

Suites et séries de fonctions

L'objectif est triple :

- définir les différents modes de convergence des suites et séries de fonctions ;
- étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;
- énoncer deux théorèmes d'approximation uniforme choisis pour leur intérêt intrinsèque, les applications qu'ils offrent et l'interprétation qu'ils permettent en termes de densité.

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

Convergence simple, convergence uniforme

Convergence simple sur A . Convergence uniforme sur A . La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.

Continuité, double limite

Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a , alors u est continue en a .

Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A . Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A .

Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A , et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n , u_n admet une limite ℓ_n en a , alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Démonstration non exigible. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.

Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F , a un point de I . On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u . Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $U_n(x) = \int_a^x u_n$, $U(x) = \int_a^x u$. Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I . En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment S , alors : $\int_S u_n \rightarrow \int_S u$.

Dérivation d'une suite de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F . Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u , et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v , alors (u_n) converge

uniformément vers u sur tout segment de I , u est de classe C^1 sur I et $u' = v$. Extension aux suites de fonctions de classe C^k , sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et de convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur tout segment de I .

Séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes précédents. Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.

Les étudiants et étudiantes doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).

Approximation uniforme

Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales. Démonstration non exigible.

Généralités sur les séries entières

Série entière. Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Rayon de convergence d'une série entière. Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence.

La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R ; la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > R$. Si $a_n = O(b_n)$, $R_a = R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Utilisation de la règle de d'Alembert. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence. L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Série entière d'une variable réelle

Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme. Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n , $a_n = b_n$.

Fonctions développables en série entière, développements usuels

Développement de e^z sur $\mathbb{C}$. Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ de $\mathbb{R}$. Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $] -r, r[$.

Développements de fonctions de variable réelle. Les étudiantes et étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiantes et étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. Faire le lien avec l'UE Equations Différentielles 1 (ED1) du S4 de la L2.



Équations différentielles 1 - ED1

S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ED1	6	18	30	0	48	Équations différentielles 1

L'objectif de cette UE est de fournir une première approche mathématique formalisée des équations différentielles linéaires. À l'issue de cette UE, les étudiants devront être en mesure d'identifier les propriétés d'une équation différentielle et, lorsque celle-ci est linéaire, de savoir la résoudre.

Généralités sur les équations différentielles

- Définitions, vocabulaire
- Exemples en physique, mécanique, biologie, ...

Solutions d'une équation différentielle linéaire

- Notion de problème de Cauchy
- Forme résolue (« normalisée ») d'une équation différentielle linéaire
- Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène ; dimension de l'espace des solutions ; Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle avec second membre
- Principe de superposition

Équations différentielles linéaires d'ordre un

- Formule pour la solution générale
- Notion de solution particulière
- Méthode de la variation de la constante

Exponentielle d'une matrice

- Notion d'algèbre normée, définition de l'exponentielle, méthodes de diagonalisation
- Fonctions vectorielles : dérivation et application aux exponentielles de matrices

Systèmes différentiels linéaires d'ordre un

- Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, matrice fondamentale, wronskien, méthode de la variation de la constante
- Écriture d'une équation différentielle linéaire d'ordre n sous forme d'un système différentiel linéaire d'ordre un
- Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants : formules générales, méthode de la variation de la constante

Équations différentielles scalaire linéaires du second ordre à coefficients constants

- Notion d'équation caractéristique
- Recherche d'une solution particulière par la méthode de la variation de la constante



Introduction aux mathématiques de l'intelligence artificielle - IMIA

S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
IMIA	4	12	12	12	36	Introduction aux mathématiques de l'intelligence artificielle

Objectifs

L'intelligence artificielle (IA) fait appel à de nombreuses notions mathématiques et est employée dans de nombreux domaines d'application (médecine, logistique, robotique, industrie, finance, etc.). L'objectif de cet enseignement est d'aborder quelques notions mathématiques incontournables en intelligence artificielle rattachées à l'enseignement de l'analyse et des probabilités des deux premières années de formation en Licence de Mathématiques.

Outre une introduction à l'intelligence artificielle, cette UE vise aussi à revenir sur certaines notions mathématiques sous un angle nouveau en lien avec le calcul numérique sur ordinateur où l'on recherche non plus à obtenir la valeur exacte d'une grandeur (ce qui peut souvent être rédhibitoire en coût de calcul) mais une valeur approchée obtenue par une méthode de calcul numérique avec une précision en adéquation avec l'application visée.

Programme

Cette UE est structurée autour de six thèmes déclinés en 2h de Cours Magistral (CM), 2h de Travaux Dirigés (TD) et 2h de Travaux Pratiques (TP).

- Le CM permet d'introduire le contexte général du thème étudié, les applications visées et les méthodes de résolution.
- Le TD permet d'explorer les notions vues en CM et de préparer à l'application abordée en TP.
- Le TP permet de traiter un problème concret issu de l'ingénierie ou des sciences en exploitant les notions enseignées en CM et en TD.

Les TP sur ordinateurs donnent lieu à l'écriture de codes en langage Python.

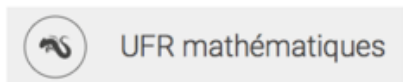
Les six thèmes retenus sont :

- Interpolation polynomiale
- Quadrature numérique
- Résolution numérique d'un problème de Cauchy
- Résolution numérique d'un système linéaire et méthodes de régression linéaire multiple
- Tests statistiques par permutation
- Introduction à la théorie des graphes et à l'étude de réseaux sociaux.

Ces thèmes sont susceptibles d'être modifiés d'une année sur l'autre notamment pour intégrer plus fortement la sensibilisation aux objectifs de développement durable et aux enjeux de transitions écologique et sociale.

Compétences visées

- Être capable de formaliser mathématiquement un problème simple issu d'un domaine tel l'ingénierie, la biologie, la médecine, etc. et être capable d'étudier certaines de ses propriétés mathématiques.
- Être capable d'identifier une approche numérique ou statistique adaptée pour la résolution du problème en fonction du contexte.
- Être capable de réaliser un programme en Python permettant la résolution effective du problème initial considéré.
- Être capable d'analyser les résultats de simulation fournis par le programme Python dans le contexte de l'étude.



Langue vivante 1 - LV1

S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
LV1	3	0	15	0	15	Langue vivante 1

Anglais, allemand ou espagnol.

L'enseignement des langues est organisé par le SCELVA. Il est annuel mais compte au deuxième semestre.

<https://langues.univ-rennes1.fr/lenseignement-des-langues-pour-lufr-mathematiques>



U.E. du parcours Défi

Compléments maths Défi 3 - MD3

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CMD3	3	0	24	0	24	Compléments maths défi 3

Cette U.E. permet aux étudiantes et étudiants de se préparer aux oraux et écrits des concours (magistères de mathématiques, écoles d'ingénieurs,...) et apporte quelques compléments en mathématiques.

Chaque étudiante ou étudiant est mis-e en situation de passage d'un oral de mathématiques. L'ensemble du groupe assiste à tous les oraux pour profiter des suggestions de l'enseignant-e.

Le programme est celui des enseignements de mathématiques de première et deuxième année de licence de mathématiques.

Compléments maths défi 4 - CMD4

S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CMD4	3	0	24	0	24	Compléments maths défi 4

Cette U.E. permet aux étudiantes et étudiants de se préparer aux oraux et écrits des concours (magistères de mathématiques, écoles d'ingénieurs,...) et apporte quelques compléments en mathématiques.

Chaque étudiante ou étudiant est mis-e en situation de passage d'un oral de mathématiques. L'ensemble du groupe assiste à tous les oraux pour profiter des suggestions de l'enseignant-e.

Le programme est celui des enseignements de mathématiques de première et deuxième année de licence de mathématiques.

Les mineures en L2



Algorithmique et complexité - ACO

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ACO	5	10.5	15	16.5	42	Algorithmique et complexité

Ce cours initie les étudiants à l'algorithmique et la complexité des algorithmes.

Programme

- Opérations sur les espaces vectoriels (matrices, géométrie)
- Algorithmique sur les arbres et les graphes
- Diviser pour régner
- Complexité asymptotique

Le langage support pour les TP est Python.



Physique 3 - PH3

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PH3	5	21	21	0	42	Physique 3

Cette UE peut se partager en deux UE :

S3	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PH3A	3	12	12	0	24	Physique 3-A
PH3B	2	9	9	0	18	Physique 3-B

Physique 3-A (thermodynamique)

Objectifs d'apprentissage -

Cette UE est une introduction à la thermodynamique classique.

Prérequis -

Programme de PH2-A du S2. Module de mathématiques sur les équations différentielles.

Cours

Gaz parfait/gaz réel.

L'énergie interne et le premier principe de la thermodynamique.

L'entropie et le second principe de la thermodynamique.

Machines thermiques.

Changement d'état d'un corps pur.

Travaux dirigés

Application de la loi de Mariotte.

Transformation adiabatique, transformation isotherme.

Transformations réversibles et irréversibles.

Cycles thermiques.

Compétences -

À l'issue des enseignements, les étudiants et étudiantes devraient être capables de

- connaître le lien entre pression, volume et température pour un gaz ;
- connaître les différents principes de la thermodynamique ;
- savoir traiter des problèmes simples sur les cycles et les changements d'état.

Physique 3-B (électromagnétisme)

Objectifs d'apprentissage -

Cette U.E. vise à poser les bases de l'électromagnétisme et de sa propagation.

Prérequis -

Programme de PH2-A du S2. Module d'électricité PH1-B du S1.

Cours

Flux d'un vecteur, théorème de Gauss.

Circulation d'un vecteur, théorème d'Ampère.

Équations de Maxwell dans le vide.

Propagation de l'énergie électromagnétique.

Travaux dirigés

Calcul du champ électrique créé par une sphère, par un cylindre.

Calcul du champ magnétique créé par un fil, par un solénoïde.

Les phénomènes d'interférence : les fentes d'Young.

Compétences -

À l'issue des enseignements, les étudiants et étudiantes devraient être capables

- d'estimer les champs électriques et magnétiques générés par des courants simples ;
- de connaître les quatre équations de Maxwell ;
- de savoir comment se propage l'énergie électro-magnétique dans le vide.



Calculabilité - CAL

S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CAL	5	18	9	15	42	Calculabilité

Prérequis -

Avoir une expérience minimale de la programmation. Avoir suivi le module de programmation fonctionnelle de première année de licence est une aide pour le langage de programmation utilisé en TP (Scala) mais ce n'est pas un prérequis strict.

Alors que la technologie informatique évolue très vite, la science informatique repose sur des hypothèses qui n'ont pas été mises en cause depuis 80 ans. On peut montrer que toutes les fonctions discrètes imaginables ne peuvent pas être calculées automatiquement. On montre que certaines de ces fonctions sont très simples à concevoir, et qu'il serait très utile de savoir les automatiser. On montre aussi que la nature de ces fonctions ne dépend pas du tout des moyens mis en œuvre pour les automatiser. On montre enfin que même quand une fonction peut être automatisée en principe, il se peut qu'elle ne le soit pas en pratique. À l'issue de ce cours, l'étudiant comprendra mieux les limites intrinsèques de l'automatisation des calculs, que ce soit dans l'existence d'une solution à un problème ou dans le coût de calcul d'une solution. Il saura envisager des applications non-triviales dont les données sont des programmes et il saura mettre en œuvre quelques facettes rudimentaires du génie logiciel, ex. le test.

Calculabilité

Introduction. Théorèmes de Cantor. Le problème de l'arrêt, la réduction calculatoire, le théorème de Rice.
Travaux pratiques sur les nombres de Cantor

Sémantique

Syntaxe d'un langage de programmation, le langage WHILE. Définition formelle de la sémantique de ce langage. Programmation dans ce langage ; mise en œuvre de la récursivité. Définition d'un interpréteur. Restriction à un sous-langage, le langage FOR. La thèse de Church.

TP sur l'idée qu'un programme peut prendre en paramètre un programme : Un pretty-printer.

Un interpréteur. Un fragment d'un compilateur.

Complexité

Définition intuitive ; coût asymptotique ; notations.

Les problèmes P et NP ; la réduction polynomiale.

Les problèmes NP-complets ; le théorème de Cook.

Le langage support pour les TP est Scala.



Didactique des mathématiques 1 - DID1

S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
DID1	5	18	18	6	42	Didactique des mathématiques 1

Cette UE présente des exemples de cadres théoriques de la didactique des mathématiques : théorie des situations, variables didactiques, contrat didactique, résolution de problèmes en mathématiques. . .

On étudiera quelques éléments des programmes de l'école primaire et du collège en faisant le lien avec leur histoire et des éléments du programme actuel de licence de mathématiques. Les étudiants et étudiantes apprendront à appliquer ces différents cadres théoriques à l'analyse d'énoncés et de productions d'élèves.

Les étudiantes et étudiants devront réaliser une fiche d'exercices permettant à des élèves d'améliorer leur compréhension d'un contenu donné. Cette fiche sera expérimentée en classe dans le cadre du stage.

Le stage a pour objectifs principaux :

- permettre d'approcher au plus près la réalité du métier d'enseignant ;
- initier aux méthodes qui permettent d'analyser et de concevoir de situations pour l'apprentissage des mathématiques ;
- concevoir une série d'exercices ou de problèmes avec une expérimentation en classe.

Le volume du stage est de 3 séances minimum de présence dans une classe (école ou collège). Le stage est validé par un rapport qui fera l'objet d'une soutenance de 30 min. La présence de tous les étudiants et toutes les étudiantes aux soutenances est obligatoire. Une partie des cours et des TD sera consacrée à la préparation, au suivi et compte rendu de stage.



Physique 4 - PH4

S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PH4	5	21	21	0	42	Physique 4

Cette UE peut se partager en deux UE :

S4	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PH4A	3	12	12	0	24	Physique 4-A
PH4B	2	9	9	0	18	Physique 4-B

Physique 4-A (ondes)

Objectifs d'apprentissage -

Cette UE vise à introduire les phénomènes ondulatoires en général que l'on retrouve ensuite à tous les niveaux scientifiques.

Prérequis -

Programme de PH2A du S2 et PH3A du S3.

Cours

Oscillateur à plusieurs degrés de liberté, passage du discret au continu.

Équation de D'Alembert, équations d'onde, onde unidimensionnelle, onde progressive, onde stationnaire.

Ondes électromagnétiques.

Interférences.

Travaux dirigés

Oscillateur harmonique à plusieurs dimensions.

Onde progressive.

Onde stationnaire.

Expérience des fentes d'Young.

Compétences -

À l'issue des enseignements, les étudiants et étudiantes devraient être capables de

- résoudre un problème lié à la propagation des ondes ;
- résoudre les problèmes simples d'interférence ;
- connaître différents types de propagation d'onde dans différents domaines.

Physique 4-B (transport)

Objectifs d'apprentissage -

Cette UE vise à se familiariser avec les phénomènes de transport, principalement concernant la chaleur, mais pas uniquement.

Prérequis -

Programme de PH4A du S4. Module de thermodynamique et d'électromagnétisme PH3 du S3.

Cours

Diffusion moléculaire et transport thermique.

Statique des fluides.

Phénomènes capillaires.

Travaux dirigés

Équation de diffusion.

Exemple d'atmosphère.

Principe d'Archimède.

Loi de Jurin

Compétences -

À l'issue des enseignements, les étudiants et étudiantes devraient être capables

- d'identifier un problème physique lié au phénomène de transport ;
- de mettre en équation un tel problème ;
- de proposer une résolution de cette équation dans les cas simple ;
- de pouvoir résoudre des problèmes de statique des fluides dans des cas simples

Les U.E. du parcours Mathématiques et Interactions de L3



Calcul différentiel en dimension finie - CDF

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CDF	5	21	21	0	42	Calcul différentiel en dimension finie

Notions de topologie en dimension finie

Rappels sur les espaces vectoriels normés de dimension finie. Utilisation de la compacité et de la complétude. Énoncé du théorème de point fixe.

Fonctions différentiables

Rappels sur la dérivabilité des fonctions de la variable réelle.

Différentielle d'une application entre espaces de dimension deux ou trois. Dérivées partielles, jacobienne. Caractérisation des applications de classe C^1 .

Dérivées d'ordre deux. Formule de Taylor à l'ordre deux. Théorème de Schwarz. Matrice hessienne.

Problèmes d'extrema

Recherche d'extremum local. Utilisation de la hessienne.

Exemple de la droite des moindres carrés.

Étude d'exemples de problèmes d'extrema liés en dimension 2 et 3.



Calcul matriciel - CMA

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CMA	5	21	21	0	42	Calcul matriciel

Cette UE traite des éléments d'algèbre linéaire et bilinéaire en dimension finie sur le corps des réels ou des complexes, vus en particulier à travers leurs représentations matricielles.

Diagonalisation et trigonalisation. Réduction des matrices nilpotentes. Polynômes de matrices et lemme des noyaux. Polynôme annulateurs et polynôme minimal. Théorème de Cayley-Hamilton. Décomposition de Jordan.

Produit scalaire dans les espaces euclidiens. Matrices des projections orthogonales et des isométries usuelles. Éventuellement procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Diagonalisation des matrices symétriques réelles.

Décomposition polaire d'une matrice réelle. Réduction des coniques.

Comportement de A^k et de $\exp(tA)$. Cas de blocs de Jordan. Utilisation pour l'étude de récurrences et des équations différentielles linéaires.

Normes matricielles subordonnées. Exemple des normes usuelles.



Groupes et actions de groupes - GRAC

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
GRAC	5	21	21	0	42	Groupes et actions de groupes

Groupes, sous-groupes : définitions et exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (approche constructive), $\mathbb{K}^*$ ($\mathbb{K}$ corps), groupes des permutations (définition), GL_n (définition), Groupe diédral. Sous-groupes de $\mathbb{Z}$, sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$, exemples de sous-groupes de GL_n . Groupe produit (direct).

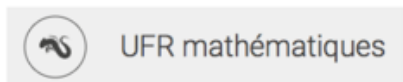
Morphismes, noyau, image. Théorème de Lagrange.

Rappels sur les relations d'équivalence et quotients d'ensembles.

Sous-groupes normaux, quotients dont propriété universelle et théorème d'isomorphisme. Sous-groupes d'indice 2.

Exemples. Groupes cyclique, théorème chinois. Groupes des permutations (étude détaillée), théorème de Cayley.

Actions de groupes, orbites, stabilisateurs, points fixes. Exemples. Formules des classes, théorème de Cauchy. Exemples d'application à la théorie des groupes, à l'algèbre linéaire et à la géométrie.



Langue vivante 1 - LV1

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
LV1	0	0	15	0	15	Langue vivante 1

Anglais, allemand ou espagnol.

L'enseignement des langues est organisé par le SCELVA. Il est annuel mais compte au deuxième semestre.

<https://langues.univ-rennes1.fr/lenseignement-des-langues-pour-lufr-mathematiques>



Méthodes numériques en analyse - MNA

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
MNA	5	21	15	6	42	Méthodes numériques en analyse

Descriptif -

Cette U.E. concerne l'étude mathématique des méthodes numériques intervenant en analyse. Il s'agit plus précisément d'en analyser en détail les propriétés, notamment de convergence, à travers l'utilisation des théories mathématiques étudiées dans les deux premières années de l'licence. De façon complémentaire aux Travaux Dirigés, quelques séances de Travaux Pratiques permettront d'envisager ces méthodes du point de vue de leur mise en œuvre effective et de leurs applications.

Prérequis -

Mathématiques de L1 et de L2.

Objectifs d'apprentissage -

Connaître et de savoir analyser les méthodes numériques intervenant en analyse, dans la résolution d'équations non-linéaires, dans les problèmes d'interpolation polynomiale et dans l'approximation numérique d'intégrales et de solutions d'équations différentielles ordinaires.

Résolution approchée d'équations non-linéaires

Zéros d'une fonction de la variable réelle. Résolution approchée par les méthodes de dichotomie, de la corde, de la sécante, de Newton. Principe de point fixe. Notion d'ordre de convergence. Analyse et caractérisation des vitesses de convergence dans le cas de fonctions régulières. Initiation aux algorithmes d'optimisation convexe en dimension un.

Interpolation polynomiale

Polynôme d'interpolation de Lagrange. Méthode des différences divisées et formule de Newton. Problème d'interpolation de Hermite aux ordres supérieurs.

Quadrature numérique

Quadratures usuelles : méthode des rectangles, des trapèzes, de Newton-Cotes. Analyse de convergence par utilisation des polynômes d'interpolation.

Équations différentielles ordinaires

Analyse de la méthode d'Euler explicite. Version discrète du lemme de Grönwall. Consistance, stabilité et convergence. Étude de stabilité des méthodes d'Euler explicite et implicite.



Préparation au CAPES 1 - CAP1

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CAP1	5	21	21	0	42	Préparation au CAPES 1

Objectifs d'apprentissage -

Préparer aux deux épreuves d'admissibilité et à la première épreuve d'admission du CAPES de Mathématiques.

Travail sur la maîtrise des connaissances disciplinaires (du tronc commun des différentes licences de mathématiques) et sur l'aptitude à les mobiliser.

Ce travail se fera sur la base d'exercices à résoudre, exercices dont il faudra savoir présenter les notions mises en jeu et les notions connexes.

Ces exercices porteront sur la logique, l'algèbre et la géométrie.

Chaque étudiante et étudiant sera amené-e à présenter un exposé devant le groupe.



Probabilités et statistique - PS

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PS	5	21	21	0	42	Probabilités et statistique

Descriptif -

Les probabilités et la statistique sont les outils clés de la modélisation et de la prédiction des phénomènes aléatoires. Elles sont utilisées dans des domaines variés : biologie, finance, sport, marketing, etc. Elles sont aussi à la base de la plupart des algorithmes d'apprentissage automatique (machine learning) et de l'intelligence artificielle.

Cette U.E. introduit les concepts de base des probabilités et de la statistique. Il s'agit de s'approprier la notion de variable aléatoire, de comprendre les propriétés associées puis d'aborder le problème de l'estimation en présence d'aléa.

Prérequis -

Enseignement de mathématiques de niveau L1 et L2.

Objectifs d'apprentissage -

À l'issue de ce cours, les étudiants et étudiantes pourront utiliser des variables aléatoires à lois discrètes ou continues pour modéliser des problèmes simples et proposer une analyse descriptive pour des données univariées.

Logiciel utilisé : python.

Généralités

Espaces probabilisés (généralités).

Conditionnement et indépendance.

Variables aléatoires (généralités : fonction de répartition, lois, ...).

Variables à loi discrète

Espérance, variance et fonctions génératrices de lois discrètes ; lois discrètes classiques.

Couples aléatoires discrets, lois conditionnelles et covariance.

Variables à loi continue

Variables aléatoires continues.

Lois continues classiques.

Couples de variables aléatoires continues, lois conditionnelles et covariance.

Convergences de lois et loi des grands nombres.

Premiers pas vers les théorèmes de convergence et l'inférence statistique

Fonctions caractéristiques et théorème central limite.

Estimation de paramètres : intervalles de confiance et de fluctuations.



Analyse appliquée - AN

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
AN	5	21	21	0	42	Analyse appliquée

Équations différentielles en situation

Rappels sur le cas d'équations différentielles linéaires.

Classification des systèmes différentiels plans linéaires (exponentielle de matrice de taille 2 et utilisation des nombres complexes). Exemple de l'oscillateur linéarisé amorti. Équations différentielles du premier ordre. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Mise en situation d'équations différentielles et méthodes de résolution particulières : variables séparables, réductibles, d'ordre 1, réductibles à des EDO d'ordre 1, équations à différentielle exacte.

Calcul intégral

Intégrales multiples sur des domaines élémentaires du plan et de l'espace.

Énoncé du théorème de Fubini. Changement de variable. Exemple des coordonnées polaires et sphériques.

Application au calcul d'aires, de volumes et de centres de gravité.



Courbes et surfaces paramétrées - CSP

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CSP	5	21	21	0	42	Courbes et surfaces paramétrées

Courbes

Courbes régulières. Donner plusieurs exemples. Changement de paramètre admissible.

Vecteur tangent, longueur d'une courbe et abscisse curviligne.

Vecteur normal, courbure.

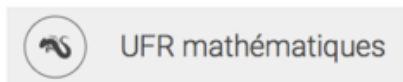
Produit vectoriel. Trièdre de Serret-Frénet et torsion.

Exemples de courbes en coordonnées polaires.

Surfaces

Surfaces régulières. Donner plusieurs exemples (surfaces de révolution).

Plan tangent, vecteur normal et application de Gauss. Première forme fondamentale et aire d'une surface.



Découverte des métiers des maths 3 - DMM3

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
DMM3	2					Découverte métiers des maths 3

Descriptif -

Il s'agit de réaliser d'une part un document de réflexion sur un métier des mathématiques et d'autre part un projet tutoré, ce dernier pouvant être produit de façon individuelle ou au sein d'un petit groupe.

Prérequis -

Mathématiques de deuxième année de licence de mathématiques

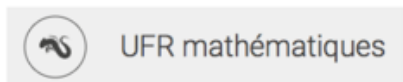
Volume horaire personnel étudiant 50 à 60 heures



Géométries - GEO

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
GEO	5	21	21	0	42	Géométries

Géométries affine et affine euclidienne en dimension 2 et 3.
Propriétés des figures, classification des isométries.
Géométrie et nombres complexes.
Introduction à la géométrie sphérique (repérage sur une sphère)



Langue vivante 1 - LV1

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
LV1	3	0	15	0	15	Langue vivante 1

Anglais, allemand ou espagnol.

L'enseignement des langues est organisé par le SCELVA. Il est annuel mais compte au deuxième semestre.

<https://langues.univ-rennes1.fr/lenseignement-des-langues-pour-lufr-mathematiques>



Introduction aux probabilités et statistiques pour la science des données - PSSD

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PSSD	5	21	21	0	42	Introduction aux probabilités et statistiques pour la science des données

Descriptif -

Les probabilités et la statistique sont les outils clés la modélisation et de la prédiction des phénomènes aléatoires. Elles sont essentielles pour comprendre et développer les méthodes et algorithmes utilisés en sciences des données.

Cette U.E. couvre principalement les outils de la statistique inférentielle. Plus précisément, il s'agit de comprendre et s'appropriier les différents outils qui permettent d'extraire de l'information sur une population à partir de données observées et de mesurer la qualité de l'information obtenue.

Dans chaque partie du cours, les résultats théoriques seront énoncés, expliqués et mis en pratique. Ils seront aussi illustrés par des simulations numériques et/ou utilisés pour répondre à des questions sur des données réelles.

Prérequis -

Enseignement de mathématiques de niveau L1 et de L2. UE Probabilités et statistique 1 (PS1) de la L3.

Objectifs d'apprentissage -

À l'issue de ce cours, les étudiantes et étudiants pourront mettre en œuvre différentes méthodes d'estimation dans un cadre univarié et dans le cadre de la régression linéaire.

Logiciel utilisé : python.

Un peu de probabilité

Les différents modes de convergence.

Les théorèmes fondamentaux : loi des grands nombres, théorème central limite.

Modèles et estimation

Qu'est-ce qu'un estimateur ?

Estimation par la méthode des moments.

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance.

Introduction aux tests statistiques

Un pas vers les méthodes statistiques

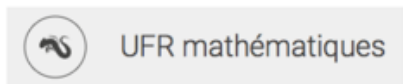
Régression linéaire.

Estimation des paramètres.

Analyse des résultats.

Bibliographie

- *Régression avec R* (2011). P.A. Cornillon, E. Matzner-Løber. Springer, France.
- *Statistique, La théorie et ses applications* (2010). Michel Lejeune. Springer, France.
- *Premiers Pas en Statistique* (2010). Yadolah Dodge. Springer, France.



Préparation au CAPES 2 - CAP2

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CAP2	5	21	21	0	42	Préparation au CAPES 2

Objectifs d'apprentissage -

Préparer, dans la continuité de l'UE CAP1, aux deux épreuves d'admissibilité et à la première épreuve d'admission du CAPES de Mathématiques.

Travail sur la maîtrise des connaissances disciplinaires (du tronc commun des différentes licences de mathématiques) et sur l'aptitude à les mobiliser.

Ce travail se fera sur la base d'exercices à résoudre, exercices dont il faudra savoir présenter les notions mises en jeu et les notions connexes.

Ces exercices porteront sur l'analyse, les probabilités et les statistiques.

Chaque étudiante et étudiant sera amené-e à présenter un exposé devant le groupe.

**Les U.E. du parcours
Mathématiques
Fondamentales de L3**



Algèbre linéaire et bilinéaire - ALBI

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ALBI	5	21	21	0	42	Algèbre linéaire et bilinéaire

Algèbre linéaire

Quotient et dualité.

Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal, sous-espaces stables et rappels sur le lemme des noyaux.

Théorème de Jordan et décomposition de Dunford.

Théorème de Frobenius, invariants de similitude.

Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques. Orthogonalité.

Formes quadratiques non dégénérées. Théorème de Riesz. Existence de bases orthogonales.

Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Théorème d'inertie de Sylvester, signature.

Espaces euclidiens

Rappels sur les espaces euclidiens.

Adjoint et endomorphismes normaux (cas particuliers). Réduction des endomorphismes normaux.



Calcul différentiel - CD

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
CD	5	21	21	0	42	Calcul différentiel en dimension finie

Espace vectoriels normés

Normes, normes équivalentes, équivalence en dimension finie.

Théorème de Riesz.

Suites de Cauchy, espaces complets, exemples : l^p , C^0 .

Série dans les evn (complétude et convergence absolue entraîne la convergence).

Algèbres de Banach, inversion.

Théorème de point fixe (dans un evn).

Applications linéaires continues

Norme subordonnée, algèbre $L_c(E)$.

Applications multilinéaires, leur norme.

Fonctions 1D (à valeurs dans un evn quelconque)

Dérivabilité, à droite/gauche, $C^k([a, b], E)$.

Fonction à valeurs réelles : théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, formule Taylor Lagrange.

Fonction à valeurs vectorielles : inégalité des accroissements finis, Taylor Young, Taylor avec reste intégral (si E complet).

Applications au prolongement.

Dérivabilité et suites/séries de fonctions.

Fonctions convexes : inégalité des 3 pentes, régularité, caractérisations, inégalités de convexité, optimisation.

Calcul différentiel

Différentielle, exemples, théorème des fonctions composées.

Différentiabilité et inversion (en vue du théorème d'inversion locale).

Inégalité des accroissements finis.

Différentiabilité et suites/séries de fonctions.

Différentielles partielles.

Équivalence au niveau C^1 entre différentielle et différentielles partielles.

Lemme de Schwarz.

Différentielles d'ordre > 1 , fonctions C^k .

Symétrie de la différentielle seconde.

Taylor Young.

Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites

C^1 difféomorphisme.

Théorème d'inversion locale sur un Banach en admettant le théorème d'isomorphisme de Banach (connu en dim finie), théorème d'inversion globale.

Théorème des fonctions implicites, applications.

Extrema

Extremum libre, équation d'Euler, cas des fonctions convexes.

Théorème des extrema liés.



Intégrale de Lebesgue - INTL

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
INTL	5	21	21	0	42	Intégrale de Lebesgue

Théorie de la mesure : tribus, mesures, mesure de Lebesgue.

Fonctions mesurables.

Intégrale de Lebesgue des fonctions étagées, positives, intégrables.

Théorème de Beppo-Levi, lemme de Fatou, théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Lien entre les intégrales de Lebesgue et de Riemann.

Intégrales à paramètres.

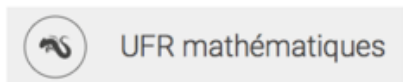
Tribu produit, mesure produit et théorème de Fubini.

Changement de variable.

Inégalités de Hölder et Minkowski, espaces L^p .

Transformation de Fourier dans L^1 .

Convolution, régularisation.



Langue vivante 1 - LV1

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
LV1	0	0	15	0	15	Langue vivante 1

Anglais, allemand ou espagnol.

L'enseignement des langues est organisé par le SCELVA. Il est annuel mais compte au deuxième semestre.

<https://langues.univ-rennes1.fr/lenseignement-des-langues-pour-lufr-mathematiques>



Théorie des groupes - THGR

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
THGR	5	21	21	0	42	Théorie des groupes

Notions de base. Groupes, morphismes, sous-groupes, partie génératrice, ordre, théorème de Lagrange.

Groupes abéliens de type fini. Le groupe $\mathbb{Z}$, groupes cycliques, structure des groupes abéliens de type fini.

Le groupe diédral. Caractérisation par générateurs et relations.

Sous-groupes normaux. Exemple du noyau d'un morphisme, groupe quotient, factorisation des morphismes, exemple du groupe dérivé.

Action de groupes. Orbites, stabilisateurs, exemples d'actions, équation aux classes et conséquences.

Groupe symétrique. Signature, décomposition en produit de cycles, groupe alterné et simplicité.

Produit semi-direct. Exemple du groupe symétrique S_4 .

Théorèmes de Sylow. Applications : critère de non-simplicité, classification des groupes d'ordre ≤ 15 , d'ordre pq , etc.



Topologie générale - TOPG

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
TOPG	5	21	21	0	42	Topologie générale

Rappels sur les ensembles et cardinaux.

Notion d'espace topologique : ouverts, fermés, voisinages ; intérieur, adhérence et frontière d'une partie.

Distances et espaces métriques. Espaces normés. Topologie d'un espace métrique.

Transport de topologie, topologie induite, topologie produit. Notion de limite.

Continuité, applications linéaires continues. Connexité, connexes de $\mathbb{R}$.

Compacité ; cas général et cas métrisable. Application aux espaces vectoriels normés.

Complétude métrique. Théorème du point fixe. Espaces de Banach.



Anneaux et arithmétique - ANAR

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ANAR	5	21	21	0	42	Anneaux et arithmétique

Premières définitions : anneau, morphisme d'anneaux, noyau, image, idéaux, quotient, théorème de factorisation, éléments irréductibles, groupe des éléments inversibles.

Exemples d'anneaux et d'idéaux : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $A[X]$, corps, anneaux de fonctions continues, séries formelles. Notion d'algèbre (définition, morphisme). Étude des algèbres $k[X] = (P)$ et des algèbres $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (endomorphismes de ces algèbres, résolution d'équations dans ces algèbres). Corps finis et applications en cryptographie (codes cycliques, protocoles El Gamal, Diffie-Hellman).

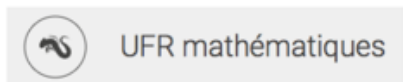
Anneau intègre, corps, diviseur de zéro, idéal premier, idéal maximal (résultat admis : tout idéal strict est contenu dans un idéal maximal). Théorème des restes chinois général.

Localisation (propriété universelle et existence). Exemple : corps des fractions d'un anneau intègre.

Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide étendu. (exemples fondamentaux : $\mathbb{Z}$ et $k[X]$, les entiers de Gauss, théorème des deux carrés).

Anneaux principaux. PGCD et PPCM dans un anneau principal, traduction en termes d'idéaux. Exemples d'anneaux non principaux.

Anneaux factoriels (éléments irréductibles, définition, propriétés d'hérédité). Exemples d'anneaux non factoriels. Retour sur les anneaux de polynômes et polynômes irréductibles (critères d'irréductibilité).



Découverte des métiers des maths 3 - DMM3

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
DMM3	2					Découverte métiers des maths 3

Descriptif -

Il s'agit de réaliser d'une part un document de réflexion sur un métier des mathématiques et d'autre part un projet tutoré, ce dernier pouvant être produit de façon individuelle ou au sein d'un petit groupe.

Prérequis -

Mathématiques de deuxième année de licence de mathématiques

Volume horaire personnel étudiant 50 à 60 heures



Équations différentielles 2 - ED2

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ED2	5	21	21	0	42	Équations différentielles 2

Théorèmes généraux

Problème de Cauchy, solutions maximales, Cauchy-Lipschitz, existence de solutions maximales.

Lemme de Gronwall.

Continuité par rapport à la donnée initiale.

Principe de majoration a priori et existence globales.

Systèmes linéaires

Systèmes linéaires en dimension 2.

Bases de solutions, Wronskien, résolvante, variation de la constante.

Systèmes linéaires autonomes. Exponentielle de matrice, stabilité.

Systèmes linéaires d'ordre supérieur.

Systèmes linéaires à coefficients périodiques.

Propriétés qualitatives des systèmes autonomes

Portrait de phases en dimension 2, quelques exemples. Systèmes linéaires, classification en dimension 2.

Dérivée le long des trajectoires, méthodes des caractéristiques. Flot. Linéarisation. Théorème de stabilité et d'instabilité.

Méthodes numériques



Espaces vectoriels normés - EVN

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
EVN	5	21	21	0	42	Espaces vectoriels normés

Compléments de topologie et intégration

Prolongement des applications uniformément continues.

Théorème d'Ascoli.

Complétude de L^p , réciproque de Lebesgue.

Dualité (preuves dans l^p).

Séries de Fourier

Coefficient de Fourier, décroissance et régularité.

Théorème de Fejer dans C^0 et ℓ^p .

Théorème de Dirichlet.

Espace de Hilbert

Espace préhilbertien, inégalité de CYS, identité du parallélogramme, formules de polarisation.

Orthogonal.

Espace de Hilbert, exemples.

Théorème de projection.

Théorème du supplémentaire orthogonal, critère de densité, théorème de Riesz.

Bases hilbertiennes.

Application aux séries de Fourier.

Théorème de Baire

Théorème de Baire. Théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème de l'application ouverte/d'isomorphisme de Banach.

Transformée de Fourier des fonctions

Transformée de Fourier sur L^1 , décroissance et régularité.

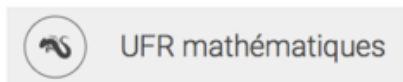
Formule d'inversion de Fourier sur S , sur L^1 .

Transformée de Fourier sur L^2 , théorème de Plancherel.

Topologie faible dans les espaces de Hilbert

Suites faiblement convergentes.

Compacité faible, application à l'optimisation.



Langue vivante 1 - LV1

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
LV1	3	0	15	0	15	Langue vivante 1

Anglais, allemand ou espagnol.

L'enseignement des langues est organisé par le SCELVA. Il est annuel mais compte au deuxième semestre.

<https://langues.univ-rennes1.fr/lenseignement-des-langues-pour-lufr-mathematiques>



Probabilités - PRO

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
PRO	5	21	21	0	42	Probabilités

Espace de probabilités.

Variable aléatoire, loi, espérance, moments.

Conditionnement et indépendance.

Caractérisation des lois : moments, fonctions de répartition, fonctions test, fonctions caractéristiques.

Convergence des suites de variables aléatoires : différents modes de convergence.

Lois des grands nombres, théorème limite central.

Vecteurs gaussiens.

Les mineures en L3



Épistémologie et histoire des sciences - EHS

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
EHS	5	21	21	0	42	Épistémologie et histoire des sciences

Ce module propose une initiation à l'épistémologie et à l'histoire des sciences. Ouvert aux étudiants et étudiantes de tous les cursus, il propose une réflexion sur les sciences à partir de l'étude de leur histoire.

Il ne suppose pas de connaissances préalables particulières. Il vise principalement à entretenir chez les étudiantes et étudiants scientifiques la pratique de la lecture et de l'écriture, à développer leur capacité d'analyse et de réflexion sur les sciences par l'étude de textes divers et la rédaction d'analyses et de résumés.

La période couverte va essentiellement de l'Antiquité grecque jusqu'au développement de la science moderne (17^e siècle). La lecture de textes fondamentaux pour l'histoire des sciences donnera à l'étudiant des repères historiques et les bases pour une réflexion sur les principes et le développement des sciences.

Nous étudierons dans cette perspective diverses représentations de l'univers, les recherches d'un traitement rationnel du mouvement et sa mathématisation, et le statut de ces théories. L'examen des rapports de ces théories à la philosophie, à la physique, aux mathématiques, etc. contribuera à mieux apprécier les enjeux, les exigences et la portée des connaissances scientifiques actuelles.

Parmi les thèmes susceptibles d'être abordés :

- la physique et la cosmologie d'Aristote et la notion de mouvement local ;
- l'Almageste, la description mathématique des mouvements des astres ;
- l'univers de Copernic et les trois lois de Kepler ;
- l'astronomie et la physique de Galilée ;
- la physique et la gravitation universelle dans les Principia Mathematica de Newton.



Fonctions holomorphes - HOLO

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
HOLO	5	21	21	0	42	Fonctions holomorphes

Fonctions holomorphes, exemples, série entières, logarithme et exponentielle, équations de Cauchy-Riemann, fonctions harmoniques.

Théorème et formule de Cauchy. Applications, fonctions analytiques, principe du Maximum, théorème de l'image ouverte.

Théorèmes de Liouville et d'Alembert.

Développement en séries de Laurent, points singuliers, fonctions méromorphes.

Théorème des résidus, calculs d'intégrales.



Mécanique des systèmes matériels et milieux déformables - SMMD

S5	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
SMDD	5	21	21	0	42	Mécanique des systèmes matériels et milieux déformables

Prérequis -

Savoirs fondamentaux des majeures de licence 1 et de licence 2 de mathématiques.

Objectifs d'apprentissage -

L'objectif de cet enseignement de la mécanique des systèmes matériels et milieux déformables est d'acquérir les fondamentaux de la mécanique des systèmes matériels en cinématique, dynamique et énergétique et de la modélisation des milieux déformables.

Systèmes matériels

Vecteurs libre et lié, produit scalaire, projection. Produit vectoriel, produit mixte, développement de Grassmann (formules de Gibbs). Référentiel, repère, vecteurs position, vitesse et accélération.

Cinématique - Théorèmes fondamentaux : dérivée temporelle d'un vecteur d'un repère mobile, dérivée temporelle d'un vecteur et composition des vecteurs rotation instantanée. Nature du mouvement : translation, rotation, uniforme, retardé et accéléré. Changement de référentiel, composition des vitesses, composition des accélérations.

Modélisation des actions mécaniques : de contact, à distance, force conservative et non conservative.

Les trois lois de Newton, force, moment, quantité de mouvement et moment cinétique.

Énergétique : travail, puissance, théorèmes de l'énergie mécanique.

Milieux déformables

Milieux discrets versus milieux continus : hypothèse du continu.

Modélisation d'un milieu continu : masse, quantité de mouvement et moment cinétique.

Milieux rigides versus déformables : déformations.

Modélisation et propriétés des efforts intérieurs, du vecteur contrainte et du tenseur des contraintes.

Lois de comportement.

Compétences -

- Savoir poser et résoudre un problème de mécanique.
- Acquérir une méthodologie rigoureuse.
- Acquérir le concept de tenseur d'ordre 2 de $E \times E^*$.
- Savoir mettre en œuvre les calculs vectoriel, différentiel et intégral.



Analyse numérique - ANU

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ANU	5	18	15	9	42	Analyse numérique

Descriptif -

Cet enseignement concerne l'étude mathématique de méthodes numériques destinées à approcher les solutions de problèmes variés : analyse numérique matricielle, interpolation et approximation de fonctions, calcul approché d'intégrales et de dérivées, résolution approchée de problèmes non-linéaires, y compris le calcul approché de valeurs propres et de solutions d'équations différentielles.

Rappels et compléments.

Réduction de matrices. Espaces hermitiens. Matrices normales. Normes. Normes subordonnées. Conditionnement.

Analyse numérique matricielle. Méthodes directes et méthodes itératives.

Résolution de $Ax = b$ par minimisation. Moindres carrés. Décomposition en valeurs singulières. Méthodes de Gradient.

Problèmes non-linéaires. Systèmes d'équations non-linéaires. Méthodes d'approximation de valeurs et vecteurs propres.

Résolution numérique des EDO. Analyse générale des méthodes à un pas. Méthodes de Runge-Kutta. Méthodes multipas.

Méthodes à pas adaptatif.

Interpolation et approximation polynomiale. Analyse de convergence usuelle. Théorème de Weierstrass. Constante de Lebesgue et approche fonctionnelle de l'interpolation. Algorithmes d'approximation uniforme.



Didactique des mathématiques 2 - DID2

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
DID2	5	18	18	6	42	Didactique des mathématiques 2

Introduction à la didactique des mathématiques

Ce cours présente quelques cadres théoriques de la didactique des mathématiques permettant de mieux comprendre les origines des erreurs des élèves, les objectifs de l'enseignement des mathématiques et les difficultés en lien avec l'enseignement et l'apprentissage de cette discipline.

Les outils ou concepts présentés (variable didactique, contrat didactique, théorie des situations, changement de cadres, analyse a priori, ...) sont systématiquement appliqués à l'analyse d'énoncés de problèmes et/ou de productions d'élèves.

Analyse et apprentissage de la démonstration en mathématiques

Ce cours a pour but de donner des moyens d'analyser et de comprendre les processus qui interviennent dans la conception et l'écriture d'un texte de démonstration.

Après avoir analysé les structures d'une démonstration, on en étudie les difficultés (structurelles, liées au langage utilisé...) à l'aide de textes issus soit de manuels, soit de copies d'élèves. Une méthode d'analyse de copies est proposée qui peut permettre de comprendre certaines difficultés et faire progresser les élèves.

Mise en situation

Les étudiantes et étudiants devront réaliser une fiche d'exercices permettant à des élèves d'améliorer leur compréhension d'un contenu donné. Cette fiche sera expérimentée en classe dans le cadre du stage.

Le stage a pour objectifs principaux :

- permettre d'approcher au plus près la réalité du métier d'enseignant ;
- initier aux méthodes qui permettent d'analyser et de concevoir de situations pour l'apprentissage des mathématiques ;
- concevoir une série d'exercices ou de problèmes avec une expérimentation en classe.

Le volume du stage est de 3 séances minimum de présence dans une classe (lycée). Le stage est validé par un rapport qui fera l'objet d'une soutenance de. La présence de tous les étudiants et toutes les étudiantes aux soutenances est obligatoire. Une partie des cours et des TD sera consacrée à la préparation, au suivi et compte rendu de stage.



Mécanique des fluides - FLU

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
FLU	5	21	21	0	42	Mécanique des fluides

Prérequis -

UE Mécanique des systèmes matériels et milieux déformables.

Savoirs fondamentaux des majeures de licence 1 et de licence 2 de mathématique.

Objectifs d'apprentissage -

Cet enseignement de mécanique des fluides permettra aux étudiants et étudiantes d'aborder dans un cadre mathématisé la mécanique des fluides.

Modélisation d'un fluide

Comportements idéaux, rhéologie des fluides : les grands types de comportement.

Tenseurs, opérateurs classiques : divergence, rotationnel et gradient.

Vecteur et tenseur contrainte, loi de comportement d'un fluide newtonien.

Cinématique

Cinématique eulérienne, domaine de contrôle, dérivée particulaire, trajectoires et lignes de courant.

Conditions aux limites, cinématiques de glissement et d'adhérence.

Dynamique

Flux net d'une quantité scalaire ou vectorielle et théorème de Green-Ostrogradski.

Débits et les théorèmes de conservation.

Formes intégrales et locales des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Fluide versus écoulement incompressible.

Écoulement stationnaire versus écoulement laminaire.

Systèmes d'équations aux dérivées partielles de Euler, Navier et Navier-Stokes.

Conditions aux limites dynamiques entre deux fluides non miscibles.

Application des formes locales aux écoulements classiques comme par exemple : Couette, Poiseuille, écoulement de deux fluides non miscibles, 2ème problème de Stokes.

Applications en ingénierie

Les théorèmes d'Euler, les théorèmes de Bernoulli, les théorèmes de conservation des débits.

Compétences -

- Savoir observer et modéliser le comportement d'un fluide.
- Savoir établir et utiliser les formes globales et les formes locales des équations de conservation pour une utilisation dans un cadre d'ingénierie, académique ou de simulation numérique.
- Observer, modéliser, résoudre et critiquer un modèle.
- Savoir faire des hypothèses simplificatrices pour établir un modèle dégénéré.
- Savoir simplifier et utiliser un modèle pour les applications quotidiennes et industrielles.
- Comprendre et tenir compte des approximations d'un modèle d'ingénierie.



Introduction à la science des données - ISD

S6	ECTS	CM	TD	TP	Total	Nom
ISD	5	12	0	30	42	Introduction à la science des données

Descriptif -

Le cours est une introduction à la science des données. La première étape d'une étude de science des données consiste à analyser la structure du jeu de données. Il s'agit de synthétiser l'information à l'aide de méthodes d'apprentissage non supervisé. Les différentes techniques étudiées seront appliquées à des données réelles issues de problèmes dans différents domaines : environnement, sécurité informatique et santé.

Objectifs d'apprentissage -

A l'issue du cours, les étudiants et étudiantes sauront proposer une méthodologie pertinente pour synthétiser et visualiser des données en grande dimension et la mettre en œuvre sous Python et seront capables de présenter une analyse critique des résultats obtenus.

Réduction de dimension et visualisation de données de grande dimension

Analyse en composantes principales, décomposition en matrices non négatives, multidimensionnel scaling.

Classification non supervisée

Classification hiérarchique ascendante, k -means, k -medioids.

Un premier pas vers les méthodes supervisées

Méthodes des plus proches voisins.

Dans chaque partie, les éléments théoriques ou algorithmiques seront introduits, puis les algorithmes seront mis en œuvre sous Python (module scikit learn), d'abord sur des exemples simples, puis sur des jeux de données réelles à travers des mini projets.